GHEORGHE MIHOC
VIRGIL CRAIU

TRATAT DE STATISTICĂ MATEMATICĂ

VOLUMUL I.

SELECȚIE ȘI ESTIMAȚIE

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII SOCIALISTE ROMÂNIA

TRATAT
de
STATISTICĂ MATEMATICĂ

VOL. I
SELECȚIE ȘI ESTIMAȚIE

Scanned with OKEN Scanner

TRATAT
de
STATISTICĂ MATEMATICĂ

Volumul I

SELECȚIE ȘI ESTIMAȚIE

Scanned with OKEN Scanner

PREFAȚĂ

Domeniul statisticii matematice și al aplicațiilor sale s-a dezvoltat continuu și o varietate de abordări ale acestuia și-a făcut loc în revistele de specialitate. Domeniul statisticii matematice și al aplicațiilor sale poate fi împărțit în trei categorii : estimarea și verificarea ipotezelor statistice datorată lui Fisher, Neyman, Pearson,... ; inferența Bayesiană și teoria deciziilor prezentată inițial de Wald.

Multe dintre fundamentele teoriei estimării și verificării ipotezelor statistice au fost elaborate în perioada 1920—1935 pe două direcții principale. Neyman și Pearson, E. S. plecînd de la probleme din biologie și industrie dezvoltă principiile verificării ipotezelor statistice. Fisher plecînd de la probleme din agricultură, dezvoltă teoria estimării. Spiritul și conținutul lucrărilor din această perioadă pot fi găsite în :

— *Fisher : Contributions to Mathematical Statistics, 1950,*
— *Neyman : Lectures and Conference on Mathematical Statistics and Probability, 1952,*
— *Neyman : A Selection of Early Statistical Papers, 1968,*
— *Neyman și Pearson : Joint Statistical Papers, 1967 și*
— *Pearson : The Selected Papers of E. S. Pearson, 1966.*

Este adevărat că majoritatea practicilor statistice folosesc conceptele, criteriile și metodele elaborate de Neyman, Pearson și Fisher, însă ideile lor au fost dezvoltate și continuă să fie dezvoltate. Acestea constituie așa numita statistică clasică.

Statistica matematică modernă depinde de teoria probabilităților. Deoarece scopul acestui tratat nu este prezentarea teoriei probabilităților și deoarece în literatura română de specialitate există cărți de teoria probabilităților (Ciucu (1963), Onicescu (1963), Reischer, Sâmboan și Theodorescu (1967), Iosifescu, Mihoc și Theodorescu (1966), Mihoc, Ciucu și Craiu (1970)) renunțăm la prezentarea teoriei probabilităților și ne vom ocupa numai de teoria matematică a statisticii.

Scanned with OKEN Scanner

Spunem teoria matematică a statisticii, deoarece statistica are două aspecte: teoria matematică și metodologia bazată pe această teorie.

De asemenea nu ne vom ocupa de statistica pentru variabile dependente deoarece această teorie este expusă în monografia „Inferență statistică pentru variabile dependente" de Gh. Mihoc și Mariana Craiu, Edit. Acad. R.S.R., (1972).

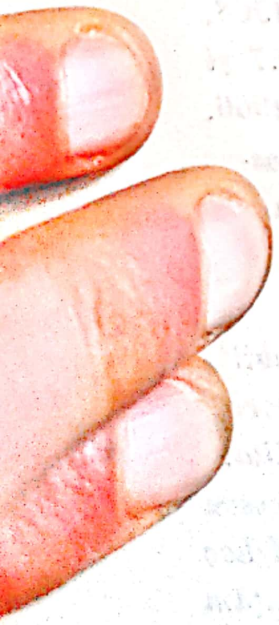
În acest prim volum expunem teoria selecției și rezultatele de bază din estimarea punctuală și prin intervale de încredere, urmînd ca în celelalte volume să expunem teoria verificării ipotezelor statistice în strînsă legătură cu teoria deciziilor, analiza dispersională, corelația și regresia, analiza secvențială și inferența Bayesiană.

Am căutat să prezentăm cît mai sistematic atît rezultatele clasice cît și cele mai importante rezultate contemporane. Acest fapt a făcut să trecem ușor peste anumite rezultate sau chiar să omitem unele dintre ele. Tratatul de față poate servi ca un ghid în literatura de specialitate; problemele propuse completează textul și conduce cititorul la sursele originale.

În bibliografie sînt inserate numai acele articole care sînt citate în text.

Martie 1975

AUTORII



Scanned with OKEN Scanner

CUPRINS

Capitolul I

REPARTIŢII CONTINUI

§ 1. Repartiţia normală 17
§ 2. Repartiţia χ^2 19
§ 3. Repartiţia t 23
§ 4. Repartiţia F 25
§ 5. Repartiţia χ^2 necentrată 30
§ 6. Repartiţia F necentrată 36
§ 7. Repartiţia t necentrată 42

Capitolul II

SELECŢIE

SELECŢIE DINTR-O POPULAŢIE INFINITĂ

§ 1. Populaţie statistică. Selecţii 47
§ 2. Caracteristici de selecţie 51
§ 3. k-statistici 57
§ 4. Repartiţia sumelor şi mediilor de selecţie 61
§ 5. Legea slabă a numerelor mari 63
§ 6. Repartiţia limită a sumelor şi mediilor de selecţie 64
§ 7. Repartiţia asimptotică a funcţiilor de medii de selecţie 68
§ 8. Dezvoltarea asimptotică a repartiţiei sumei de selecţie 70

SELECŢIA DINTR-O POPULAŢIE FINITĂ

§ 9. Definiţii şi rezultate 73
§ 10. Procedee limită 77
§ 11. Legătura dintre selecţia cu şi fără înlocuire 78
§ 12. Legea numerelor mari 79
§ 13. Convergenţa mediilor de selecţie 86

Capitolul III

SELECŢIA DINTR-O POPULAŢIE NORMALĂ

§ 1. Selecţia dintr-o populaţie normală unidimensională 92
§ 2. Selecţia dintr-o populaţie normală bidimensională 99
§ 3. Selecţia dintr-o populaţie normală multidimensională 108
3.1. Repartiţia normală multidimensională 108
3.2. Repartiţia Wishart 115
3.3. Repartiţia T^2 118
3.4. Repartiţii de selecţie 120

Scanned with OKEN Scanner

Capitolul IV

FORME PĂTRATICE ÎN VARIABILE NORMALE

§ 1. Introducere 130
§ 2. Repartiția formei pătratice. Interpretare geometrică 130
§ 3. Funcția caracteristică și momente 133
§ 4. Forme pozitiv definite în cazul centrat 135
4.1. Punerea problemei 135
4.2. Dezvoltări ca funcții liniare de repartiții χ^2 138
4.3. Dezvoltarea în serie Laguerre 141
4.4. Dezvoltarea în serie Mac Laurin 144
4.5. Probabilitatea conținută de o elipsă 146
4.6. Aproximații 147
4.7. Repartiția limită 148
§ 5. Forme pozitive definite în cazul necentrat 149
5.1. Dezvoltări ca funcții liniare de repartiții χ^2 149
5.2. Dezvoltări ca funcții liniare de repartiții χ^2 necentrate 151
5.3. Dezvoltare în serie Laguerre 152
5.4. Dezvoltare în serie Mac Laurin 153
§ 6. Forme pătratice indefinite 154
§ 7. Independența a două forme pătratice 155
§ 8. Condiția ca o formă pătratică să fie repartizată χ^2 157
§ 9. Condiția necesară și suficientă ca un polinom pătratic să fie repartizat χ^2 centrat (necentrat) 161

Capitolul V

STATISTICI DE ORDINE

§ 1. Definiții. Introducere 164
§ 2. Repartițiile diferitelor statistici de ordine 166
§ 3. Momentele statisticilor de ordine 171
§ 4. Relații de recurență între momentele statisticilor de ordine . . . 175
§ 5. Repartiția comună asimptotică a cuantilelor 177
§ 6. Repartiția asimptotică a elementelor extreme 179
§ 7. Repartiția asimptotică a funcțiilor liniare de statisticile de ordine 185
§ 8. Margini pentru momentele statisticilor de ordine 186
§ 9. Margini și sisteme ortonormale 190

Probleme 193

Capitolul VI

ESTIMATORI CONSISTENȚI — ESTIMATORI NEDEPLASAȚI

§ 1. Introducere 201
§ 2. Estimatori invarianți 201
§ 3. Șir consistent de estimații 203
§ 4. Estimatori nedeplasați 207
4.1. Definiții 207
4.2. Estimatori modul-nedeplasați 207
§ 5. O margine inferioară pentru dispersia estimatorului 211
5.1. Introducere 211
5.2. Inegalitatea Rao-Cramer 212

Scanned with OKEN Scanner

5.3. Estimatori eficienţi. Eficienţă 215
5.4. Forma repartiţiilor pentru care există un estimator eficient . . . 216
5.5. Inegalitatea Bhattacharya-Kendall-Stuart 219
5.6. Proprietăţi ale estimatorilor de dispersie minimă 222
5.7. Inegalitatea Chapman-Robbins 224
Probleme 226

Capitolul VII

STATISTICI JACKKNIFE

§ 1. Reducerea deplasării prin metoda Jackknife 231
1.1. Introducere 231
1.2. Estimatori jackknife generalizaţi 231
1.3. Metoda lui Quenouille 233
§ 2. Repartiţii asimptotice 241
2.1. Introducere 241
2.2. Teoremele lui Miller (1964) şi estimatorii jackknife generalizaţi 242
2.3. Teoremele lui Miller (1964) şi U-statisticile 247
2.4. Estimatori jackknife generalizaţi şi U-statistici 254

Capitolul VIII

ESTIMATORI SUFICIENŢI. STATISTICI COMPLETE

§ 1. Introducere 257
§ 2. Estimatori suficienţi 257
§ 3. Estimatori suficienţi şi estimatori nedeplasaţi 262
§ 4. Forma repartiţiilor ce posedă estimatori suficienţi 265
4.1. Intervalul de variaţie nu depinde de θ 266
4.2. Una dintre limitele intervalului de variaţie al variabilei X depinde de θ 267
4.4. Amîndouă limitele intervalului de variaţie al variabilei X depinde de θ 267
§ 5. Statistici complete 269
§ 6. Familii de măsuri probabilistice complete mărginite 274
§ 7. Familii de măsuri probabilistice puternic complete 275
§ 8. Statistici complete în cazul mai multor parametri 277
§ 9. Statistici minimal suficiente 281
Probleme 283

Capitolul IX

METODA VEROSIMILITĂŢII MAXIME

§ 1. Introducere 286
§ 2. Selecţii grupate 287
§ 3. Eficienţa, suficienţa şi verosimilitatea maximă 292
§ 4. Proprietăţi asimptotice ale estimatorilor de verosimilitate maximă 293
§ 5. O metodă iterativă pentru obţinerea estimatorilor de verosimilitate maximă 298
§ 6. Metoda verosimilităţii maxime în cazul în care θ este un vector k-dimensional 299

Scanned with OKEN Scanner

§ 7. Metoda verosimilității maxime în estimarea parametrilor de poziție și de împrăștiere 308
§ 8. Estimarea parametrilor structurali. Estimatori condiționați de verosimilitate maximă 311
§ 9. Estimarea vectorilor structurali 317
§ 10. Aplicarea metodei verosimilității maxime la modelele ce implică un număr mare de parametri 318
10.1. Introducere 318
10.2. Verosimilități integrate 318
10.3. Verosimilități relative maxime 320
§ 11. Statistici ancilare 321
§ 12. Estimatori jackknife generalizați și verosimilitatea maximă . . . 325
§ 13. Metoda minimului lui X^2 327
Probleme 328

Capitolul X

METODA CELOR MAI MICI PĂTRATE

§ 1. Introducere 339
§ 2. Metoda celor mai mici pătrate în modelul liniar 339
2.1. Măsurători de precizii egale 340
2.2. Măsurători de precizii diferite 346
§ 3. Combinații liniare de parametrii 349
3.1. Teorema lui Markov 349
3.2. Teoremele lui Neyman, J. și David, F. 350
3.3. Estimatori ortogonali 352
§ 4. Legături liniare 354

Capitolul XI

STATISTICI DE ORDINE ÎN ESTIMAREA PUNCTUALĂ A PARAMETRILOR

§ 1. Introducere 358
§ 2. Amplitudinea estimator al parametrului σ din repartiția $N(\mu, \sigma^2)$ 358
§ 3. Estimatori ai parametrului σ bazați pe pseudoamplitudini 360
§ 4. Estimatori construiți pe baza statisticilor sistematice 365
§ 5. Metoda celor mai mici pătrate și statisticile de ordine în cazul parametrilor de poziție și de împrăștiere 370
§ 6. Metoda lui Blom (1958, 1962) pentru estimarea parametrilor de poziție și de împrăștiere 374
§ 7. Estimarea parametrilor de poziție și de împrăștiere din observații censorizate 378
7.1. Definiții 378
7.2. Reparatiția normală 379
7.2.1. Istoric 379
7.2.2. Metoda verosimilității maxime 380
7.2.2.1. Trunchiere 380
7.2.2.2. Censorizare de tipul I 381
7.2.2.3. Censorizare de tipul II 382
7.2.2.4. Selecții dublu censorizate 384
7.2.3. Metoda lui Blom 386
7.3. Repartiția exponențială 387

Scanned with OKEN Scanner

§ 8. Procedee robuste 387
8.1. Introducere 387
8.2. Estimatori M (Huber (1964)) 388
8.3. Estimatori L (Combinaţii liniare de statistici de ordine) 390
8.4. Estimatori R (Estimatori derivaţi din testele de rang) 392
8.5. Stabilitatea estimatorilor M, L şi R. 393

Capitolul XII

INTERVALE DE ÎNCREDERE

§ 1. Definiţia intervalului de încredere 395
§ 2. Existenţa intervalelor de încredere 396
§ 3. Intervale de încredere simultane 412
§ 4. Regiuni de încredere 417
§ 5. Construirea intervalelor de încredere pentru selecţii mari 419
§ 6. Cele mai scurte intervale de încredere 421
§ 7. Interval de verosimilitate 424
§ 8. Determinarea intervalelor de încredere cu ajutorul statisticilor de ordine 427
8.1. Intervale de încredere pentru cuantile 427
8.2. Intervale de încredere pentru intervalele dintre cuantile 429
8.3. Intervale de încredere pentru cuantile în populaţii finite 429
§ 9. Limite de toleranţă 430
9.1. Definiţie 430
9.2. Limite de toleranţă pentru repartiţia normală 431
9.3. Interval de predicţie 436
§ 10. Intervale de încredere şi estimatori jackknife 436
Bibliografie 439

Scanned with OKEN Scanner

CONTENTS

Chapter I

CONTINUOUS DISTRIBUTIONS

§ 1. The normal distribution 17
§ 2. The χ^2 distribution 19
§ 3. The t distribution 23
§ 4. The F distribution 25
§ 5. The non-central χ^2 distribution 30
§ 6. The non-central F distribution 36
§ 7. The non-central t distribution 42

Chapter II

SAMPLING THEORY

SAMPLING FROM A CONTINUOUS POPULATION

§ 1. Population. Samples 47
§ 2. Statistics 51
§ 3. k-statistics 57
§ 4. Sampling theory of sample sums and means 61
§ 5. Weak law of large numbers 63
§ 6. Limiting distribution of sample sums and means 64
§ 7. Asymptotic distribution of functions of sample means 68
§ 8. Asymptotic expansion of distribution of sample sum 70

SAMPLING FROM A FINITE POPULATION

§ 9. Definitions 73
§ 10. Limiting methods 77
§ 11. Connection between sampling with and without replacement . . . 78
§ 12. The law of large numbers 79
§ 13. Convergence of sample means 86

Chapter III

SAMPLING FROM A NORMAL POPULATION

§ 1. Sampling from a one-dimensional normal population 92
§ 2. Sampling from a bivariate normal population 99
§ 3. Sampling from a multivariate normal population 108
3.1. Multivariate normal distribution 108
3.2. The Wishart distribution 115
3.3. The T^2 distribution 118
3.4. Distributions of sample 120

Scanned with OKEN Scanner

Chapter IV

QUADRATIC FORMS IN NORMAL VARIATES

§ 1. Introduction 130
§ 2. The distribution of quadratic form 130
§ 3. Characteristic function and moments 133
§ 4. Pozitive definite quadratic forms in central case 135
4.1. Stating the problem 135
4.2. Expansion as linear functions of chi-square variates 138
4.3. Expansion as Laguerre serie 141
4.4. Expansion as Mac Laurin serie 144
4.5. Probability conteind in an ellipse 146
4.6. Approximations 147
4.7. Limiting distribution 148
§ 5. Pozitive definite quadratic forms in non-central case 149
5.1. Expansion as linear functions of chi-square variates 149
5.2. Expansion as linear functions of non-central chi-square variate . . 151
5.3. Expansion as Laguerre serie 152
5.4. Expansion as Mac Laurin serie 153
§ 6. The indefinite quadratic forms 154
§ 7. The independence of two quadratic forms 155
§ 8. A condition as quadratic forms to have chi-square distribution 157
§ 9. A necessary and sufficient condition as quadratic polynom to have central (non-central) chi-square distribution 161

Chapter V

ORDER STATISTICS

§ 1. Definitions. Introduction 164
§ 2. Distributions of order statistics 166
§ 3. Moments of order statistics 171
§ 4. Recurrence relations between moments of order statistics 175
§ 5. The asymptotic joint distribution of quantiles 177
§ 6. The asymptotic distribution of the extreme 179
§ 7. The asymptotic distribution of linear functions of order statistics 185
§ 8. Bound for the expected values of order statistics 186
§ 9. Moments and ortonormal sistem 190
Problems 193

Chapter VI

CONSISTENT SEQUENCE OF ESTIMATORS. UNBIASED ESTIMATION

§ 1. Introduction 201
§ 2. Invariant estimators 201
§ 3. Consistent sequence of estimators 203
§ 4. Unbiased estimation 207
4.1. Some definitions 207
4.2. Modal unbiasedness 207
§ 5. A lower bound of the variance of an estimate 211
5.1. Introduction 211
5.2. The Cramér-Rao inequality 212

Scanned with OKEN Scanner

5.3. Efficient estimator. Efficiency 215
5.4. Distributions possessing efficient estimates 216
5.5. Bhattacharya-Kendall-Stuart inequality 219
5.6. Properties of minimum variance estimators 222
5.7. Chapman-Robbins inequality 224
Problems 226

Chapter VII

THE JACKKNIFE STATISTICS

§ 1. Reduction of bias by jackknifing 231
1.1. Introduction 231
1.2. The generalized jackknife 231
1.3. The method of Quenouille 233
§ 2. Asymptotic distribution 241
2.1. Introduction 241
2.2. Miller's theorems and generalized jackknife estimators 242
2.3. Miller's theorems and *U*-statistics 247
2.4. Generalized jackknife estimators and U-statistics 254

Chapter VIII

SUFFICIENT ESTIMATES. COMPLETE STATISTICS

§ 1. Introduction 257
§ 2. Sufficient estimates 257
§ 3. Sufficient estimates and unbiased estimates 262
§ 4. Distributions possesing sufficient estimates 265
4.1. The range of the variate does not depend on the parameter θ . . . 266
4.2. Only one terminal of the range of the variate depends on θ 267
4.3. Both extremites of the range of the variate dependen on θ 267
§ 5. Complete statistics 269
§ 6. Complete families of probability measures 274
§ 7. Strongly complete families of probability measures 275
§ 8. Complete statistics in the case of several parameters 277
§ 9. Minimal sufficient statistics 281
Problems 283

Chapter IX

MAXIMUM-LIKELIHOOD ESTIMATION

§ 1. Introduction 286
§ 2. Grouped samples 287
§ 3. Efficiency, sufficiency and maximum likelihood 292
§ 4. Large-sample-size properties 293
§ 5. Successive approximation of maximum likelihood estimators . . . 298
§ 6. Likelihood estimators for several parameters 299
§ 7. Likelihood methods in estimation of location and scale parameters 308
§ 8. Estimation of structural parameters. Conditional maximum -likelihood estimators 311
§ 9. Estimation of structural vectors 317
§ 10. Application of likelihood methods to models involving large numbers of parameters 318

Scanned with OKEN Scanner

10.1. Introduction 318
10.2. Integrated likelihood 318
10.3. Maximum relative likelihood 320
§ 11. Ancillary statistics 321
§ 12. Generalized jackknife estimators and maximum-likelihood . . . 325
§ 13. Minimum χ^2 method 327
Problems 328

Chapter X

THE METHOD OF LEAST SQUARES

§ 1. Introduction 339
§ 2. The method of least squares in the linear model 339
2.1. Measurements of equal precision 340
2.2. Measurements of different precision 346
§ 3. Linear combination of parameters 349
3.1. Markov's theorem 349
3.2. The Neyman-David theorems 350
3.3. Orthogonal estimators 352
§ 4. Linear connection 354

Chapter XI

ORDER STATISTICS IN PUNCTUAL ESTIMATION OF PARAMETERS

§ 1. Introduction 358
§ 2. Sample range estimator of parameter σ of normal distribution $N(\mu, \sigma^2)$ 358
§ 3. Estimators of parameter σ based on pseudo-range 360
§ 4. Estimators based on sistematic statistics 365
§ 5. Least-square estimation of location and scale parameters by order statistics 378
§ 6. Blom's estimates of location and scale parameters 370
§ 7. Estimation of location and scale parameters for censored data . . . 374
7.1. Definitions 378
7.2. The normal distribution 379
7.2.1. History 379
7.2.2. Method of maximum-likelihood 380
7.2.2.1. Truncation 380
7.2.2.2. Type I censoring 381
7.2.2.3. Type II censoring 382
7.2.2.4. Doubly censored samples 384
7.2.3. Blom's method 386
7.3. Exponential distribution 387
§ 8. Robust procedures 387
8.1. Introduction 387
8.2. M-estimators (Huber (1964)) 388
8.3. L-estimators 390
8.4. R-estimators 392
8.5. Stability of M, L and R estimators 393

Scanned with OKEN Scanner

Chapter XII

CONFIDENCE INTERVALS

§ 1.	Definition of confidence interval	395
§ 2.	Existence of confidence intervals	396
§ 3.	Simultaneous confidence intervals	412
§ 4.	Confidence regions	417
§ 5.	Confidence intervals for large samples	419
§ 6.	Shortest sets of confidence intervals	421
§ 7.	Interval estimation from likelihood function	424
§ 8.	Confidence intervals and order statistics	427
8.1.	Confidence intervals for quantiles	427
8.2.	Confidence intervals for quantile intervals	429
8.3.	Confidence intervals for quantiles in finite populations	429
§ 9.	Tolerance limits	430
9.1.	Definition	430
9.2.	Tolerance limits for a normal distribution	431
9.3.	Prediction interval	436
§ 10.	Confidence intervals and jackknife estimators	436
	Bibliography	439

Scanned with OKEN Scanner

Capitolul I

REPARTIȚII CONTINUI

§1. Repartiția normală

Repartiția normală a fost considerată pentru prima oară ca aproximație a repartiției binomiale (Moivre (1733)). Capătă importanță teoretică prin lucrările lui Laplace și Gauss. Laplace (1774) obține repartiția normală ca aproximație a repartiției hipergeometrice iar în 1778 tabelează $\Phi(x)$ în notațiile noastre. Lucrările lui Gauss (1809 și 1816) stabilesc tehnici bazate pe repartiția normală.

DEFINIȚIA 1. Vom spune că variabila aleatoare X urmează o repartiție normală de parametrii μ și σ^2, dacă are densitate de repartiție:

$$(1) \qquad p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right], \quad -\infty < x < \infty.$$

Vom nota, pentru simplificare, variabila aleatoare avînd această densitate de repartiție prin $N(\mu, \sigma^2)$ ($X \sim N(\mu, \sigma^2)$).

Reprezentarea grafică a funcției p arată că ea este simetrică față de paralela la axa Oy dusă prin punctul abscisă $x = \mu$. În punctul $x = \mu$, funcția p admite un maxim $p(\mu) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$, iar punctele de abscisă $\mu \pm \sigma$ sînt puncte de inflexiune. Graficul funcției p este concav pentru $\mu - \sigma < x < \mu + \sigma$ și convex în rest. Graficul funcției se numește curba normală sau curba lui Gauss și are forma unui clopot care este cu atît mai ascuțit cu cît σ este mai mic. Schimbarea lui μ (σ rămînînd constant) revine la o translație, forma curbei nemodificîndu-se.

BIBLIOTECA MUNICIPALĂ IAȘI

TEOREMA 1. *Pentru variabila* $N(\mu, \sigma^2)$

$$(2) \qquad \varphi(t) = \exp\left(it\,\mu - \frac{1}{2}\,t^2\,\sigma^2\right).$$

COROLARUL 1. *Pentru variabila* $N(\mu, \sigma^2)$

i) $\mu_{2r} = \dfrac{(2r)!}{2^r \cdot r!}\,\sigma^{2r}$

$\mu_{2r+1} = 0, \quad r \geqslant 1$

339.855

ii) $\varkappa_2 = \sigma^2, \quad \varkappa_r = 0, \quad r > 2.$

Scanned with OKEN Scanner

DEFINIȚIA 2. Variabila aleatoare U urmează o repartiție normală redusă dacă are densitatea de repartiție

$$\varphi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}u^2\right), \quad -\infty < u < \infty. \tag{3}$$

Funcția de repartiție a variabilei U este

$$\Phi(u) = \int_{-\infty}^{u} \varphi(x)\,dx. \tag{4}$$

$\varphi(u)$ fiind simetrică față de $\mu = 0$, pentru orice $\mu > 0$, avem

$$\Phi(-u) = 1 - \Phi(u) \tag{5}$$

DEFINIȚIA 3. Cantitatea u_α definită prin ecuația

$$P(U < u_\alpha) = \alpha$$

poartă numele de cuantila de ordin α a variabilei $N(0,1)$.

Avem

$$-u_\alpha = u_{1-\alpha}. \tag{6}$$

PROPOZIȚIA 1. *Pentru funcția de repartiție a variabilei* $N(0, 1)$ *are loc*

$$\Phi(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(x - \frac{x^3}{2\cdot 3} + \frac{x^5}{2!\,2^2\cdot 5} - \cdots\right). \tag{7}$$

Observație. Pentru valori mici ale lui x convergența este înceată.

PROPOZIȚIA 2. *Pentru funcția de repartiție a variabilei* $N(0,1)$ *are loc*

$$1 - \Phi(x) = \varphi(x)\,\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp\left(-\frac{1}{2}x^2u^2\right)}{1+u^2}\,du. \tag{8}$$

Demonstrația rezultă integrînd în raport cu u, între $-\infty$ și $+\infty$, egalitatea

$$\frac{\exp\left[-\frac{1}{2}x^2(1+u^2)\right]}{1+u^2} = \int_{\frac{1}{2}x^2}^{\infty} \exp\left[-v(1+u^2)\right] dv$$

și ținînd seama că integrala din membrul drept este uniform convergentă, ceea ce permite inversarea ordinei de integrare.

DEFINIȚIA 4. $R(x) = [1 - F(x)]/\varphi(x) = e^{\frac{1}{2}x^2} \int_x^{\infty} e^{-\frac{1}{2}u^2}\,du$ poartă numele de raportul lui Mills.

Scanned with OKEN Scanner

Din (8) obținem

$$R(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp\left(-\frac{1}{2}x^2u^2\right)}{1+u^2}\,du \tag{9}$$

sau înlocuind $\frac{1}{2}x^2u^2$ prin t.

$$R(x) = \frac{x}{2\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{e^{-t}t^{-\frac{1}{2}}}{t+\frac{1}{2}x^2}\,dt.$$

PROPOZIȚIA 3. *Avem*:

$$R(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^3} + \frac{1.3}{x^5} - \ldots (-1)^j \frac{1.3.5\ldots(2j-1)}{x^{2j+1}} + R_j(x), \tag{10}$$

unde

$$|R_j(x)| = \frac{2x^{-(2j+1)}}{2\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{t^{2j+2}e^{-t}t^{-\frac{1}{2}}}{t+x^2}\,dt.$$

Observație. Această serie nu converge, însă

$$\begin{aligned} |R_j(x)| &< \frac{2x^{-(2j+1)}}{2\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} t^{2j+\frac{1}{2}} e^{-t}\,dt \\ &< x^{-(2j+1)}\,1.3.5\ldots(2j-1). \end{aligned} \tag{11}$$

§ 2. Repartiția χ^2

DEFINIȚIA 5. Vom spune că variabila aleatoare X urmează o repartiție χ^2 cu n grade de libertate (și notăm această variabilă prin $\chi^2(n)$) dacă densitatea sa de repartiție este

$$p_{\chi^2(n)}(x) = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\sigma^n\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} e^{-\frac{x}{2\sigma^2}} x^{\frac{n}{2}-1}, \quad 0 \leqslant x < \infty. \tag{12}$$

Observații. i) Densitatea de repartiție a variabilei $\sqrt{\chi^2(n)}$ este

$$\frac{2}{2^{\frac{n}{2}}\sigma^n\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} x^{n-1} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \tag{12'}$$

și caracterizează repartiția Maxwell.

Scanned with OKEN Scanner

ii) Densitatea de repartiție a variabilei $\sqrt{2\chi^2(n)}$ este

$$\frac{1}{2^{n-1}\sigma^n\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\,x^{n-1}\,e^{-\frac{x^2}{4\sigma^2}}. \tag{12''}$$

Proprietățile repartiției χ^2 (n) sînt sintetizate în

TEOREMA 2. *Funcția caracteristică a variabilei* χ^2 (n) este

$$\varphi(t) = (1 - 2it\,\sigma^2)^{-\frac{n}{2}}. \tag{13}$$

COROLARUL 2. *Pentru variabila aleatoare* $\chi^2(n)$

$$\mu'_r = (2\sigma^2)^r \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2} + r\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \tag{14}$$

$$\mathcal{M}_r[\chi^2(n), \quad \sigma = 1] = n2^{r-1}\Gamma(r). \tag{15}$$

În particular

$$\mu = \mu'_1 = n\sigma^2, \qquad \mu'_2 = n(n+2)\sigma^4$$

$$\mu_2 = 2n\sigma^4, \qquad \mu_3 = 8n\sigma^6, \qquad \mu_4 = 12n(n+4)\sigma^8$$

COROLARUL 3. *Pentru variabila* $\chi^2(n)$

$$\gamma_1 = \beta_1 = \frac{\mu_3}{\mu_2^{3/2}} = \left(\frac{8}{n}\right)^{1/2}$$

$$\gamma_2 = \beta_2 - 3 = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3 = \frac{12}{n}. \tag{16}$$

TEOREMA 3. *Pentru variabila* $\chi^2(n)$

$$\lim_{n\to\infty} P\left[\frac{\chi^2(n) - \mu'_1}{\sqrt{\mu_2}} < x\right] = \Phi(x). \tag{17}$$

TEOREMA 4. (Fisher). *Pentru variabila* $\chi^2(n)$

$$\lim_{n\to\infty} P\left[\sqrt{2\chi^2(n)} - \sqrt{2n-1} < x\right] = \Phi(x). \tag{18}$$

Scanned with OKEN Scanner

Demonstrație. Putem scrie

$$P[\sqrt{2\chi^2(n)} - \sqrt{2n-1} < x] = P\left[\chi^2(n) < \frac{1}{2}(x+\sqrt{2n-1})^2\right] =$$

$$= P\left[\frac{\chi^2(n)-n}{\sqrt{2n}} < x\sqrt{\frac{2n-1}{2n}} + \frac{x^2-1}{2\sqrt{2n}}\right]$$

de unde

$$\lim_{n\to\infty} P[\sqrt{2\chi^2(n)} - \sqrt{2n-1} < x] = \lim_{n\to\infty} P\left[\frac{\chi^2(n)-n}{\sqrt{2n}} < x\right]$$

și ținînd seama de teorema 3, rezultă teorema noastră.

PROPOZIȚIA 4. *Aproximația* (18) *este mai bună decît aproximația* (17).

Demonstrație. Pentru repartiția normală $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$. De asemenea
$\gamma_1 > 0$ pentru o repartiție unimodală, către dreapta,
$\gamma_1 < 0$ pentru o repartiție unimodală, către stînga,
$\gamma_2 > 0$ pentru o repartiție mai puțin turtită decît repartiția normală,
$\gamma_2 < 0$ pentru o repartiție mai turtită decît repartiția normală.

Momentele variabilei $\sqrt{\chi^2(n)}$, ținînd seama de (12′)

$$\mu_r' = 2^{\frac{r}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{n+r}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}. \tag{14'}$$

Folosind dezvoltarea lui Stirling

$$\ln\Gamma(x+1) = \frac{1}{2}\ln(2\pi) + \left(x+\frac{1}{2}\right)\ln x - x + \frac{1}{12x} -$$

$$- \frac{1}{360\,x^3} + 0\left(\frac{1}{x^3}\right)$$

găsim pentru momentele variabilei $\sqrt{\chi^2(n)}$ aproximațiile

$$\mu_1' \simeq \sqrt{n}\left(1 - \frac{1}{4n} + \frac{1}{32\,n^2} + \frac{5}{128\,n^3} + \cdots\right)$$

$$\mu_2 \simeq n \tag{19}$$

$$\mu_3' \simeq (n+1)\mu_1'$$

$$\mu_4' \simeq (n+2)n.$$

Scanned with OKEN Scanner

Momentele centrate ale variabilei $\sqrt{\chi^2(n)}$ sînt

$$\mu_2 \simeq \frac{1}{2} - \frac{1}{8n} + 0\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$\mu_3 \simeq \frac{1}{4\sqrt{n}} + 0\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \tag{20}$$

$$\mu_4 \simeq \frac{3}{4} + \frac{3}{8n} + 0\left(\frac{1}{n}\right).$$

Pentru momentele centrate ale variabilei $\sqrt{2\chi^2(n)}$ obţinem

$$\mu_2 = 1 - \frac{1}{4n} + 0\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$\gamma_1 = \frac{1}{\sqrt{2n}} + 0\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \tag{21}$$

$$\gamma_2 = \frac{3}{4n^2} + 0\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Din (21) şi din corolarul 3 rezultă că $\sqrt{2\chi^2(n)}$ converge mai repede către o variabilă normală, decît $\chi^2(n)$, ceea ce demonstrează propoziţia.

TEOREMA 5. (Wilson-Hilferty (1931)). *Pentru variabila* $\chi^2(n)$

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{\left(\frac{\chi^2}{n}\right)^{\frac{1}{3}} - \left(1 - \frac{2}{9n}\right)}{\sqrt{\frac{2}{9n}}} < x\right) = \Phi(x). \tag{22}$$

Demonstraţie. Avem :

$$P\left(\frac{\left(\frac{\chi^2}{n}\right)^{1/3} - \left(1 - \frac{2}{9n}\right)}{\sqrt{\frac{2}{9n}}} < x\right) =$$

$$= P\left(\frac{\chi^2 - n}{\sqrt{2n}} < \frac{n}{\sqrt{2n}}\left\{\left[x\sqrt{\frac{2}{9n}} + \left(1 - \frac{2}{9n}\right)\right]^3 - 1\right\}\right) =$$

$$= P\left(\frac{\chi^2 - n}{\sqrt{2n}} < x + \frac{4x}{9n}\left(\frac{1}{9n} - 1\right) + \frac{2x^2}{3\sqrt{2n}}\left(1 - \frac{2}{9n}\right) +\right.$$

$$\left. + \frac{2x^3}{27n^2} - \sqrt{\frac{2}{n}}\left(\frac{4}{729n^2} - \frac{2}{27n} + \frac{2}{3}\right)\right),$$

de unde, pentru $n \to \infty$, obţinem (22).

Scanned with OKEN Scanner

PROPOZIȚIA 5. *Aproximația* (22) *este mai bună decît aproximația* (18).

TEOREMA 6. *Dacă* $X_1, X_2, \ldots, X_n$ *sînt variabile aleatoare independente, fiecare dintre ele fiind repartizată* $N(0, \sigma^2)$, *atunci variabila aleatoare* $\sum_1^n X_i^2 \sim \chi^2(n)$.

§ 3. Repartiția t

DEFINIȚIA 6. Vom spune că variabila aleatoare t urmează o repartiție t cu n grade de libertate (sau „student" cu n grade de libertate) dacă are densitatea de repartiție (Fisher (1925))

$$p_{t(n)}(t) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi n}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-\frac{1}{2}(n+1)}. \tag{23}$$

Vom nota, pentru simplificare, variabila aleatoare avînd această densitate de repartiție prin $t(n)$ ($t \sim t(n)$).

DEFINIȚIA 7. Cantitatea $t_\alpha(n)$ definită prin ecuația

$$P[t(n) \leqslant t_\alpha(n)] = \alpha \tag{24}$$

poartă numele de cuantila de ordin α a variabilei $t(n)$.

Observație. Ținînd seama că
— repartiția t este simetrică față de $t = 0$
— repartiția t are un singur modul în $t = 0$

$$-\lim_{n\to\infty} p_{t(n)}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}t^2}$$

urmează că

i) $t_{0,5}(n) = 0 = u_{0.5}$

ii) pentru $\alpha > 0{,}5$, $t_\alpha(n) > u_\alpha > 0$

iii) pentru $\alpha < 0{,}5$

$$t_\alpha(n) < -u_\alpha < 0$$

iv) $t_{1-\alpha}(n) = -t_\alpha(n)$.

TEOREMA 7. *Dacă* U *și* $\chi^2(n)$ *sînt două variabile aleatoare independente, atunci variabila aleatoare*

$$U/(\chi(n)/\sqrt{n}) \sim t(n). \tag{25}$$

Scanned with OKEN Scanner

TEOREMA 8. *Pentru variabila* $t(n)$ *sînt adevărate*
a) *dacă* $t \geqslant 0$

$$P[t(n) \leqslant t] = 1 - \frac{1}{2} I_{n/(n+t^2)}\left(\frac{1}{2} n, \frac{1}{2}\right) \tag{26}$$

b) *cînd atît* $|t|/\sqrt{n}$ *cît şi* n *sînt mici şi* $t^2 < n$ [Amos (1964)]

$$P[t(n) \leqslant t] = \frac{1}{2} + \frac{t}{\sqrt{n\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} F\left(\frac{n+1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{3}{2}; -\frac{t^2}{n}\right). \tag{27}$$

TEOREMA 9. *Pentru variabila* $t(n)$

$$\mu_r = n^{\frac{r}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{r+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n-r}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} = n^{\frac{r}{2}} \frac{1.3.\ldots.(r-1)}{(n-r)(n-r-2)\ldots(n-2)}. \tag{28}$$

Observaţii. i) Dacă $r \geqslant n$ momentul de ordin r este finit

ii) $M(|t(n)|) = \sqrt{n} \dfrac{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}$ (media deviaţiei)

iii) $D^2[t(n)] = \dfrac{n}{n-2} \qquad (n \geqslant 2)$

$$\alpha_4[t(n)] = \beta_2[t(n)] = 3 + \frac{6}{n-4} \qquad (n \geqslant 4)$$

$$\gamma_1 = \sqrt{\beta_1[t(n)]} = 0 \qquad \text{(Wishart (1947)).}$$

TEOREMA 10. (Hendricks (1936)). *Are loc următoarea aproximaţie*

$$p_{t(n)}(t) \simeq 2nc_n \sqrt{\frac{n+1}{\pi}} (t^2 + 2n)^{-\frac{3}{2}} \exp\left[-\frac{(n+1)c_n^2 t^2}{t^2+2n}\right], \tag{29}$$

unde

$$c_n = 1 - \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{n+1} - \frac{7}{32} \frac{1}{(n+1)^2}.$$

Observaţii. i) Aproximaţia este bună pentru $|t| < 2$.

Scanned with OKEN Scanner

ii) (29) este echivalentă cu aproximaţia

$$\frac{\sqrt{2(n+1)}\, c_n t(n)}{\sqrt{t^2(n)+2n}} \sim N(0,1) \tag{30}$$

dacă n este mic $\sqrt{2(n+1)}\, c_n$ poate fi înlocuită prin $\sqrt{2n-1}$.

TEOREMA 11. (Elfving (1955)). *Are loc următoarea aproximaţie*

$$P[t(n) \leqslant t] \simeq \Phi(\sigma t) + \frac{5}{96}\left(\frac{\sigma t^5}{n^2}\left(1+\frac{1}{2}\frac{t^2}{n}\right)^{-\frac{1}{2}(n+4)} - Z(\sigma t/\sqrt{2})\right) \tag{31}$$

unde

$$\sigma = \left(\frac{n-\frac{1}{2}}{n+\frac{1}{2}t^2}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

DEFINIŢIA 8. Vom spune că variabila aleatoare X urmează o repartiţie Pearson de tipul VII dacă densitatea sa de repartiţie se poate pune sub forma

$$p_X(x) = \frac{\Gamma(m)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(m-\frac{1}{2}\right)} \frac{c^2_{m-1}}{[c^2+(x-\zeta)^2]^m}, \qquad (m>0;\quad c>0). \tag{32}$$

Observaţie. Densitatea de repartiţie a variabilei $t(n)$ se obţine punînd

$$m = \frac{1}{2}(n+1), \quad c = \sqrt{n} \text{ şi } \zeta = 0.$$

Astfel dacă X are densitatea de repartiţie (32), $\sqrt{2m-1}\,(X-\zeta)/\sigma$ are repartiţia $t(2m-1)$.

§ 4. Repartiţia F

DEFINIŢIA 9. Repartiţia variabilei aleatoare

$$\frac{\chi^2(n_1)}{n_1} \Big/ \frac{\chi^2(n_2)}{n_2} \tag{33}$$

poartă numele de repartiţia F cu n_1, n_2 grade de libertate.

Vom folosi simbolul $F(n_1, n_2)$ pentru a reprezenta o variabilă aleatoare avînd această repartiţie.

Din definiţia 9 urmează că variabilele

$$F(n_1, n_2) \text{ şi } F^{-1}(n_2, n_1)$$

au repartiţii identice.

Scanned with OKEN Scanner

Proprietăţile repartiţiei F sînt sintetizate în teoremele:

TEOREMA 12. *Densitatea de repartiţie a variabilei aleatoare* $F(n_1, n_2)$ *este*

$$(34)\quad p_{F(n_1,n_2)}(f) = \frac{\Gamma\left(\frac{n_1+n_2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n_2}{2}\right)}\left(\frac{n_1}{n_2}\right)^{\frac{n_1}{2}} f^{\frac{n_1}{2}-1}\left(1+\frac{n_1}{n_2}f\right)^{-\frac{1}{2}(n_1+n_2)}, \quad f>0.$$

Cînd $f\to\infty$, $p_{F(n_1,n_2)}(f)\to 0$, $f\to 0$, $p_{F(n_1,n_2)}(f)\to 0$

$F(n_1, n_2)$ admite un singur modul, în

$$(35)\qquad f = n_2(n_1-2)/n_1(n_2+2).$$

TEOREMA 13. *Momentele repartiţiei* $F(n_1, n_2)$ *sînt*

$$(36)\qquad \mu'_r = \frac{n_2}{n_1}\,\frac{n_1(n_1+2)\ldots(n_1+2(r-1))}{(n_2-2)(n_2-4)\ldots(n_2-2r)}.$$

Observaţii. i) μ'_r există dacă $r \geqslant \frac{1}{2}n_2$.

ii) În particular (Wishart (1946))

$$(37)\qquad M[F(n_1,n_2)] = \frac{n_2}{n_2-4}, \qquad (n_2>2)$$

$$(38)\qquad D^2[F(n_1,n_2)] = \frac{2n_2^2(n_1+n_2-2)}{n_1(n_2-2)^2(n_2-4)}, \qquad n_2>4$$

$$(39)\qquad \beta_1 = \frac{8(n_2-4)}{(n_1+n_2-2)n_1}\left(\frac{2n_1+n_2-2}{n_2-6}\right)^2, \qquad n_2>6$$

$$(40)\qquad \beta_2 = 3+\frac{12[(n_2-2)^2(n_2-4)+n_1(n_1+n_2-2)(5n_2-22)]}{n_1(n_2-6)(n_2-8)(n_1+n_2-2)}, \quad n_2>8.$$

TEOREMA 14. *Funcţia caracteristică a repartiţiei* $F(n_1, n_2)$ *este funcţia hipergeometrică confluentă*

$$(41)\qquad M\left(\frac{n_1}{2};\ -\frac{n_2}{2};\ -\frac{n_2}{n_1}it\right).$$

TEOREMA 15. *Variabila aleatoare*

$$(42)\qquad \frac{G}{1+G} = \frac{n_1F}{n_2+n_1F},$$

Scanned with OKEN Scanner

unde $G = \chi^2(n_1)/\chi^2(n_2)$, $\chi^2(n_1)$, $\chi^2(n_2)$ *variabile aleatoare independente, este repartizată* $B\left(\frac{n_1}{2}, \frac{n_2}{2}\right)$.

Observație. Avem

$$P[F(n_1, n_2) \leqslant k] = I_{k_1}\left(\frac{n_1}{2}, \frac{n_2}{2}\right), \qquad k_1 = \frac{n_1 k}{n_2 + n_1 k} \tag{43}$$

unde

$$I_x(p, q) = \frac{1}{B(p, q)} \int_0^x t^{p-1}(1-t)^{q-1}\, dt.$$

TEOREMA 16. (Aroian (1953), Cacoullos (1965). *Variabila aleatoare*

$$\frac{1}{2}\sqrt{n}\left(\sqrt{F(n, n)} - \frac{1}{\sqrt{F(n, n)}}\right) \tag{44}$$

este repartizată $t(n)$.

TEOREMA 17. (Bizley (1950), Jowett (1963)). *Are loc relația*

$$P\left[F(2(n-r+1), 2r) > \frac{1-p}{p}\,\frac{r}{n-r+1}\right] = P(Y \geqslant r) \tag{45}$$

r întreg, $0 \leqslant r \leqslant n$ *și* Y *este o variabilă Bi* (n, p).

Fisher (1924) folosește variabila

$$z(n_1, n_2) = \frac{1}{2} \ln F(n_1, n_2). \tag{46}$$

TEOREMA 18. *Pentru variabila* $z(n_1, n_2)$

$$M[e^{tz(n_1, n_2)}] = M\{[F(n_1, n_2)]^{\frac{1}{2}t}\} = \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^{\frac{1}{2}t} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{n_1+t}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n_2-t}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n_2}{2}\right)}, \tag{47}$$

$$\mathcal{K}_1 = \frac{1}{2}\left[\ln\frac{n_2}{n_1} + \psi\left(\frac{n_1}{2}\right) - \psi\left(\frac{n_2}{2}\right)\right], \tag{48}$$

$$\mathcal{K}_2 = \frac{1}{2^r}\left[\psi^{(r-1)}\left(\frac{n_1}{2}\right) + (-1)^r\,\psi^{(r-1)}\left(\frac{n_2}{2}\right)\right] = \tag{49}$$

$$= (r-1)! \sum_{j=0}^{\infty}\left[\frac{(-1)^r}{(n_1+2j)^r} + \frac{1}{(n_2+2j)^r}\right], \qquad r \geqslant 2. \tag{50}$$

Scanned with OKEN Scanner

TEOREMA 19. (Aroian (1941), Wishart (1947))
a) *Dacă* n_1 *şi* n_2 *sînt pare*

$$M[z(n_1, n_2) = \frac{1}{2}\left[\ln \frac{n_2}{n_1} - \sum_{\frac{1}{2}\min(n_1, n_2)}^{\frac{1}{2}\max(n_1, n_2) - 1} \frac{1}{j}\right], \tag{51}$$

unde $\sum \frac{1}{j} = 0$ *dacă* $n_1 = n_2$ *(sumarea avînd aceleaşi limite)*

$$\mathcal{K}_r[z(n_1, n_2)] = \frac{(r-1)!}{2^r}\left[\left(S_r - \sum_{j=1}^{\frac{n_1}{2}-1} \frac{1}{j^r}\right) + (-1)^r\left(S_r - \sum_{j=1}^{\frac{n_2}{2}-1} \frac{1}{j^r}\right)\right], \tag{52}$$

unde

$$S_r = \sum_1^\infty \frac{1}{j^r}, \qquad r \geqslant 2. \tag{53}$$

b) *Dacă* n_1 *şi* n_2 *sînt impare*

$$\mathcal{K}_r[z(n_1, n_2)] = (r-1)!\left[\left(T_r - \sum_{j=0}^{\frac{1}{2}(n_2-3)} \frac{1}{(2j+1)^r}\right) + \right.$$
$$\left. + (-1)^r\left(T_r - \sum_{j=0}^{\frac{1}{2}(n_1-3)} \frac{1}{(2j+1)^r}\right)\right] \quad \text{pentru } r \geqslant 2, \tag{54}$$

unde

$$T_r = S_r\left(1 - \frac{1}{2^r}\right) = \sum_0^\infty \frac{1}{(2j+1)^r} \tag{55}$$

$$D^2[z(n_1, n_2)] = 2{,}467401 - \frac{1}{4}\left(\sum_{j=0}^{\frac{1}{2}(n_2-3)} \frac{1}{\left(j+\frac{1}{2}\right)^2} + \sum_{j=0}^{\frac{1}{2}(n_1-3)} \frac{1}{\left(j+\frac{1}{2}\right)^2}\right) \tag{56}$$

$$M[z(n_1, n_2)] = \frac{1}{2}\ln \frac{n_2}{n_1} - \sum_{\frac{1}{2}\min(n_1, n_2) - \frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}\max(n_1, n_2) - \frac{3}{2}} \frac{1}{(2j+1)^r}. \tag{57}$$

c) Dacă n_1 este par şi n_2 este impar

$$\mathcal{K}_r[z(n_1, n_2)] = (r-1)!\left[\left(T_r - \sum_{j=0}^{\frac{1}{2}(n_2-3)} \frac{1}{(2j+1)^r}\right) + \right.$$
$$\left. + \left(-\frac{1}{2}\right)^r\left(S_r - \sum_{j=1}^{\frac{n_1}{2}-1} \frac{1}{j^r}\right)\right] \quad \text{pentru } r \geqslant 2. \tag{58}$$

Scanned with OKEN Scanner

d) Dacă n_2 este par și n_1 este impar

$$\mathcal{K}_2[z(n_1, n_2)] = (r-1)!\left[\frac{1}{2^r}\left(S_r - \sum_{j=0}^{\frac{n_1}{2}-1}\frac{1}{j^r}\right) + \right.$$

(59)

$$\left. + (-1)^r\left(T_r - \sum_{j=0}^{\frac{1}{2}(n_1-3)}\frac{1}{(2j+1)^r}\right)\right] \qquad \text{pentru } r \geqslant 2.$$

TEOREMA 20. *Are loc relația*

$$\mathcal{K}_r[z(n_1, n_2)] = \frac{1}{2^r}\left[\mathcal{K}_2(\ln \chi^2(n_1)) + (-1)^r\, \mathcal{K}_r(\ln \chi^2(n_2))\right] \text{ pentru } r \geqslant 2. \tag{60}$$

Putem arăta că au loc următoarele aproximări:
a) Pentru valori mari ale gradelor de libertate n_1 și n_2 repartiția $z(n_1, n_2)$ poate fi aproximată printr-o repartiție

$$N(\delta, \sigma^2)$$

unde $\delta = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n_2} - \frac{1}{n_1}\right)$ și $\sigma^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)$.
Urmează că

$$z_\alpha(n_1, n_2) \simeq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n_2} - \frac{1}{n_1}\right) + u_\alpha\sqrt{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)} \quad \text{(Fisher, 1924)} \tag{61}$$

b) Aroian (1941), Fisher și Cornish (1960), Wishart (1957) folosind dezvoltarea Cornish-Fisher (1937) și formulele aproximative pentru comulanți, obțin

$$z_\alpha(n_1, n_2) \simeq u_\alpha\sigma + \frac{1}{3}\delta(u_\alpha^2 + 2) +$$

$$+\sigma\left\{\frac{\sigma^2}{12}(u_\alpha^3 + 3u_\alpha) + \frac{1}{36}\left(\frac{\delta}{\sigma}\right)^2(u_\alpha^3 + 11u_\alpha)\right\} + \frac{1}{30}\delta\sigma^2(u_\alpha^4 + 9u_\alpha^2 + 8) - \tag{62}$$

$$-\frac{1}{810}\cdot\frac{\delta^3}{\sigma^2}(3u_\alpha^4 + 7u_\alpha^2 - 16) + \cdots$$

Primii doi termeni din (62) pot fi scriși ca

$$\delta + u_\alpha\sigma + \frac{1}{3}\delta(u_\alpha^2 - 1) = \delta\left[1 + \frac{1}{3}(u_\alpha^2 - 1)\right] + u_\alpha\sigma.$$

Fisher (1924) sugerează aproximația

$$z_\alpha(n_1, n_2) \simeq \delta\left[1 + \frac{1}{3}(u_\alpha^2 - 1)\right] + u_\alpha\sigma(1 - \sigma^2)^{-\frac{1}{2}}. \tag{63}$$

Scanned with OKEN Scanner

c) Carter (1947) folosind expresiile lui Wishart pentru comulanți, arată că pentru valori mari ale gradelor de libertate n_1 și n_2

$$z_\alpha(n_1, n_2) \simeq \frac{u_\alpha\left[\frac{1}{6}u_\alpha^2 - \frac{1}{2} + 2(n_1-1)(n_2-1)\frac{1}{n_1+n_2-2}\right]^{1/2}}{2(n_1-1)(n_2-1)\frac{1}{n_1+n_2-2}} -$$

(64)

$$-\frac{1}{6}\left(\frac{1}{n_1-1} - \frac{1}{n_2-1}\right)\left(u_\alpha^2 + 2 - \frac{2(n_1+n_2-2)}{(n_1-1)(n_2-1)}\right).$$

d) Ținînd seama de teorema 5 urmează că $\sqrt[3]{F(n_1, n_2)}$ este repartizată aproximativ ca

(65)

$$\frac{1 - \frac{2}{9n_1} + U_1\sqrt{\frac{2}{9n_1}}}{1 - \frac{2}{9n_2} + U_2\sqrt{\frac{2}{9n_2}}},$$

unde U_1 și U_2 sînt variabile aleatoare independente repartizate $N(0, 1)$.

e) Ținînd seama de teorema 4, obținem

(66)

$$\left[1 - \frac{1}{2n_1}\sqrt{F(n_1, n_2)} - \sqrt{1 - \frac{1}{2n_2}}\right]\left[\frac{1}{2n_2}F(n_1, n_2) + \frac{1}{2n_1}\right]^{-\frac{1}{2}}$$

este repartizată N (0,1).

f) Aroian (1942) arată că pentru n_1 și n_2 mari

(67)

$$z\frac{\sqrt{2(n_1+n_2-1)n_1n_2}}{n_1+n_2}$$

este repartizată aproximativ $t(n_1 + n_2 - 1)$.

De asemenea arată că

(68)

$$P\left[z\frac{\sqrt{2(n_1+n_2-1)}}{n_1+n_2} > t_{1-\alpha}(n_1+n_2-1)\right] \simeq$$

$$\simeq \alpha\sqrt{\frac{n_1+n_2-1}{n_1+n_2}}\exp\left[\frac{1}{6}\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right) - \frac{5}{12}(n_1+n_2-1)^{-1}\right].$$

§ 5. Repartiția χ^2 necentrată

DEFINIȚIA 10. Repartiția variabilei aleatoare

(69)

$$\sum_1^n (U_j + \delta_j)^2,$$

Scanned with OKEN Scanner

unde : — $U_1, U_2, \ldots, U_n$ sînt variabilele aleatoare independente, repartizate $N(0,1)$

— $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$ sînt constante,

poartă numele de repartiţia χ^2 necentrată cu parametrul de necentricitate $\lambda = \sum_1^n \delta_j^2$.

Pentru uşurinţa scrierii vom nota această repartiţie prin $\chi^2(n; \lambda)$.

Observaţii. i) Repartiţia variabilei (69) depinde de $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$ numai împreună cu $\sum_1^n \delta_j^2$.

ii) Pentru $\lambda = 0$, $\chi^2(n, \lambda)$ devine $\chi^2(n)$.

iii) Adeseori se consideră drept parametru de necentricitate $\sqrt{\lambda}$ sau $\frac{1}{2}\lambda$.

Proprietăţile repartiţiei χ^2 necentrate sînt sintetizate în

TEOREMA 21. *Densitatea de repartiţie corespunzătoare repartiţiei* $\chi^2(n; \lambda)$ *este*

$$p_{\chi^2(n;\lambda)}(x) = \frac{\exp\left[-\frac{1}{2}(x+\lambda)\right]}{2^{\frac{n}{2}}} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(x)^{\frac{n}{2}+j-1}\lambda^j}{\Gamma\left(\frac{1}{2}n+j\right)2^{2j}j!}. \tag{70}$$

Demonstraţie. Van der Vaart (1967) obţine pentru funcţia generatoare de momente a variabilei (69)

$$M(n; t, \lambda) = M\left\{\exp\left[\sum_1^n t(U_j+\delta_j)^2\right]\right\} = \prod_1^n M\{\exp[t(U_j+\delta_j)^2]\} =$$

$$= \prod_1^n \left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{1}{2}u^2 + t(u+\delta_j)^2\right]\right\} du =$$

$$= \prod_1^n \{(1-2t)^{-\frac{1}{2}} \exp[-t\delta_j^2(1-2t)^{-1}]\} =$$

$$= (1-2t)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{\lambda}{2}} \exp\left[\frac{1}{2}\lambda(1-2t)^{-1}\right]$$

sau

$$M(n; t, \lambda) = e^{-\frac{\lambda}{2}} \sum_0^{\infty} \left(\frac{1}{2}\lambda\right)^j (1-2t)^{-\frac{1}{2}(n+2j)} \frac{1}{j!}.$$

Deoarece $(1-2t)^{-\frac{1}{2}(n+2j)}$ este funcţia generatoare de momente a unei variabile $\chi^2(n+2j)$, rezultă (70).

Scanned with OKEN Scanner

Observaţii. i) Densitatea de repartiţie a variabilei $\chi^2(n\,;\,\lambda)$ se exprimă ca o mixtură de densităţi de variabile χ^2 centrate.

$$p_{\chi^2(n;\,\lambda)}(x) = \sum_0^\infty \frac{\left(\frac{\lambda}{2}\right)^j}{j!} e^{-\frac{1}{2}\lambda}\, p_{\chi^2(n+2j)}(x) \tag{71}$$

ii) Densitatea de repartiţie a variabilei $\chi^2\ (n\,;\lambda)$ a fost obţinută de
— Fisher (1928), ca un proces limită
— Tang (1938), care dă o demonstraţie directă
— Patnaik (1949), Ruben (1960) şi Guenther (1964) geometrie.

Densitatea de repartiţie a variabilei $\chi^2\ (n\,;\ \lambda)$ se mai poate obţine printr-un proces de inducţie.

TEOREMA 22. (Tiku (1965)). *Densitatea de repartiţie a variabilei* $\chi^2(n, \lambda)$ *este*

$$p_{\chi^2(n;\,\lambda)}(x) = \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}x} \left(\frac{1}{2}x\right)^{\frac{1}{2}n-1} \sum_0^\infty \frac{\left(-\frac{1}{2}\lambda\right)^j}{\Gamma\left(\frac{1}{2}n+j\right)} L_j^{\left(\frac{1}{2}n-1\right)}\left(\frac{1}{2}x\right), \quad (x>0), \tag{72}$$

unde

$$L_j^{(m)}(x) = \sum_0^j \frac{(-x)^i}{i!\,(j-i)!} \cdot \frac{\Gamma(j+m+1)}{\Gamma(i+m+1)} \quad (m > -1) \tag{73}$$

sînt polinoamele Laguerre generalizate.

Funcţia de repartiţie a variabilei $\chi^2(n\,;\ \lambda)$

$$F(x\,;\,n,\,\lambda) = P[\chi^2(n\,;\,\lambda) \leqslant x] =$$

$$= e^{-\frac{1}{2}\lambda} \sum_0^\infty \frac{\left(\frac{1}{2}\lambda\right)^j}{j!} \frac{1}{2^{\frac{1}{2}n+j}\Gamma\left(\frac{1}{2}n+j\right)} \int_0^x y^{\frac{1}{2}n+j-1} e^{-\frac{1}{2}y}\, dy, \qquad x>0 \tag{74}$$

poate fi exprimată ca o sumă ponderată de probabilităţi de χ^2 centrate cu ponderile egale cu probabilităţile unei variabile $\mathrm{Po}\left(\frac{1}{2}\lambda\right)$, adică

$$F(x\,;\,n,\,\lambda) = \sum_0^\infty \left[\frac{\left(\frac{1}{2}\lambda\right)^j}{j!} e^{-\frac{1}{2}\lambda}\right] P[\chi^2(n+2j) \leqslant x]. \tag{75}$$

Scanned with OKEN Scanner

De asemenea, are loc

TEOREMA 23. (Fisher (1928), Johnson (1959)). *Dacă n este par, atunci*

$$P[\chi^2(n\,;\,\lambda) \leqslant x] = P\left[P_0\left(\frac{1}{2}x\right) - P_0\left(\frac{1}{2}\lambda\right) \geqslant \frac{1}{2}n\right] \tag{76}$$

unde variabilele $P_0\left(\frac{1}{2}x\right)$ *și* $P_0\left(\frac{1}{2}\lambda\right)$ *sînt independente.*

TEOREMA 24. *Funcția caracteristică a variabilei* $\chi^2(n\,;\,\lambda)$ *este*

$$(1 - 2it)^{-\frac{1}{2}n} \exp\left(\frac{it\lambda}{1 - 2\,it}\right). \tag{77}$$

TEOREMA 25. *Funcția generatoare de cumulanți a variabilei* $\chi^2\,(n\,;\,\lambda)$ *este*

$$\mathcal{K}(n\,;\,\theta, \lambda) = \ln M(n\,;\,\theta, \lambda) = -\frac{1}{2}n\ln(1 - 2\theta) + \lambda\theta(1 - 2\theta)^{-1}. \tag{78}$$

TEOREMA 26. *Cumulantul de ordinul r al variabilei* $\chi^2(n\,;\,\lambda)$ *este*

$$\mathcal{K}_r = 2^{r-1}(r - 1)!\,(n + r\lambda). \tag{79}$$

Urmează că

$$\begin{cases} \mathcal{K}_1 = n + \lambda & = M[\chi^2(n,\ \lambda)], \\ \mathcal{K}_2 = 2(n + 2\lambda) & = D^2[\chi^2(n,\ \lambda)], \\ \mathcal{K}_3 = 8(n + 3\lambda) & = \mu_3[\chi^2(n,\ \lambda)], \\ \mathcal{K}_4 = 48(n + 4\lambda), \end{cases} \tag{80}$$

$$\mu_4[\chi^2(n,\ \lambda)] = \mathcal{K}_4 + 3\mathcal{K}_2^2 = 48(n + 4\lambda) + 12(n + 2\lambda)^2, \tag{81}$$

$$\gamma_1 = \sqrt{\beta_1} = \sqrt{8}(n + 3\lambda)/(n + 2\lambda)^{3/2} \tag{82}$$

$$\gamma_2 = \beta_2 - 3 = 12(n + 4\lambda)/(n + 2\lambda)^2. \tag{83}$$

TEOREMA 27. *Dacă* $\chi^2(n_1,\ \lambda_1)$ *și* $\chi^2(n_2,\ \lambda_2)$ *sînt independente atunci* $\chi^2(n_1,\ \lambda_1) + \chi^2(n_2,\ \lambda_2)$ *este o variabilă* $\chi^2(n_1 + n_2,\ \lambda_1 + \lambda_2)$.

TEOREMA 28. *Dacă Y este o variabilă* $\chi^2(n,\ \lambda)$ *și*

$$Y = Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_n$$

Scanned with OKEN Scanner

unde $Y_1, \ldots, Y_n$ *sînt variabile aleatoare independente şi identic repartizate atunci* Y_j *este o variabilă* $\chi^2\left(1, \frac{\lambda}{n}\right)$.

Observaţie. Mc. Notly (1962) demonstrează teorema pentru $n = 2$.

PROPOZIŢIA 6. *Pentru variabila* $\chi^2(n\,;\,\lambda)$ *şi orice* x *fixat*

$$\lim_{n\to\infty} F(x\,;\ n,\ \lambda) = \lim_{\lambda\to\infty} F(x\,;\ n,\ \lambda) = 0.$$

TEOREMA 29. *Avem*

$$\lim_{\substack{n\to\infty,\ \lambda \text{ fixat} \\ \text{sau} \\ \lambda\to\infty,\ n \text{ fixat}}} P\left[\frac{\chi^2(n\,;\ \lambda) - (n+\lambda)}{\sqrt{2(n+2\lambda)}} < x\right] = \Phi(x)$$

PROPOZIŢIA 7. *Modulul variabilei* $\chi^2(n,\ \lambda)$ *este acea valoare care satisface ecuaţia :*

$$p_{\chi^2(n,\ \lambda)}(x) = p_{\chi^2(n-2,\ \lambda)}(x).$$

În cele ce urmează prezentăm cîteva dintre numeroasele aproximări ce privesc repartiţia $\chi^2(n,\ \lambda)$.

Patnaik (1949) înlocuieşte $\chi^2(n,\ \lambda)$ prin $c\chi^2(f) + b$ şi alege b, c şi f astfel încît primele trei momente ale repartiţiilor $\chi^2(n,\ \lambda)$ şi $c\chi^2(f) + b$ să coincidă. Obţine pentru b, c şi f următoarele valori

$$b = -\frac{\lambda^2}{n+3\lambda}$$

$$c = \frac{n+3\lambda}{n+2\lambda}$$

$$f = \frac{(n+2\lambda)^3}{(n+3\lambda)^2} = n + \frac{\lambda^2(3n+8\lambda)}{(n+3\lambda)^2}.$$

Folosind teorema 5 obţinem

TEOREMA 30. (Abdel-Aty (1954). *Variabila aleatoare*

(84) $$\left(\frac{\chi^2(n,\ \lambda)}{n+\lambda}\right)^{\frac{1}{3}}$$

este repartizată, aproximativ, normal de medie $1 - \frac{2(n+2\lambda)}{9(n+\lambda)}$ *şi dispersie* $\frac{2(n+2\lambda)}{n+\lambda}$.

TEOREMA 31 (Sankaran (1959), (1963)). *Variabila aleatoare*

(85) $$\sqrt{\chi^2(n,\ \lambda) - \frac{1}{2}(n-1)}$$

Scanned with OKEN Scanner

este repartizată, aproximativ,

$$N\left[\sqrt{1+\frac{1}{2}(n-1)},\ 1\right];$$

$$\sqrt{\left[\chi^2(n,\ \lambda)-\frac{1}{3}(n-1)\right]/(n+\lambda)} \tag{86}$$

este repartizată, aproximativ,

$$N\left[\sqrt{1-\frac{n-1}{3(n+\lambda)}},\quad \frac{1}{n+\lambda}\right];$$

$$\left(\frac{\chi^2(n,\ \lambda)}{n+\lambda}\right)^h \tag{87}$$

este repartizată, aproximativ, normal de valoare medie

$$1+h(h-1)\frac{n+2\lambda}{(n+\lambda)^2}-h(h-1)(2-h)(1-3h)\ \frac{(n+2\lambda)^2}{2(n+\lambda)^4}$$

și dispersie

$$h^2\ \frac{2(n+2\lambda)}{(n+\lambda)^2}\left[1-(1-h)(1-3h)\frac{n+2\lambda}{(n+\lambda)^2}\right],$$

unde

$$h=1-\frac{2}{3}(n+\lambda)(n+3\lambda)(n+2\lambda)^{-2}.$$

Observații. i) (85) nu este bună pentru valori mici ale lui λ.
ii) (87) este de o mare acurateţe pentru toţi λ însă este complicată.

TEOREMA 32. *Pentru repartiţie* $\chi^2(n,\ \lambda)$

$$F(x;\ n,\ \lambda)\simeq\Phi\left(\frac{x-n-\lambda}{\sqrt{2(n+2\lambda)}}\right) \tag{88}$$

eroarea, pentru $\lambda\to\infty$, *fiind* $0\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right)$, *uniform în* x.

Aplicînd aproximaţia normală pentru membrul drept al relaţiei (76), obţinem

TEOREMA 33 (Johnson (1959)). *Pentru repartiţia* $\chi^2(n,\ \lambda)$

$$F(x;\ n,\ \lambda)\simeq\Phi\left(\frac{x-n-\lambda+1}{(2(n+2\lambda))^{-\frac{1}{2}}}\right) \tag{89}$$

eroarea, pentru $\lambda\to\infty$, *fiind* $0\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right)$, *uniform în* x.

Scanned with OKEN Scanner

Importanţa repartiţiei χ^2 necentrate rezultă din

TEOREMA 34. *Dacă $X_1, \ldots, X_n$ sînt variabile aleatoare independente, X_j repartizate $N(\mu_j, \sigma^2)$ $1 \leqslant j \leqslant n$ atunci*

$$S = \sum_1^n (X_i - \bar{X}_n) \sim \sigma^2 \chi^2 \left[n-1, \sum_1^n \left(\frac{\mu_j - \bar{\mu}_n}{\sigma} \right)^2 \right]. \tag{90}$$

§ 6. Repartiţia F necentrată

DEFINIŢIA 11. Repartiţia variabilei aleatoare

$$\frac{\chi^2(n_1, \lambda_1)}{n_1} : \frac{\chi^2(n_2, \lambda_2)}{n_2} \tag{91}$$

poartă numele de repartiţie F dublu necentrată cu n_1, n_2 grade de libertate şi parametrii de necentricitate λ_1, λ_2.

Vom folosi notaţia $F(n_1, n_2; \lambda_1, \lambda_2)$ pentru a reprezenta o variabilă aleatoare avînd această repartiţie.

DEFINIŢIA 12. Repartiţia variabilei aleatoare

$$\frac{\chi^2(n_1, \lambda_1)}{n_1} : \frac{\chi^2(n_2)}{n_2} \tag{92}$$

poartă numele de repartiţia F necentrată cu n_1, n_2 grade de libertate şi parametru de necentricitate λ_1.

Vom folosi notaţia $F(n_1, n_2; \lambda_1)$ pentru a reprezenta o variabilă aleatoare avînd această repartiţie.

În definiţiile 11 şi 12 variabilele χ^2 ce apar sînt independente.

Avem

$$F(n_1, n_2; 0, \lambda_2) = [F(n_2, n_1, \lambda_2)]^{-1}. \tag{93}$$

Repartiţia F necentrată este folosită în calcularea funcţiilor de putere a testelor privind ipotezele liniare, de asemenea este folosită în teoria comunicaţiilor.

Proprietăţile repartiţiei F necentrate sînt sintetizate în teoremele

TEOREMA 35. *Densitatea de repartiţie a variabilei $F(n_1, n_2; \lambda_1)$ este*

$$p_{F(n_1, n_2; \lambda_1)}(f) = p_{F(n_1, n_2)}(f) \cdot e^{-\frac{1}{2}\lambda_1} \sum_0^\infty \left(\left[\frac{\frac{1}{2}\lambda_1 n_1 f}{n_2 + n_1 f} \right]^j \times \right. \tag{94}$$

$$\left. \times \frac{(n_1 + n_2)(n_1 + n_2 + 2) \ldots [n_1 + n_2 + 2(j-1)]}{j!\, n_1 (n_1 + 2) \ldots [n_1 + 2(j-1)]} \right).$$

Scanned with OKEN Scanner

Demonstrație. Deoarece repartiția $\chi^2(n_1, \lambda_1)$ poate fi reprezentată ca o mixtură de repartiții $\chi^2(n_1 + 2j)$ în proporții $e^{-\frac{1}{2}\lambda_1}\left(\frac{1}{2}\lambda_1\right)^j/j!$ $(j = 0, 1, 2, \ldots)$ urmează că

$$G(n_1, n_2, \lambda_1) = \chi^2(n_1, \lambda_1) : \chi^2(n_2) \tag{95}$$

este repartizată ca o mixtură de repartiții $G(n_1, n_2)$ în proporții $e^{-\frac{1}{2}\lambda_1}\left(\frac{1}{2}\lambda_1\right)^j/j!$ $(j = 0, 1, 2, \ldots)$. Deci densitatea de repartiție a variabilei $G(n_1, n_2, \lambda_1)$ este

$$p_{G(n_1, n_2, \lambda_1)}(g) = \sum_0^\infty \left(\frac{\left[\frac{1}{2}\lambda_1\right]^j}{j!} e^{-\frac{1}{2}\lambda_1}\right) \frac{g^{\frac{1}{2}n_1+j-1}}{B\left(\frac{1}{2}n_1+j, \frac{1}{2}n_1\right)(1+g)^{\frac{1}{2}(n_1+n_2)+j}} =$$

$$= \frac{e^{-\frac{1}{2}\lambda_1}}{B\left(\frac{1}{2}n_1, \frac{1}{2}n_2\right)} \cdot \frac{g^{\frac{1}{2}n_1-1}}{(1+g)^{\frac{1}{2}(n_1+n_2)}} \sum \left[\frac{\frac{1}{2}\lambda_1 g}{1+g}\right]^j \times \tag{96}$$

$$\times \frac{(n_1+n_2)(n_1+n_2+2)\ldots[n_1+n_2+2(j-1)]}{j!\, n_1(n_1+2)\ldots[n_1+2(j-1)]}, \qquad g > 0.$$

Densitatea de repartiție a variabilei $F(n_1, n_2; \lambda_1) = \frac{n_2}{n_1} G(n_1, n_2; \lambda_1)$ este

$$p_{F(n_1, n_2; \lambda_1)}(f) = \frac{e^{-\frac{1}{2}\lambda_1} n_1^{\frac{1}{2}n_1} n_2^{\frac{1}{2}n_2}}{B\left(\frac{1}{2}n_1, \frac{1}{2}n_2\right)} \cdot \frac{f^{\frac{1}{2}n_1-1}}{(n_2+n_1 f)^{\frac{1}{2}(n_1+n_2)}} \times$$

$$\times \sum_0^\infty \left(\left[\frac{\frac{1}{2}\lambda_1 n_1 f}{n_2+n_1 f}\right]^j \cdot \frac{(n_1+n_2)(n_1+n_2+2)\ldots[n_1+n_2+2(j-1)]}{j!\, n_1(n_1+2)\ldots[n_1+2(j-1)]}\right)$$

și ținînd seama că

$$p_{F(n_1, n_2)}(f) = \frac{n_1^{\frac{1}{2}n_1} n_2^{\frac{1}{2}n_2}}{B\left(\frac{1}{2}n_1, \frac{1}{2}n_2\right)} \cdot \frac{f^{\frac{1}{2}n_1-1}}{(n_2+n_1 f)^{\frac{1}{2}(n_1+n_2)}}$$

rezultă (94).

Scanned with OKEN Scanner

Deoarece variabilele aleatoare care apar în (92) sînt independente

$$\mu'_r(F(n_1,\ n_2;\ \lambda_1)] = \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^r \mu'_r[\chi^2(n_1,\ \lambda_1)]\,\mu'_{-r}[\chi^2(n_2)] =$$

(97)

$$= \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^r \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}n_1 + r\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}n_2 - r\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}n_1\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}n_2\right)} \sum_0^r C_r^j \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}r\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}r_1 + j\right)} \left(\frac{1}{2}\lambda_1 n_1\right)^j.$$

Obţinem

$$M[F(n_1,\ n_2;\ \lambda_1)] = \frac{n_2(n_1+n_2)}{n_1(n_2-2)}, \qquad (n_2 > 2) \tag{98}$$

$$D^2[F(n_1,\ n_2;\ \lambda_1)] = 2\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 \frac{(n_1+\lambda_1)^2 + (n_1+2\lambda_1)(n_2-2)}{(n_2-2)^2(n_2-4)}, \qquad (n_2 > 4) \tag{99}$$

şi

$$\mu_3[F(n_1,\ n_2;\ \lambda_1)] = \frac{4}{(n_2-4)(n_2-6)} \times$$

$$\times\left[4\left(\frac{n_1+\lambda_1}{n_2-2}\right)^3 + \frac{6(n_1+\lambda_1)(n_2+2\lambda_1)}{(n_2-2)^2} + \frac{2(n_1+3\lambda_1)}{n_2-2}\right], \qquad (n_2 > 6) \tag{100}$$

TEOREMA 36. i) *Funcţia caracteristică a variabilelor* $F(n_1,\ n_2;\ \lambda_1)$ *este*

$$\sum_0^\infty \left[\left(\frac{\lambda_1}{2}\right)^j / j!\right] e^{-\frac{1}{2}\lambda_1}\ M\left(\frac{n_1}{2} + j;\ -\frac{n_2}{2},\ -\frac{n_2}{n_1}it\right). \tag{101}$$

ii) *Funcţia de repartiţie a variabilei* $F(n_1,\ n_2;\ \lambda_1)$ *este*

$$P[F(n_1, n_2;\ \lambda_1) \leqslant f_0] = P\left[G(n_1,\ n_2;\ \lambda_1) \leqslant \frac{n_1}{n_2} f_0\right] =$$

(102)

$$= \sum_0^\infty \left(\frac{\left[\frac{1}{2}\lambda_1\right]^j}{j!} e^{-\frac{1}{2}\lambda_1}\right) \cdot I_{n_1 f_0/(n_1+n_1 f_0)}\left(\frac{1}{2}n_1 + j;\ \frac{1}{2}n_2\right).$$

Scanned with OKEN Scanner

Observaţii. i) Dacă n_2 este par

$$P[F(n_1, n_2; \lambda_1) \leqslant f_0] = e^{-\frac{1}{2}\lambda_1(1-Y)} \sum_0^{\frac{1}{2}n_2-1} \frac{\left[\frac{1}{2}\lambda_1(1-Y)\right]^i}{i!} \times$$

(103)

$$\times I_Y\left(\frac{1}{2}n_1 + i;\ \frac{1}{2}n_2 - i\right)$$

unde $Y = n_1 f_0/(n_2 + n_1 f_0)$.

ii) Seber (1963) înlocuieşte $I_Y\left(\frac{1}{2}n_1 + i,\ \frac{1}{2}n_2 - i\right)$ printr-un polinom şi obţine (n_2 — par).

$$Y^{\frac{1}{2}n_1}\left\{\exp\left[-\frac{1}{2}\lambda_1(1-Y)\right]\right\} \times$$

(104)

$$\times \sum_0^{\frac{1}{2}n_2-1} (1-Y)^i \sum_{j=0}^{i} \left\{ C_{i+\frac{1}{2}n_1-1}^{i-j} \left[\frac{1}{2}\lambda_1 Y\right]^j / j! \right\} =$$

$$= Y^{\frac{1}{2}n_1}\left\{\exp\left[-\frac{1}{2}\lambda_1(1-Y)\right]\right\} \sum_0^{\frac{1}{2}n_2-1} T_i,$$

unde

$$T_{-1} = 0, \qquad T_0 = 1$$

şi

$$T_i = \frac{1}{i}(1-Y)\left\{\left(2i - 2 + \frac{1}{2}n_1 + \frac{1}{2}n_1 Y\right) T_{i-1} - \right.$$

$$\left. - \left(i + \frac{1}{2}n_1 - 2\right)(1-Y)\, T_{i-2} \right\}, \qquad i = 1, 2, \ldots, \frac{1}{2}n_2 - 1.$$

iii) Wishart (1932) şi Thang (1938) obţin o expresie similară

(105)

$$Y^{\frac{1}{2}(n_1+n_2)-1}\, e^{-\frac{1}{2}\lambda_1(1-Y)} \sum_0^{\frac{1}{2}n_2-1} T_i',$$

unde

$$T_{-1}' = 0, \qquad T_0' = 1$$

şi

$$T_i' = \frac{1}{i}\left(\frac{1}{Y} - 1\right)\left\{\left[\frac{1}{2}(n_1 + n_2) - i + \frac{1}{2}\lambda_1 Y\right] T_{i-1}' + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}\lambda_1(1-Y)\, T_{i-2}' \right\}, \qquad i = 1, 2, \ldots, \frac{1}{2}n_2 - 1.$$

Scanned with OKEN Scanner

În cele ce urmează prezentăm cîteva din aproximările ce privesc repartiţia $F[n_1, n_2; \lambda_1]$.

Severo şi Zelen (1960) arată că

$$(106)\quad \frac{\left(1-\frac{2}{9}\frac{1}{n_2}\right)\left(\frac{n_1F(n_1, n_2; \lambda_1)}{n_1+\lambda_1}\right)^{\frac{1}{3}} - \left[1-\frac{2}{9}(n_1+2\lambda_1)(n_1+\lambda_1)^{-2}\right]}{\left[\frac{2}{9}(n_1+2\lambda_1)(n_1+\lambda_1)^{-2}+\frac{2}{9}\frac{1}{n_2}\left(\frac{n_1F(n_1, n_2; \lambda_1)}{n_1+\lambda_1}\right)^{\frac{2}{3}}\right]^{\frac{1}{2}}}$$

are aproximativ, o repartiţie $N(0, 1)$ (Folosesc aproximaţia lui Paulson).

Tiku (1966) ajustează repartiţia $F(n_1, n_2; \lambda_1)$ prin repartiţia

$$(107)\qquad b + cF(n_1', n_2),$$

unde b, c şi n_1' sînt alese astfel încît primele trei momente să coincidă. Obţine valorile

$$n_1' = \frac{1}{2}(n_2-2)\left[\sqrt{\frac{H^2}{H^2-4K^3}}-1\right]$$

$$c = (n_1'/n_1)(2n_1'+n_2-2)^{-1}(H/K)$$

$$b = -n_2(n_2-2)^{-1}\left(c-1-\lambda_1\frac{1}{n_1}\right),$$

unde

$$H = 2(n_1+\lambda_1)^3 + 3(n_1+\lambda_1)(n_1+2\lambda_1)(n_2-2) + (n_1+3\lambda_1)(n_2-2)^2$$

$$K = (n_1+\lambda_1)^2 + (n_2-2)(n_1+2\lambda_1).$$

De asemenea aproximaţia repartiţiei $\chi^2(n_1, \lambda_1)$ prin $c\chi^2(n)$, unde

$$c = (n_1+2\lambda_1)(n_1+\lambda_1)^{-1},\quad n = (n_1+\lambda_1)^2(n_1+2\lambda_1)^{-1}$$

dă o aproximaţie a repartiţiei $F(n_1, n_2; \lambda_1)$ prin

$$(108)\qquad (cn/n_1)F(n, n_2) = (1+\lambda_1 n_1^{-1})F(n_1 n_2).$$

Patnaik (1949) studiază precizia acestei aproximări.

TEOREMA 37. *Densitatea de repartiţie a variabilei aleatoare* $F(n_1, n_2; \lambda_1, \lambda_2)$ este

$$(109)\quad p_{F(n_1, n_2)}(f)\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\left[e^{-\frac{1}{2}\lambda_1}\left(\frac{\frac{1}{2}\lambda_1 n_1 f}{n_2+n_1 f}\right)^j/j!\right]\times$$

$$\times\left[e^{-\frac{1}{2}\lambda_2}\left(\frac{\frac{1}{2}\lambda_2 n_2}{n_2+n_1 f}\right)^k/k!\right]\frac{B\left(\frac{1}{2}n_1, \frac{1}{2}n_2\right)}{B\left(\frac{1}{2}n_1+j, \frac{1}{2}n_2+k\right)}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Demonstrație. Folosind reprezentarea fiecărei repartiții χ^2 necentrate ca o mixtură de repartiții χ^2 centrate, obținem că

$$G(n_1, n_2; \lambda_1, \lambda_2) = \chi^2(n_1, \lambda_1)/\chi^2(n_2, \lambda_2)$$

este repartizată ca o mixtură de repartiții $G(n_1 + 2j, n_2 + 2k)$ în proporții

$$\left[e^{-\frac{1}{2}\lambda_1} \left(\frac{1}{2}\lambda_1\right)^j /j! \right] \left[e^{-\frac{1}{2}\lambda_2} \left(\frac{1}{2}\lambda_2\right)^k /k! \right].$$

Deci densitatea de repartiție a variabilei $G(n_1, n_2; \lambda_1, \lambda_2)$ este

$$\sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \left[e^{-\frac{1}{2}\lambda_1} \left(\frac{1}{2}\lambda_1\right)^j /j! \right] \left[e^{-\frac{1}{2}\lambda_2} \left(\frac{1}{2}\lambda_2\right)^k /k! \right] \times$$

(110)

$$\times \frac{1}{B\left(\frac{1}{2}n_1 + j, \frac{1}{2}n_2 + k\right)} g^{\frac{1}{2}n_1 + j - 1} (1 + g)^{-\frac{1}{2}(n_1+n_2)-j-k}$$

iar a variabilei $F(n_1, n_2; \lambda_1, \lambda_2)$

$$\sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \left[e^{-\frac{1}{2}\lambda_1} \left(\frac{1}{2}\lambda_1\right)^j /j! \right] \left[e^{-\frac{1}{2}\lambda_2} \left(\frac{1}{2}\lambda_2\right)^k /k! \right] n_1^{\frac{1}{2}n_1 + j} n_2^{\frac{1}{2}n_2 + k} f^{\frac{1}{2}n_1 + j - 1} \times$$

(111)

$$\times (n_2 + n_1 f)^{-\frac{1}{2}(n_1+n_2)-j-k} \frac{1}{B\left(\frac{1}{2}n_1 + j, \frac{1}{2}n_2 + k\right)}$$

și ținînd seama de expresia densității de repartiție a variabilei $F(n_1, n_2)$ rezultă (109).

TEOREMA 38. (Johnson (1959)). *Dacă n_1 este par*

$$P\left[F(n_1, n_2 : \lambda_1) < \frac{f_0}{n_1}\right] = P\left[Y - Z \geqslant \frac{1}{2}n_1\right], \tag{112}$$

unde Y și Z sînt variabile aleatoare independente, Y are o repartiție binomială negativă cu parametrii $\frac{1}{2}n_1$, $\frac{f_0}{n_2}$ și Z o repartiție $P_0\left(\frac{1}{2}\lambda_1\right)$.

TEOREMA 39. *Dacă n_1 este par*

$$P\left[F(n_1, n_2; \lambda_1, \lambda_2) < \frac{f_0}{n_1}\right] = \sum_0^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\lambda_2} \frac{\left(\frac{1}{2}\lambda_2\right)^j}{j!} P\left[Y_j - Z \geqslant \frac{1}{2}n_1\right]. \tag{113}$$

Scanned with OKEN Scanner

unde Y_j *şi* Z *sînt variabilele aleatoare independente,* Y_j *are o repartiţie binomială negativă cu parametrii* $\frac{1}{n} n_2 + j, \frac{f_0}{n_2}$, *iar* Z *o repartiţie* $P_0\left(\frac{1}{2}\lambda_1\right)$.

Dacă repartiţia $\chi^2(n_2; \lambda_2)$ este aproximativă prin $c'\chi^2(n')$, cu

$$c' = (n_2 + 2\lambda_2)(n_2 + \lambda_2)^{-1} \text{ şi } n' = (n_2 + \lambda_2)^2 (n_2 + 2\lambda_2)^{-1},$$

atunci repartiţia $F(n_1, n_2; \lambda_1, \lambda_2)$ este aproximată prin

$$\left(\frac{n_2}{c'n'}\right) F(n_1, n'; \lambda_1) = (1 + \lambda_2 n_2^{-1})^{-1} F(n_1, n', \lambda_1). \tag{114}$$

Dacă atît numitorul cît şi numărătorul sînt aproximaţi, atunci $F(n_1, n_2; \lambda_1, \lambda_2)$ se aproximează prin

$$\frac{1 + \lambda_1 n_1^{-1}}{1 + \lambda_2 n_2^{-1}} F(n, n') \tag{115}$$

cu

$$n = (n_1 + \lambda_1)^2 (n_1 + 2\lambda_1)^{-1}, \quad n' = (n_2 + \lambda_2)^2 (n_2 + 2\lambda_2)^{-1}.$$

§ 7. Repartiţia t necentrată

DEFINIŢIA 13. Repartiţia raportului

$$t(n, \delta) = \frac{\sqrt{n}(U + \delta)}{\sqrt{\chi^2(n)}} = \frac{\sqrt{n}(U + \delta)}{\chi(n)}, \tag{116}$$

unde U şi $\chi^2(n)$ sînt variabile aleatoare independente, $U \sim N(0, 1)$ şi δ o constantă, poartă numele de repartiţia t necentrată cu n grade de libertate şi parametru de necentricitate δ.

Observaţii. i) Adeseori termenul de parametru de necentricitate se foloseşte pentru δ^2 sau chiar pentru $\frac{1}{2}\delta^2$.

ii) Dacă $\delta = 0$, repartiţia $t(n, \delta)$ se reduce la repartiţia $t(n)$.

TEOREMA 40. *Momentul de ordinul* r *al repartiţiei* $t(n, \delta)$ *este*

$$\mu'_r = n^{\frac{r}{2}} M(\chi^{-r}(n)) M[(U + \delta)^r] = \left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{r}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{n-r}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \sum_0^{r/2} C_{2j}^r \frac{(2j)!}{2^j j!} \delta^{r-2j}. \tag{117}$$

Scanned with OKEN Scanner

TEOREMA 41. (Hogben, Pinkham, Wilk (1961)). *Momentul de ordinul r al repartiției* $t(n, \delta)$ *este*

$$\mu'_r = \left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{r}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{n-r}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} e^{-\frac{1}{2}\delta^2} \frac{d^r}{d\delta^r} e^{\frac{1}{2}\delta^2}. \tag{118}$$

TEOREMA 42. (Merrington, Pearson (1958))

$$\mu'_1 = \left(\frac{n}{2}\right)^{1/2} \frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \delta; \tag{119}$$

$$D^2[t(n, \delta)] = \mu_2 = \frac{n}{n-2}(1 + \delta^2) - \mu'^2_1 \tag{120}$$

$$\mu_3 = \mu'_1\left[\frac{n(2n - 3 + \delta^2)}{(n-2)(n-3)} - 2\mu_2\right] \tag{121}$$

$$\mu_4 = \frac{n^2}{(n-2)(\quad -4)}(3 + 6\delta^2 + \delta^2) - \tag{122}$$

$$- \mu'^2_1\left\{\frac{n[(n+1)\delta^2 + 3(3n-5)]}{(n-2)(n-3)} - 3\mu_2\right\}.$$

Pentru valori mari ale lui n, δ fiind fixat

$$\mu'_1 \simeq \delta, \tag{119'}$$

$$D^2[t(n, \delta)] \simeq 1 + \frac{1}{2}\delta^2\frac{1}{n} \tag{120'}$$

$$\mu_3 \simeq \frac{1}{n}\delta\left(3 + \frac{5}{4}\delta^2\frac{1}{n}\right) \tag{121'}$$

$$\gamma_1 = \sqrt{\beta_1} \simeq \frac{1}{n}\delta\left(3 - \delta^2\frac{1}{n}\right). \tag{123}$$

Relația

$$P[t(n, \delta) \leqslant t] = P(U + \delta \leqslant t\,\chi(n)/\sqrt{n})$$

Scanned with OKEN Scanner

conduce la următoarea expresie pentru funcţia de repartiţie

$$P[t(n,\ \delta) \leqslant t] =$$

(124)

$$= \frac{1}{2^{\frac{n}{2}-1}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \int_0^\infty x^{n-1} e^{-\frac{1}{2}x^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{tx/\sqrt{n}} \exp\left[-\frac{1}{2}(u-\delta)^2\right] du\, dx.$$

Densitatea de repartiţie a variabilei $t(n,\ \delta)$ se obţine derivînd (124) în raport cu t

$$p_{t(n,\ \delta)}(t) = \frac{e^{-\frac{1}{2}\delta^2}}{2^{(n-1)/2}\sqrt{\pi n}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \int_0^\infty x^n \exp\left[-\frac{1}{2}\left\{\left(1+\frac{t^2}{n}\right)x^2 - \right.\right.$$

$$\left.\left. - 2(t\sqrt{n})\,x\right\}\right] dx = \frac{n!}{2^{(n-1)/2}\sqrt{\pi n}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \left\{\exp\left[-\frac{n\delta^2}{n+t^2}\right]\right\} \times$$

$$\times \left(\frac{n}{n+t^2}\right)^{(n+1)/2} Hh_n\left[-\frac{\delta t}{\sqrt{n+t^2}}\right]$$

unde

$$Hh_n(x) = \frac{1}{n!}\int_0^\infty v^n \exp\left[-\frac{1}{2}(v+x)^2\right] dv \qquad \text{(Fisher (1931))}$$

Observaţie. Avem

(126)

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, Hh_\nu(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^\infty \int_{u_\nu}^\infty \dots \int_{u_3}^\infty \int_{u_2}^\infty e^{-\frac{1}{2}u_1^2}\, du_1 du_2 \dots du_\nu.$$

O altă formă a densităţii de repartiţie a variabilei $t(\nu,\ \delta)$ este

$$p_{t(n,\ \delta)}(t) = \frac{e^{-\frac{1}{2}\delta^2}\,\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi\nu}\,\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \left(\frac{\nu}{\nu+t^2}\right)^{\frac{\nu+1}{2}} \times$$

(127)

$$\times \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+j+1}{2}\right)}{j!\,\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)} \left[\frac{t\delta\sqrt{2}}{\sqrt{\nu+t^2}}\right]^j$$

Scanned with OKEN Scanner

Observații. i) (127) este de forma

$$p_{t(n,\,\delta)}(t) = \sum_0^\infty c_j\,[\theta(t)]^j$$

unde c_j sînt constante și

$$\theta(t) = \frac{t\delta\sqrt{2}}{\sqrt{\nu + t^2}}.$$

Expresia $[\theta(t)]^0$ este interpretată ca 1, pentru toate valorile lui $\theta(t)$ (inclusiv 0).

ii) Dacă $\delta = 0$, $p_{t(n,\,\delta)}(t)$ se reduce la $p_{t(n)}(t)$.

iii) Dacă δ și t sînt de semne opuse, atunci termenii seriei alternează în semn.

iv) Seria din (127) poate fi evaluată în termenii de funcții beta incomplete. Dacă domeniul de integrare este $(0, t]$, $t > 0$, fiecare termen este pozitiv

$$P(0 < t(n,\ \delta) \leqslant t) = \frac{1}{2}\,e^{-\frac{1}{2}\delta^2} \sum_0^\infty \frac{\left(\frac{1}{2}\delta^2\right)^{\frac{1}{2}j}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}j+1\right)} I_{t^2/(n+t^2)}\left(\frac{1}{2}(j+1),\ \frac{1}{2}n\right). \tag{128}$$

Putem scrie

$$P(-t < t(n, \delta) \leqslant t) = P(t^2(n, \delta) \leqslant t^2)$$

și cum $t^2(n, \delta) \sim F(1, n; \delta)$ obținem

$$P(-t < t(n, \delta) \leqslant t) = e^{-\frac{1}{2}\delta^2} \sum_0^\infty \frac{\left(\frac{1}{2}\delta^2\right)^j}{j!} P\left[F(1+2j, n) < \frac{t^2}{1+2j}\right] = \tag{129}$$

$$= e^{-\frac{1}{2}\delta^2} \sum_0^\infty \frac{\left(\frac{1}{2}\delta^2\right)^j}{j!} I_{t^2/(n+t^2)}\left(j + \frac{1}{2},\ \frac{1}{2}n\right).$$

Avem

$$P[t(n;\ \delta) \leqslant 0] = P[U + \delta \leqslant 0] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-\delta} e^{-\frac{1}{2}x^2}\,dx. \tag{130}$$

Scanned with OKEN Scanner

Dacă n este par şi $t > 0$, $P[0 < t(n\,;\,\delta) < t]$ poate fi exprimată ca o sumă finită de termeni de funcţii Hh

$$P[0 < t(n\,;\,\delta) < t] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{n\delta^2}{2(n+t^2)}\right] \times$$

(131)

$$\times \sum_{0}^{\frac{1}{2}(n-2)} \frac{(2j)!}{2^j j!} \left[\frac{n}{2(n+t^2)}\right]^j Hh_{2j}\left[-\frac{\delta t}{\sqrt{n+t^2}}\right].$$

Amos (1964) exprimă funcţia de repartiţie a variabilei $t(n\,;\,\delta)$ în termeni de funcţii hipergeometrice confluente.

$$M(a,\ b\,;\ x) = \sum_{0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+j)\ \Gamma(b)}{\Gamma(a)\ \Gamma(b+j)} \cdot \frac{x^j}{j!}.$$

(b nu poate fi zero sau întreg negativ).

Pentru $n > 2$, această formulă este

$$P[t(n\,;\,\delta) \leqslant t] = 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\delta n^{1/2}/(n+t^2)^{1/2}} \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right] dx +$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left[\frac{t}{\sqrt{n+t^2}} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}(n+1)\right)}{\left(\frac{1}{2}n\right)} \times\right.$$

(132)

$$\times \sum_{0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(1-\frac{1}{2}n+j\right)}{j!\,(2j+1)\,\Gamma\left(1-\frac{1}{2}n\right)} \left(\frac{t^2}{n+t^2}\right)^j M\left(j+\frac{1}{2},\ \frac{1}{2};\ \frac{-\delta^2 n}{2(n+t^2)}\right) -$$

$$- \frac{\delta\sqrt{n}}{\sqrt{2}\,(n+t^2)} \sum_{0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}(1-n)+j\right)}{j!\,\Gamma\left(\frac{1}{2}(1-n)\right)} \left(\frac{t^2}{n+t^2}\right)^j M\left(j+\frac{1}{2};\ \frac{3}{2};\ \frac{-\delta^2 n}{2(n+t^2)}\right).$$

Observaţii. i) Dacă n este par, prima dintre cele două sume din (132) conţine numai un număr finit de termeni $\left(\frac{1}{2}n+1\right)$; dacă n este impar, a doua sumă conţine numai un număr finit de termeni $\left(\frac{1}{2}(n+3)\right)$.

Scanned with OKEN Scanner

Capitolul II

SELECȚIE

SELECȚIA DINTR-O POPULAȚIE INFINITĂ

§1. Populație statistică. Selecții

DEFINIȚIA 1. Din punct de vedere matematic populația statistică este o mulțime Ω înzestrată cu un σ — corp de părți $\mathcal{K}:\{\Omega, \mathcal{K}\}$.

DEFINIȚIA 2. Se numește selecție bernoulliană de volum n orice punct $\omega^{(n)}$ al mulțimii $\Omega^{(n)}$, unde

$$\Omega^{(n)} = \Omega \times \Omega \times \ldots \times \Omega,$$

iar $\{\Omega^{(n)}, \mathcal{K}^{(n)}\}$ este spațiul selecțiilor bernoulliene de volum n.

Dacă pe populația statistică $\{\Omega, \mathcal{K}\}$ vom presupune definită o probabilitate P, atunci pe spațiul selecțiilor bernoulliene de volum n $\{\Omega^{(n)}, \mathcal{K}^{(n)}\}$ probabilitatea considerată va fi $P^{(n)}$.

Din rațiuni matematice sîntem conduși la considerarea selecțiilor bernoulliene de volum infinit, dar numărabil.

DEFINIȚIA 3. Se numește selecție bernoulliană de volum infinit orice punct $\omega^{(\infty)}$ al mulțimii

$$\Omega^{(\infty)} = \prod_{j \in N^*} \Omega_j,$$

iar $\{\Omega^{(\infty)}, \mathcal{K}^{(\infty)}\}$ cu

$$\mathcal{K}^{(\infty)} = \prod_{j \in N^*} \mathcal{K}_j,$$

este spațiul selecțiilor bernoulliene de volum infinit.

Dacă pe $\{\Omega, \mathcal{K}\}$ există o probabilitate P atunci în cazul selecțiilor bernoulliene pe $\{\Omega^{(\infty)}, \mathcal{K}^{(\infty)}\}$ se va considera probabilitatea $P^{(\infty)}$.

În cele ce urmează vom considera că spațiul $\{\Omega^{(n)}, \mathcal{K}^{(n)}, P^{(n)}\}$ este scufundat în $\{\Omega^{\infty}, \mathcal{K}^{\infty} P^{\infty}\}$.

DEFINIȚIA 4. Se numește statistică definită pe populația $\{\Omega, \mathcal{K}\}$ orice aplicație măsurabilă

$$X : \Omega \to R,$$

Scanned with OKEN Scanner

adică cu proprietatea că

$$X^{-1}(A) \in \mathcal{K}$$

pentru orice $A \in \mathfrak{B}$ σ — corpul mulțimilor borelliene.

Deci o statistică este o variabilă aleatoare.

Fie X o statistică pe $\{\Omega, \mathcal{K}\}$ și $\{\Omega^{(n)}, \mathcal{K}^{(n)}\}$ spațiul selecțiilor bernoulliene de volum n. Pe $\Omega^{(n)}$ definim aplicațiile

$$\begin{aligned} X_1(\omega^{(n)}) &= X(\omega_1) \\ X_2(\omega^{(n)}) &= X(\omega_2) \\ &\vdots \\ X_n(\omega^{(n)}) &= X(\omega_n), \end{aligned}$$

unde $\omega^{(n)} = (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n)$.

TEOREMA 1. *Aplicațiile $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sînt variabile aleatoare pe spațiul $\{\Omega^{(n)}, \mathcal{K}^{(n)}\}$ al selecțiilor bernoulliene de volum n.*

Demonstrație. Fie $B \in \mathfrak{B}$, atunci oricare ar fi $i \in \{1, \ldots, n\}$ $X_i^{-1}(B) = \{\omega^{(n)}, X_i(\omega^{(n)}) \in B\} = \{\omega^{(n)}; X(\omega_i) \in B\} = \{\omega^{(n)}, \omega_i \in X^{-1}(B)\} = \Omega \times \ldots \times \Omega \times X^{-1}(B) \times \ldots \times \Omega \in \mathcal{K}^{(n)}$

DEFINIȚIA 5. Aplicațiile $X_1, X_2, \ldots, X_n$ se numesc variabile aleatoare de selecție bernoulliană ale statisticii X.

Dacă pe $\{\Omega, \mathcal{K}\}$ avem definită o probabilitate P, atunci are loc

TEOREMA 2. *Variabilele aleatoare de selecție X_i, $1 \leqslant i \leqslant n$ au aceeași funcție de repartiție ca X și sînt independente.*

Demonstrație. Fie $B \in (-\infty, x)$. Din teorema 1 obținem

$$X_i^{-1}(-\infty, x) = \Omega \times \ldots \times X^{-1}(-\infty, x) \times \ldots \times \Omega \in \mathcal{K}^n$$

iar din definiția funcției de repartiție și construcția probabilității $P^{(n)}$

$$\begin{aligned} P^{(n)}(X_i^{-1}(-\infty, x)) &= P^{(n)}(\Omega \times \ldots \times X^{-1}(-\infty, x) \times \ldots \times \Omega) = \\ &= P(\Omega) \ldots P(X^{-1}(-\infty, x)) \ldots P(\Omega) = P(X^{-1}(-\infty, x)) = F(x), \end{aligned}$$

unde $F(x)$ este funcția de repartiție a lui X. Deci toate variabilele au aceeași funcție de repartiție.

Fie $B_i \in \mathfrak{B}$, $1 \leqslant i \leqslant n$, atunci:

$$P^{(n)}\left(\bigcap_1 X_i^{-1}(B_i)\right) = P^{(n)}((\omega_1, \ldots, \omega_n) : X(\omega_1) \in B_1 \ldots, X(\omega_n) \in B_n) =$$

$$= \prod_1^n P(X(\omega_i) \in B_i) = \prod_1^n P(X_i^{-1}(B_i)),$$

ceea ce demonstrează teorema.

DEFINIȚIA 6. Se numește vector de selecție bernoullian de volum n al statisticii X definite pe populația statistică $\{\Omega, \mathcal{K}\}$ vectorul aleator definit pe $\{\Omega^{(n)}, \mathcal{K}^{(n)}\}$ cu valori în R^n prin

$$X(\omega^{(n)}) = (X_1(\omega^{(n)}), \ldots, X_n(\omega^{(n)})).$$

Scanned with OKEN Scanner

DEFINIȚIA 7. Se numesc valori de selecție bernoulliană de volum n ale statisticii X definită pe populația statistică $\{\Omega, \mathcal{K}\}$ componentele vectorului $X(\omega^{(n)})$ pentru fiecare $\omega^{(n)} \in \Omega^{(n)}$ fix.

Orice punct $(x_1, \ldots, x_n) \in X(\Omega^{(n)})$ este o valoare de selecție bernoulliană de volum n. Mulțimea valorilor de selecție constituie spațiul valorilor de selecție.

Pentru $\omega^{(n)} \in \Omega^{(n)}$ să presupunem că valorile de selecție sînt x_i, cu $x_i = X_i\ (\omega^{(n)})$.

DEFINIȚIA 8. Se numește funcție de repartiție de selecție de volum n funcția $F_n^* : R \times \Omega^n \to R$ astfel

$$F_n^*(x, \omega^{(n)}) = \frac{\text{card}\,\{x_i : x_i < x\}}{n}. \tag{1}$$

Observație $F_n^*(., \omega^{(n)})$ este o funcție nedescrescătoare.

TEOREMA 3. *Funcția de repartiție de selecție* $F_n^*(x, \omega^{(n)})$ *pentru fiecare* x *fix este o variabilă aleatoare pe* $\Omega^{(n)}$ *care ia valorile* $\left(0, \frac{1}{n}, \ldots, \frac{k}{n}, \ldots \right.$ $\left. \ldots, \frac{n-1}{n}, 1\right)$ *cu probabilitățile*

$$P^{(n)}\left(F_n(x, \omega^{(n)}) = \frac{k}{n}\right) = C_n^k (F(x))^k\,[1 - F(x)]^{n-k} \tag{2}$$

Demonstrație. Se observă că

$$\left\{\omega^{(n)} : F_n^*(x, \omega^{(n)}) = \frac{k}{n}\right\} = \bigcup_{\substack{1 \leqslant i_1 \leqslant \ldots \leqslant i_k \leqslant n \\ 1 \leqslant j_1 \leqslant \ldots j_{n-k} < n}} [X_{i_1}^{-1}(-\infty, x) \cap \ldots$$

$$\ldots \cap X_{i_k}^{-1}(-\infty, x) \cap X_{j_1}^{-1}(x, \infty) \cap \ldots \cap X_{j_{n-k}}^{-1}(x, \infty)] \in \mathcal{K}^{(n)}$$

ceea ce ne arată că pentru x fixat $F_n^*(x, \omega^{(n)})$ este o variabilă aleatoare.

Evenimentele

$$A_1 = \{\omega^{(n)} : X_1(\omega^{(n)}) < x\},\ A_2 = \{\omega^{(n)} : X_2(\omega^{(n)}) < x\}, \ldots,$$
$$A_n = \{\omega^{(n)} : X_n(\omega^{(n)}) < x\}$$

sînt niște evenimente independente (datorită independenței variabilelor $X_1, X_2, \ldots, X_n$) și toate au aceeași probabilitate de realizare și anume $F(x)$.

$F_n^*(x, \omega^{(n)}) = \frac{k}{n}$ dacă și numai dacă dintre evenimentele $A_1, A_2, \ldots, A_n$ se realizează k, iar celelalte nu. Deoarece ne situăm în cazul repartiției binomiale teorema este demonstrată.

Să considerăm σ — corpul de probabilitate $\{\Omega^{(n)}, \mathcal{K}^{(n)}, P^{(n)}\}$ ca un sub σ — cîmp al cîmpului $\{\Omega^{(\infty)}, \mathcal{K}^{(\infty)}, P^{(\infty)}\}$; atunci vom putea scrie $F_n^*(x, \omega^{(\infty)})$ pentru $F_n^*(x, \omega^{(n)})$ cu observația că variabilele aleatoare $F_n^*(n, \omega^{(\infty)})$ depind

Scanned with OKEN Scanner

numai de primele n coordonate $\omega_1, \ldots, \omega_n$ ale punctului $\omega^\infty = \{\omega_1, \ldots, \omega_n, \omega_{n+1}, \ldots\}$.

TEOREMA 4. *Pentru fiecare $x \in R$, şirul de funcţii de repartiţie de selecţie $(F_n^*(x, \cdot))_{n \in N}$ converge aproape singur către $F(x)$.*

Demonstraţie. Pentru fiecare x fixat, $F_n^*(x, \omega^{(n)})$ reprezintă frecvenţa relativă în n probe independente a evenimentului $\{\omega : X(\omega) < x\}$.

Conform variantei tari a legii numerelor mari această frecvenţă relativă converge aproape sigur către probabilitatea evenimentului considerat şi anume $F(x)$.

Se demonstrează chiar mai mult şi anume uniformitatea acestei convergenţe.

TEOREMA 5. (V.I. Glivenko). *Dacă F este funcţia de repartiţie a statisticii X, iar F_n^* funcţia de repartiţie de selecţie corespunzătoare unei selecţii bernoulliene de volum n, atunci*

$$P^{(\infty)}(\{\omega^{(\infty)} \sup_{-\infty < x < \infty} |F_n^*(x; \omega^{(\infty)}) - F(x)| \to 0\}) = 1. \tag{3}$$

Demonstraţie. Fie x_{jk} cea mai mică valoare x astfel încît

$$F(x) \leqslant \frac{j}{k} \leqslant F(x + 0).$$

Deoarece frecvenţa evenimentului $\{\omega : X(\omega) < x\}$ este $F_n^*(x, \omega^{(\infty)})$ şi probabilitatea sa este $F(x_{jk})$ rezultă că dacă punem

$$A'_{jk} = \{\omega^{(\infty)} : F_n^*(x_{jk}, \omega^{(\infty)}) \to F(x_{jk})\},$$

atunci $P(A'_{jk}) = 1$.

Analog, frecvenţa evenimentului $\{\omega : X(\omega) \leqslant x\}$ este $F_n^*(x + 0, \omega^{(\infty)})$ şi probabilitatea sa $F(x_{jk} + 0)$. Punînd

$$A''_{jk} = \{\omega^{(\infty)} : F_n^*(x_{jk} + 0, \omega^{(\infty)}) \to F(x_{jk} + 0)\},$$

atunci $P(A''_{jk}) = 1$.

Fie $A_{jk} = A'_{jk} \cap A''_{jk}$ şi

$$A_k = \bigcap_{j=1}^{k} A_{jk} = [\sup_{1 \leqslant j \leqslant k} |F_n^*(x_{jk} + 0) - F(x_{jk} + 0)| \to 0].$$

Deoarece $P(A_{jk}) = 1$, $1 \leqslant j \leqslant k$, urmează că $P(A_k) = 1$.

Fie $A = \bigcap_{1}^{\infty} A_k$. Atunci $P(A) = 1$.

Pe de altă parte pentru fiecare $x \in R$ există întotdeauna x_{jk} şi x_{j+1k} astfel încît

$$x_{jk} < x \leqslant x_{j+1k}.$$

Avem

$$F(x_{jk} + 0) \leqslant F(x) \leqslant F(x_{j+1k})$$

$$F_n^*(x_{jk} + 0, \omega^{(\infty)}) \leqslant F_n^*(x, \omega^{(\infty)}) \leqslant F_n^*(x_{j+1k}, \omega^{(\infty)})$$

Scanned with OKEN Scanner

și în plus

$$0 \leqslant F(x_{j+1k}) - F(x_{jk} + 0) \leqslant \frac{1}{k}.$$

Deci

$$F_n^*(x,\ \omega^{(\infty)}) - F(x) \leqslant F_n^*(x_{j+1k},\ \omega^{(\infty)}) - F(x_{jk} + 0) \leqslant$$

$$\leqslant F_n^*(x_{j+1k},\ \omega^{(\infty)}) - F(x_{j+1k}) + \frac{1}{k},$$

și

$$F_n^*(x,\ \omega^{(\infty)}) - F(x) \geqslant F_n^*(x_{jk} + 0,\ \omega^{(\infty)}) - F(x_{j+1k}) \geqslant$$

$$\geqslant F_n^*(x_{jk} + 0,\ \omega^{(\infty)}) - F(x_{jk} + 0) - \frac{1}{k}.$$

Urmează că oricare ar fi x și k

$$|F_n^*(x,\ \omega^{(\infty)}) - F(x)| \leqslant \max_{1 \leqslant j \leqslant k} F_n^*(x_{jk} + 0,\ \omega^{(\infty)}) - F(x_{jk} + 0)| + \frac{1}{k}$$

și deci

$$\Delta_n = \sup_{-\infty < x < \infty} |F_n^*(x,\ \omega^{(\infty)}) - F(x)| \leqslant \max_{1 \leqslant j \leqslant k} |F_n^*(x_{jk} + 0,\ \omega^{(\infty)}) -$$

$$- F(x_{jk} + 0)| + \frac{1}{k}$$

Prin urmare pentru orice $\omega^{(\infty)} \in A$ avem și $\omega^{(\infty)} \in \{\Delta_n \to 0\}$.
Deci $A \subset \{\Delta_n \to 0\}$ și cum $P(A) = 1$, obținem $P(\Delta_n \to 0) = 1$.

§2. Caracteristici de selecție

DEFINIȚIA 9. Fiind dată statistica X, variabilele definite prin relațiile

(4) $$m_p'(X,\ \omega^{(n)}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i^p(\omega^{(n)})$$

(5) $$b_p(X,\ \omega^{(n)}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} |X_i(\omega^{(n)})|^p$$

(6) $$m_p(X,\ \omega^{(n)}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} [X_i(\omega^{(n)}) - m_1'(X,\ \omega^{(n)})]^p$$

se numesc momentul de ordinul p de selecție, momentul absolut de ordinul p de selecție și respectiv momentul central de ordinul p de selecție.

Scanned with OKEN Scanner

În particular, media de selecție este variabila aleatoare

$$m_1' = \bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_1^n X_i \tag{7}$$

iar dispersia de selecție variabilă aleatoare

$$m_2 = \frac{1}{n}\sum_1^n (X_i - \bar{X}_n)^2. \tag{8}$$

TEOREMA 6. *Valorile medii ale momentelor de selecție sînt egale cu momentele statisticii* X.

Demonstrație. Variabilele aleatoare de selecție avînd aceeași funcție de repartiție ca și X (teorema 2), obținem

$$M[m_p'(X,\ \omega^{(n)})] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n M[X_i^p(\omega^{(n)})] = \mu_p'. \tag{9}$$

Observație. $M(\bar{X}_n) = M(X) = \mu$

TEOREMA 7. *Avem*

$$nD^2[m_p'(X,\ .)] = \mu_{2p}' - (\mu_p')^2. \tag{10}$$

Demonstrație. Deoarece variabilele aleatoare de selecție sînt independente (teorema 2) urmează că

$$D^2[m_p'(X,\ \omega^{(n)})] = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^n D^2[X_i^p(\omega^{(n)})] = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^n \{M[X_i^{2p}(\omega^{(n)})] - M^2[X_i^p(\omega^{(n)})]\}.$$

Ținînd seama de teorema 6 și de teorema 2, teorema este demonstrată.

Observație. Pentru $p = 1$, obținem $D^2(\bar{X}_n) = \sigma^2/n$.

TEOREMA 8. *Dispersia de selecție are valoarea medie egală cu* $\frac{n-1}{n}\sigma^2$, *iar dispersia*

$$\frac{(n-1)^2}{n^3} M(X^4) - \frac{(n-1)(n-3)}{n^3}\sigma^4. \tag{11}$$

Demonstrație. Putem scrie

$$m_2 = \frac{1}{2}\sum_1^n [X_i^2 - 2X_i\bar{X}_n + \bar{X}_n^2] = \frac{1}{n}\sum_1^n X_i^2 - (\bar{X}_n)^2 =$$

$$= \frac{1}{n}\sum_1^n X_i^2 - \frac{1}{n^2}\sum_1^n X_i^2 - 2\frac{1}{n^2}\sum_{i\neq j} X_iX_j,$$

Scanned with OKEN Scanner

şi ţinînd seama că variabilele de selecţie sînt independente şi identic repartizate (teorema 2)

$$(12)\qquad M(m_2)=\frac{1}{n}nM(X^2)-\frac{1}{n^2}nM(X^2)-\frac{n-1}{n}M^2(X)=$$

$$=\frac{n-1}{n}[M(X^2)-M^2(X)]=\frac{n-1}{n}\sigma^2.$$

Pentru a determina dispersia variabilei m_2 vom calcula mai întîi $M(m_2^2)$. Observăm că

$$m_2^2=\left(\frac{1}{n}\sum_1^n(X_i-\bar{X}_n)^2\right)^2=\frac{1}{n^2}\left(\sum_1^n X_i^2-n(\bar{X}_n)^2\right)^2=$$

$$=\frac{1}{n^2}\left[\left(\sum_1^n X_i^2\right)^2-2n(\bar{X}_n)^2\sum_1^n X_i^2-n^2(\bar{X}_n)^4\right],$$

de unde

$$M(m_2^2)=\frac{1}{n^2}\left\{M\left[\left(\sum_1^n X_i^2\right)^2\right]-2n\,M\left[(\bar{X}_n)^2\sum_1^n X_i^2\right]+n^2M[(\bar{X}_n)^4]\right\}.$$

Deoarece variabilele de selecţie sînt independente şi identic repartizate (teorema 2) putem presupune că $M(X)=0$. Într-adevăr

$$m_2=\frac{1}{n}\sum_1^n(X_i-\bar{X}_n)^2=\frac{1}{n}\sum_1^n(X_i-\mu+\bar{X}_n+\mu)^2=\frac{1}{n}\sum_1^n(Z_i-\bar{Z}_n)^2$$

unde $Z_i=X_i-\mu$ au media zero, rezultatele obţinute exprimîndu-se în funcţie de momentele centrate.

Avem

$$\text{a)}\qquad M\left(\sum_1^n X_i^2\right)^2=M\left[\sum_1^n X_i^4+\sum_{i\neq j}X_i^2X_j^2\right]=$$

$$=\sum_1^n M(X_i^4)+\sum_{i\neq j}M(X_i^2)\,M(X_j^2)=nM(X^4)+n(n-1)\,M^2(X^2)=$$

$$=nM(X^4)+n(n-1)\,\sigma^4.$$

Scanned with OKEN Scanner

b) $$M\left(\bar{X}_n^2 \sum_1^n X_i^2\right) = \frac{1}{n^2} M\left(\sum_1^n X_j \sum_1^n X_k \sum_1^n X_i^2\right) =$$

$$= \frac{1}{n^2} M\left(\sum_1^n X_i^4 + \sum_{i\neq j} X_i^2 X_j^2 + \sum_{i\neq k} X_j X_k \sum_{\substack{i\neq j\\ i\neq k}} X_i^2\right) =$$

$$= \frac{1}{n^2}\left[\sum_1^n M(X_i^4) + \sum_{i\neq j} M(X_i^2)\, M(X_j^2) + \right.$$

$$\left. + \sum_{j\neq k} M(X_j)\, M(X_k) \sum_{\substack{i\neq j\\ i\neq k}} M(X_i^2)\right] =$$

$$= \frac{1}{n^2}\,[nM(X^4) + n(n-1)\, M^2(X^2) + 0] = \frac{1}{n^2}\,[nM(X^4) + n(n-1)\,\sigma^4].$$

c) $$M(\bar{X}_n)^4 = \frac{1}{n^4} M\left(\sum_1^n X_i \sum_1^n X_j \sum_1^n X_k \sum_1^n X_l\right) =$$

$$= \frac{1}{n^4} M\left[\sum_1^n X_i^2 + \sum_{i\neq k} X_i^2 X_k^2 \text{ (unde } i = j \neq k = l)\right.$$

$$+ \sum_{i\neq j} X_i^2 X_j^2 \text{ (unde } i = k \neq j = l) + \sum_{i\neq j} X_i^2 X_j^2 \text{ (unde } i = l \neq j = k)$$

$$\left. + \text{termeni conținînd variabila } X_i\right] =$$

$$= \frac{1}{n^4}\left[\sum_1^n M(X_i^4) + 3\sum_{i\neq j} M(X_i^2)\, M(X_j^2) + \text{temeni conținînd } M(X_i)\right] =$$

$$= \frac{1}{n^4}\,[nM(X^4) + 3n(n-1)\, M^2(X^2) + 0] = \frac{1}{n^4}\,[nM(X^4) + 3n(n-1)\,\sigma^4].$$

Urmează că

$$M(m_2^2) = \frac{1}{n^2}\,[nM(X^4) + n(n-1)\sigma^2] - \frac{2n}{n^2}\,[nM(X^4) + n(n-1)\,\sigma^4] +$$

$$+ \frac{n^2}{n^4}\,[nM(X^4) + 3n(n-1)\,\sigma^4] = \frac{(n-1)^2}{n^3}\, M(X^4) + \frac{(n-1)\,(n^2-2n+3)}{n^3}\,\sigma^4,$$

și cum $M(m_2) = \dfrac{n-1}{n}\,\sigma^2$, obținem :

$$D^2(m_2) = \frac{(n-1)^2}{n^3}\, M(X^4) + \frac{(n-1)\,(n^2-2n+3)}{n^3}\,\sigma^4 - \frac{(n-1)^2}{n^2}\,\sigma^4 =$$

$$= \frac{(n-1)^2}{n^3}\, M(X^4) - \frac{(n-1)\,(n-3)}{n^3}\,\sigma^4,$$

Scanned with OKEN Scanner

ceea ce demonstrează teorema.

Observație. Pentru statistica

$$S_n^2 = \frac{1}{n-1}\sum_1^n (X_i - \bar{X}_n)^2 \tag{13}$$

avem

$$M(S_n^2) = \frac{n}{n-1} M(m_2) = \frac{n}{n-1}\cdot\frac{n-1}{n}\sigma^2 = \sigma^2 \tag{14}$$

și

$$D^2(S_n^2) = \left(\frac{n}{n-1}\right)^2 D^2(m_2) = \frac{1}{n}\left[M(X^4) - \frac{n-3}{n-1}\sigma^4\right]. \tag{15}$$

Determinarea momentelor statisticii m_r dă naștere la calcule complicate. Pentru simplificarea calculelor vom presupune $\mu = 0$, ceea ce nu restrînge generalitatea întrucît m_r este invariant la o schimbare a originii.

TEOREMA 9. *Avem*

$$\operatorname{cov}(m_q', m_r') = \frac{1}{n}[M(X^{q+r}) - M(X^q)M(X^r)]. \tag{16}$$

Demonstrația rezultă din definiția covarianței și din teorema 6. Într-adevăr

$$\operatorname{cov}(m_q', m_r') = M\left\{\left[\frac{1}{n}\Sigma X_i^q - M(X^q)\right]\left[\frac{1}{n}\Sigma X_i^r - M(X^r)\right]\right\} =$$

$$= \frac{1}{n^2} M(\Sigma X_i^{q+r}) + \frac{1}{n^2}\sum_{j\neq k} M(X_j^q X_k^r) -$$

$$- \frac{1}{n} M(X^q)M(\Sigma X_i^r) - \frac{1}{n} M(X^r)M(\Sigma X_i^q) + M(X^q)M(X^r).$$

TEOREMA 10. *Cu excepția termenilor de ordin* $n^{-\frac{1}{2}}$ *avem*

a) $M(m_r) = M(X^r)$

b) $D^2(m_r) = \frac{1}{n}[M(X^{2r}) - M^2(X^r) + r^2 M(X^2)M^2(X^{r-1}) - 2rM(X^{r-1})M(X^{r+1})]$.

Demonstrație. Dacă presupune, că valoarea medie a variabilei X este zero și dacă neglijăm termenii de ordin $n^{-\frac{1}{2}}$, avem

$$M(m_r) = M\left[\frac{1}{n}\Sigma(X_i - \bar{X}_n)^r\right] = M\left[\frac{1}{n}\Sigma X_i^r - \frac{r}{n}\bar{X}_n \Sigma X_i^{r-1}\right] =$$

$$= \frac{1}{n} M\left[\left(1 - \frac{r}{n}\right)\Sigma X_i^r - \frac{r}{n}\sum_{j\neq k} X_j X_k^{r-1}\right] = \frac{1}{n} M(\Sigma X_i^r) -$$

$$- \frac{r}{n^2} M(\Sigma X_i^r) - \frac{r}{n}\sum_{j\neq k} M(X_j)M(X_k^{r-1}),$$

Scanned with OKEN Scanner

ceea ce demonstrează a).

Avem

$$D^2(m_r) = M(m_r^2) - M^2(X^r) = M\left\{\left[\Sigma X_i^r - \frac{r}{n}\Sigma X_j X_k^{r-1}\right]^2/n^2\right\} - M^2(X^r) =$$

$$= \frac{1}{n^2} M\left[\Sigma X_i^{2r} + \Sigma X_i^r X_k^r + \frac{r^2}{n^2}\Sigma X_j^2 X_k^{2(r-1)} + \frac{r^2}{n^2}\Sigma X_j^2 X_k^{r-1} X_l^{r-1} -\right.$$

$$\left. - 2\frac{r}{n}\Sigma X_j^{r+1} X_k^{r-1}\right] - M^2(X^r). \quad j \neq k \neq l$$

ceea ce demonstrează b).

Analog se demonstrează

TEOREMA 11. *Avem*

$$\text{(17)} \qquad \operatorname{cov}(m_p, m_q) = \frac{1}{n}(\mu_{p+q} - \mu_p\mu_q + pq\mu_2\mu_{p-1}\mu_{q-1} - p\mu_{p-1}\mu_{q-1} -$$

$$- q\mu_{p+1}\mu_{q-1}).$$

TEOREMA 12. *Dacă X are o repartiţie simetrică şi dacă r este par, atunci*

$$\operatorname{cov}(m_1', m_r) = 0$$

cu excepţia termenilor de ordinul n^{-1}

Demonstraţie. Avem

$$\operatorname{cov}(m_1', m_r) = \frac{1}{n^2} M\left\{\left[\Sigma X_i\left(\Sigma X_i^r - \frac{r}{n}\Sigma X_j X_k^{r-1}\right)\right]\right\} =$$

$$= \frac{1}{n^2} M\left[\Sigma X_i^{r+1} - \frac{r}{n}\Sigma X_j^2 X_k^{r-1}\right],$$

ceilalţi termeni anulîndu-se, deoarece ei conţin pe X la puterea întîi (am presupus $\mu' = 0$).

Urmează că

$$\operatorname{cov}(m_1', m_r) = \frac{1}{n}(\mu_{r+1} - r\mu_2\mu_{r-1})$$

şi cum r este par, μ_{r+1} şi μ_{r-1} vor fi momentele de ordin impar, care pentru o repartiţie simetrică sînt nule; teorema este demonstrată.

Pentru o repartiţie bidimensională, are loc

Scanned with OKEN Scanner

TEOREMA 13. *Avem*

$$D^2(m'_{r,s}) = \frac{1}{n}(\mu'_{2r,2s} - \mu'^2_{r,s}), \tag{18}$$

$$\operatorname{cov}(m'_{rs},\ m'_{uv}) = \frac{1}{n}(\mu'_{r+u,s+v} - \mu'_{r,s}\mu'_{u,v}), \tag{19}$$

$$D^2(m_{r,s}) = \frac{1}{n}(\mu_{2r,2s} - \mu^2_{r,s} + r^2\mu_{2,0}\mu^2_{r-1,s} + s^2\mu_{0,2}\mu^2_{r,s-1} + \tag{20}$$

$$+ 2rs\,\mu_{1,1}\mu_{r-1,s}\mu_{r,s-1} - 2r\mu_{r+1,s}\mu_{r-1,s} - 2s\mu_{r,s+1}\mu_{r,s-1})$$

$$\operatorname{cov}(m_{r,s},\ m_{u,v}) = \frac{1}{n}(\mu_{r+u,s+v} - \mu_{r,s}\mu_{u,v} + ru\mu_{2,0}\mu_{r-1,s}\mu_{u-1,s} +$$

$$+ sv\mu_{0,2}\mu_{r,s-1}\mu_{u,v-1} + rv\mu_{1,1}\mu_{r-1,s}\mu_{u,v-1} + su\mu_{1,1}\mu_{r,s-1}\mu_{u-1,v} -$$

$$- u\mu_{r+1,s}\mu_{u-1,s} - v\mu_{r,s+1}\mu_{u,v-1} - r\mu_{r-1,s}\mu_{u+1,v} - s\mu_{r,s-1}\mu_{u,v+1}).$$

§3. *k*-statistici

Metoda folosită în §2 pentru determinarea momentelor diferitelor statistici conduce la calcule algebrice greoaie şi expresii complicate, cu excepţia unor cazuri simple. Prin urmare este convenabil să sistematizăm metoda în termeni de funcţii simetrice, deoarece grupul statisticilor care sînt funcţii simetrice în variabilele de selecţie este cel mai cuprinzător.

DEFINIŢIA 10. Funcţiile simetrice sînt date de

$$[p_1^{\pi_1} p_2^{\pi_2} \dots p_s^{\pi_s}] = \Sigma X_i^{p_1} X_j^{p_1} \dots X_q^{p_2} X_r^{p_2} \dots X_u^{p_s} X_v^{p_s} \tag{22}$$

unde sînt π_1 indici p_1, indici p_2, ...

Exemplul 1

$$\Sigma X_i^3 X_j^2 X_k = [1\ 2\ 3]$$

$$\Sigma X_i^3 X_j^3 X_k = [1\ 3^2].$$

DEFINIŢIA 11. Funcţiile simetrice monomiale sînt date de

$$(p_1^{\pi_1} p_2^{\pi_2} \dots p_s^{\pi_s}) = [p_1^{\pi_1} p_2^{\pi_2} \dots p_s^{\pi_s}]/\{\pi_1!\,\pi_2!\,\dots\,\pi_s!\} \tag{23}$$

Funcţiile unitare sînt

$$u_r = (1^r) = \Sigma X_i X_j \dots X_l / r! \tag{24}$$

şi sumele de puteri

$$s_r = (r) = \Sigma\, X_i^r = [r]. \tag{25}$$

Scanned with OKEN Scanner

David şi Kendall (1949) dau tabele care conţin sumele de puteri în termeni de funcţii simetrice şi invers.

Din (22) rezultă

TEOREMA 14. $M[p_1^{\pi_1} p_2^{\pi_2} \dots p_s^{\pi_s}] =$

$$= n(n-1)\dots\left(n-\sum_1^s \pi_i + 1\right)(\mu'_{p_1})^{\pi_1}(\mu'_{p_2})^{\pi_2}\dots(\mu'_{p_s})^{\pi_s}. \tag{26}$$

Exemplul 2. Dispersia de selecţie în termeni de sume de puteri se scrie

$$m_2 = \frac{(2)}{n} - \frac{(1)^2}{n^2}.$$

Avem

$$(2) = [2]; \quad (1)^2 = [2] + [1^2].$$

Deci

$$m_2 = \frac{[2]}{n} - \frac{[2]+[1^2]}{n^2} = \frac{n-1}{n^2}[2] - \frac{1}{n^2}[1^2]. \tag{27}$$

Aplicînd media şi ţinînd seama de (26), obţinem

$$M(m_2) = \frac{n-1}{n^2} n\mu'_2 - \frac{1}{n^2} n(n-1)\mu'^2_1 = \frac{n-1}{n}\mu_2.$$

Statistica m_2 este independentă de originea de calcul şi momentele sale nu depind de μ'_1. Fără a pierde din generalitate luăm $\mu'_1 = 0$

Avem

$$m_2^2 = \frac{(2)^2}{n^2} - \frac{2(2)(1)^2}{n^3} + \frac{(1)^4}{n^4} \tag{28}$$

Din tabele găsim

$$(2)^2 = [4] + [2]^2$$

$$(2)(1)^2 = [4] + 2[31] + [2^2] + [2\,1^2]$$

$$(1)^4 = [4] + 4[31] + 3[2^2] + 6[2\,1^2] + [1^4].$$

Putem neglija acele funcţii simetrice ce conţin unitatea şi din (28) obţinem

$$m_2^2 = \frac{[4]+[2]^2}{n^2} - 2\frac{[4]+[2^2]}{n^3} + \frac{[4]+3[2^2]}{n^4} =$$

$$= \frac{(n-1)^2}{n^4}[4] + \frac{n^2-2n+3}{n^4}[2^2].$$

Scanned with OKEN Scanner

Urmează că

$$M(m_2) = \frac{(n-1)^2}{n^4}\mu_4 + \frac{(n-1)(n^2-2n+3)}{n^4}\mu_2^2. \tag{29}$$

şi deci

$$D^2(m_2^2) = \frac{(n-1)^2}{n^3}\mu_4 - \frac{(n-1)(n-3)}{n^3}\mu_2^2. \tag{30}$$

Observaţii. i) Am obţinut rezultatul teoremei 8, însă cu un volum de calcul mai mic

ii) Dacă în (30) ţinem seama că

$$\mathcal{K}_4 = \mu_4 - 3\mu_2^2, \quad \mathcal{K}_2 = \mu_2$$

obţinem

$$D^2(m_2) = \left(\frac{n-1}{n}\right)^2 \left\{\frac{\mathcal{K}_4}{n} + \frac{2\mathcal{K}_2^2}{n-1}\right\}.$$

Se obţine o simplificare a calculelor prin considerarea k-statisticilor.

DEFINIŢIA 12. (Fisher (1928)). Elementele familiei de statistici k_1, $k_2, \ldots, k_p, \ldots$ care se bucură de proprietăţile

i) statisticile familiei sînt funcţii simetrice de variabilele de selecţie

ii) valoarea medie a statisticii k_p este cumulantul de ordin p

$$Mk_p = \mathcal{K}_p, \tag{31}$$

poartă numele de k-statistici.

TEOREMA 15. *k_p este unic determinată.*

Demonstraţie. Presupunem că există două funcţii k_p şi k'_p care satisfac (31). Atunci

$$M(k_p - k'_p) = 0.$$

Dar $k_p - k'_p$ este de asemenea o funcţie simetrică şi prin urmare poate fi exprimată ca o sumă de termeni ΣX_i^p, $\Sigma X_i X_i^{p-1}, \ldots$ şi deci valoarea sa medie este o serie de termeni, fiecare dintre aceşti termeni fiind un produs de momente. Anularea acestei serii implică o relaţie între momente, care este posibilă numai pentru o formă particulară a repartiţiei variabilei asupra căreia s-a considerat selecţia. Deci $k_p - k'_p$ trebuie să fie identic nulă şi astfel $k_p = k'_p$, ceea ce demonstrează teorema.

TEOREMA 16. *k-statisticile, cu excepţia lui k_1, sînt independente faţă de originea măsurătorilor.*

Demonstraţie. Din teorema lui Taylor, obţinem

$$k_p(x_1 + h, x_2 + h, \ldots, x_n + h) =$$

$$= k_p(x_1, x_2, \ldots, x_n) + \frac{h}{1!}Dk_p(x_1, x_2, \ldots, x_n) + \frac{h^2}{2!}D^2k_p(x_1, x_2, \ldots, x_n) + \ldots \tag{32}$$

Scanned with OKEN Scanner

unde

$$D = \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2} + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_n}.$$

Dacă în (32) aplicăm media şi ţinem seama că $\mathcal{K}_p$ este independent faţă de originea măsurătorilor (cu excepţia lui $\mathcal{K}_1$), obţinem

$$\mathcal{K}_p = \mathcal{K}_p + \frac{h}{1!} M(Dk_p) + \ldots \tag{33}$$

Deoarece (33) este o identitate în h, $M(Dk_p)$ şi ceilalţi termeni din membrul drept se anulează. Aceasta implică

$$Dk_p = 0, \quad D^2k_p = 0, \ldots$$

şi deci din (32),

$$k_p(x_1 + h, \ldots, x_n + h) = k_p(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

ceea ce demonstrează teorema.

TEOREMA 17. *Avem*

$$k_p = \frac{p!\,\Sigma(-1)^{\rho-1}(\rho-1)!}{n^{[\rho]}} \sum \frac{X_1^{p_1} \ldots X_p^{p_s}}{(p_1!)^{\pi_1} \ldots (p_s!)^{\pi_s} \pi_1! \ldots \pi_s!} \tag{34}$$

unde

$$p_1\pi_1 + p_2\pi_2 + \ldots + p_s\pi_s = p \tag{35}$$

şi

$$\pi_1 + \pi_2 + \ldots + \pi_s = \rho. \tag{36}$$

Demonstraţie. Prin definiţie k_p este de ordinul p în variabilele de selecţie. Putem scrie

$$k_p = \Sigma\Sigma(X_1^{p_1}X_2^{p_2} \ldots X_{\pi_1}^{p_1}X_{\pi_1+1}^{p_2} \ldots X_{\pi_1+\pi_2}^{p_3} \ldots X_{\pi_1+\ldots+\pi_s}^{p_s})\, A(p_1^{\pi_1} \ldots p_s^{\pi_s}) \tag{37}$$

unde a doua sumă se extinde asupra tuturor modurilor de atribuire (incluzînd şi permutările) a $\pi_1 + \pi_2 + \ldots + \pi_s$ indici din n posibili şi prima sumă se extinde asupra tuturor partiţiilor numărului p, $(p_1^{\pi_1} p_2^{\pi_2} \ldots p_s^{\pi_s})$. $A(p_1^{\pi_1} \ldots p_s^{\pi_s})$ este un număr care depinde de partiţie. Aplicînd media în (37) obţinem

$$\mathcal{K}_p = \Sigma\{(\mu_{p_1}^{\pi_1}\mu_{p_2}^{\pi_2} \ldots \mu_{p_s}^{\pi_s})AB\}, \tag{38}$$

unde B este numărul modurilor de a alege ρ indici din n, şi prin urmare este egal cu $n(n-1)\ldots(n-\rho+1) = n^{[\rho]}$.

Scanned with OKEN Scanner

Avem

$$(39) \qquad \mathcal{K}_p = p\,!\,\Sigma\Sigma \left(\frac{\mu_{p_1}}{p_1\,!}\right)^{\pi_1} \cdots \left(\frac{\mu_{p_s}}{p_s\,!}\right)^{\pi_s} \frac{(-1)^{\rho-1}(\rho-1)\,!}{\pi_1\,!\,\ldots\,\pi_s\,!},$$

unde suma se extinde asupra tuturor partiţiilor supuse la condiţiile (35) şi (36).

Din (38) şi (39) prin identificarea termenilor corespunzători, găsim A şi dacă ţinem seama de acestea în (37) rezultă teorema.

§4. Repartiţia sumelor şi mediilor de selecţie

Funcţia caracteristică furnizează o metodă simplă pentru determinarea repartiţiei sumelor şi mediilor de selecţie.

TEOREMA 18. *Dacă $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sînt variabile aleatoare* independente, variabila X_i, $1 \leqslant i \leqslant n$ avînd funcţia caracteristică $\varphi_{X_i}(t)$, atunci variabila aleatoare

$$a_1X_1 + a_2X_2 + \ldots + a_nX_n$$

are funcţia caracteristică

$$(40) \qquad \varphi(t) = \prod_{i=1}^{n} \varphi_{X_i}(a_i t).$$

COROLARUL 1. *Dacă $X_1, X_2, \ldots, X_n$ este o selecţie asupra unei variabile aleatoare X avînd funcţia de repartiţie F şi funcţia caracteristică φ, atunci funcţia caracteristică a sumei de selecţie este*

$$[\varphi(t)]^n$$

şi funcţia caracteristică a mediei de selecţie este

$$\left[\varphi\left(\frac{t}{n}\right)\right]^n.$$

Funcţia de repartiţie a sumei sau a mediei de selecţie poate fi determinată cu ajutorul funcţiei lor caracteristice şi a următorului rezultat conţinut în

TEOREMA 19 (Lévy (1925)). *Fie X o variabilă aleatoare avînd funcţia de repartiţie F şi funcţia caracteristică φ. Dacă F este continuă în $x \pm \delta$, $\delta > 0$, atunci*

$$(41) \qquad F(x+\delta) - F(x-\delta) = \lim_{c\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-c}^{c} \frac{\sin \delta t}{t}\, e^{-itx} \varphi(t)\, dt.$$

Scanned with OKEN Scanner

Dacă $\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(t)|\, dt < \infty$, atunci densitatea de repartiție a variabilei aleatoare X există și

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx}\varphi(t)\, dt. \tag{42}$$

Integralele care apar în membrii drepți ai relațiilor (41) și (42) sînt dificil de calculat.

Pentru numeroase cazuri care apar în teoria selecției putem determina funcțiile de repartiție ale sumei și mediei de selecție din

TEOREMA 20. *Fie X_1 și X_2 variabile aleatoare independente avînd funcțiile de repartiție $F(x_1, \theta_1)$ și respectiv $F(x_2, \theta_2)$ și funcțiile caracteristice $\varphi(t, \theta_1)$ și respectiv $\varphi(t, \theta_2)$, unde θ_1 și θ_2 sînt parametri. Condiția necesară și suficientă ca $F(x, \theta)$ să fie reproductivă în raport cu θ, adică $X_1 + X_2$ să aibe funcția de repartiție $F(x_1 + x_2, \theta_1 + \theta_2)$ este ca*

$$\varphi(t, \theta_1)\, \varphi(t, \theta_2) = \varphi(t, \theta_1 + \theta_2). \tag{43}$$

TEOREMA 21. *Fie $X_1, X_2, \ldots, X_n$ o selecție asupra unei variabile aleatoare X avînd funcția de repartiție $F(x, \theta)$ și funcția caracteristică $\varphi(t, \theta)$. Dacă*

$$[\varphi(t, \theta)]^n = \varphi(t, n\theta), \tag{44}$$

atunci funcția de repartiție a sumei (mediei) de selecție este

$$F(\Sigma x_i, n\theta)\ [F(n\,\overline{x}_n\,; n\theta)]. \tag{45}$$

Demonstrație. Conform corolarului 1, funcția caracteristică a sumei de selecție este $[\varphi(t, \theta)]^n$. Cum $\varphi(t)$ satisface (43),

$$[\varphi(t, \theta)]^n = \varphi(t, n\theta).$$

Aceasta implică că suma de selecție are funcția de repartiție $F(\Sigma x_i, n\theta)$. Punînd $\Sigma x_i = n\,\overline{x}_n$, urmează că $\overline{X}_n$ are funcția de repartiție $F(n\,\overline{x}_n, n\theta)$.

COROLARUL 2. *Dacă $(X_1, \ldots, X_n)$ este o selecție asupra unei variabile aleatoare $Bi(k, p)$ atunci $\sum_1^n X_i$ are o repartiție $Bi(nk, p)$.*

Demonstrație. Funcția caracteristică a variabilei $Bi(k, p)$ este

$$\varphi_{Bi(k,p)}(t) = (q + pe^{it})^k$$

iar a sumei de selecție $(q + pe^{it})^{kn}$ și deci suma de selecție are o repartiție $Bi(kn, p)$.

Scanned with OKEN Scanner

Observații. i) Pentru $k = 1$, obținem o selecție asupra unei variabile aleatoare avînd funcția de frecvențe

$$p(x) = \begin{cases} q, & x = 0 \\ p, & x = 1, \end{cases}$$

care arată că repartiția binomială avînd funcția de frecvențe

$$C_n^\alpha p^\alpha q^{n-\alpha}, \quad \alpha = 0, 1, \ldots, n$$

este repartiția sumei de selecție $\sum_1^n X_i$, unde fiecare X_i poate lua valoarea 0 sau 1 cu probabilitatea q respectiv p.

ii) Funcția caracteristică corespunzătoare mediei de selecție este

$$(q + pe^{i\frac{t}{n}})^{kn}$$

care nu este funcția caracteristică corespunzătoare unei variabile binomiale. Funcția de frecvențe a mediei de selecție este

$$p(\bar{x}_n) = C_{nk}^{n\bar{x}_n} p^{n\bar{x}_n} q^{nk-n\bar{x}_n}, \quad \bar{x}_n = 0, \quad \frac{1}{n}, \quad \frac{2}{n}, \ldots, 1.$$

COROLARUL 3. *Dacă* $(X_1, \ldots, X_n)$ *este o selecție asupra unei variabile aleatoare* $P_0(\lambda)$, *atunci* $\sum_1^n X_i$ *are o repartiție* $P_0(n\lambda)$.

Demonstrație. Funcția caracteristică a variabilei $P_0(\lambda)$ este

$$\varphi_{P_0(\lambda)}(t) = e^{-\lambda(1-e^{it})}$$

iar a sumei de selecție $e^{-n\lambda(1-e^{it})}$, care nu este altceva decît funcția caracteristică corespunzătoare unei repartiții $P_0(n\lambda)$.

În paragrafele 5—8 vom prezenta teoreme limită și rezultate care sînt folosite în repartițiile aproximative ale diferitelor statistici în cazul selecțiilor de volum mare.

§5. Legea slabă a numerelor mari

Unul dintre cele mai simple rezultate privind media de selecție pentru selecții de volum mare este dat în

TEOREMA 22. (Hincin (1929)). *Dacă* $X_1, \ldots, X_n$ *este o selecție asupra unei variabile aleatoare* X *avînd funcția de repartiție* F, *pentru care valoarea medie* μ *este finită, atunci media de selecție* $\bar{X}_n$ *converge în probabilitate către* μ.

Demonstrație. Putem scrie

$$\varphi(t) = 1 + i\mu t + 0(t)$$

Scanned with OKEN Scanner

şi ţinînd seama că funcţia caracteristică a statisticii $\bar{X}_n$ este $\left[\varphi\left(\frac{t}{n}\right)\right]^n$, obţinem

$$\left[\varphi\left(\frac{t}{n}\right)\right]^n = \left[1 + i\mu\frac{t}{n} + 0\left(\frac{t}{n}\right)\right]^n.$$

Avem

$$\lim_{n\to\infty}\left[\varphi\left(\frac{t}{n}\right)\right]^n = e^{i\mu t},$$

care este funcţia caracteristică corespunzătoare unei repartiţii degenerate. Urmează că pentru $n\to\infty$, repartiţia statisticii $\bar{X}_n$ converge către repartiţia unei variabile degenerate sau, acelaşi lucru, $\bar{X}_n$ converge în probabilitate către μ.

Observaţie. În cazul în care variabila aleatoare X are atît media cît şi dispersia finite, din inegalitatea lui Cebîşev şi din teorema 7, obţinem

$$P(|\bar{X}_n - \mu| < \varepsilon) \geqslant 1 - \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2},$$

de unde

$$\lim_{n\to\infty} P(|\bar{X}_n - \mu| < \varepsilon) = 1,$$

ceea ce arată că $\bar{X}_n$ converge în probabilitate către μ.

§6. Repartiţia limită a sumelor şi mediilor de selecţie

Fie $X_1, X_2, \ldots, X_n$ o selecţie asupra unei variabile aleatoare X cu media μ şi dispersia σ^2 finită.

TEOREMA 23. (Lindeberg (1922)). *Avem*

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{\sum_1^n X_i - n\mu}{\sqrt{n}\,\sigma} < y\right) = \lim_{n\to\infty} P\left(\frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu)}{\sigma} < y\right) = \Phi(y). \tag{46}$$

Demonstraţie. Fie $S_n = \sum_1^n X_i$, φ_n funcţia caracteristică a variabilei $(S_n - n\mu)/\sqrt{n}\,\sigma$ şi φ funcţia caracteristică a variabilei aleatoare $(X - \mu)/\sqrt{n}\,\sigma$. Atunci

$$\varphi_n(t) = M\left[\exp\left(it\left(\sum_1^n (X_j - \mu)/\sqrt{n}\,\sigma\right)\right)\right] = [\varphi(t)]^n$$

şi cum

$$\varphi(t) = 1 + iM\left(\frac{X-\mu}{\sqrt{n}\,\sigma}\right)t - \frac{1}{2}M\left(\frac{X-\mu}{\sqrt{n}\,\sigma}\right)^2 t^2 + 0\left(\frac{1}{n}\right)$$

urmează că, pentru orice t

$$\lim_{n\to\infty}\varphi_n(t) = \lim_{n\to\infty}\left[1 - \frac{t^2}{2n} + 0\left(\frac{1}{n}\right)\right]^n = e^{-\frac{t^2}{2}}.$$

Însă $e^{-\frac{t^2}{2}}$ este funcţia caracteristică corespunzătoare unei variabile $N(0,1)$ şi deci funcţia de repartiţie a variabilei aleatoare $(S_n - n\mu)/\sqrt{n}\,\sigma$ converge către funcţia de repartiţie a variabilei $N(0,1)$.

Corolarul următor este cunoscut sub numele de teorema lui Moivre-Laplace.

COROLARUL 4. *Fie $X_1, X_2, \ldots$ variabile aleatoare independente fiecare luînd valoarea 1 sau 0 cu probabilitatea p, respectiv $1 - p = q$ ($p \neq 0$ sau 1). Atunci*

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{S_n - np}{\sqrt{npq}} < x\right) = \Phi(x) \text{ pentru toţi } x. \tag{47}$$

Teorema 23 este un caz particular al unui rezultat mai general cunoscut sub numele de teorema limită centrală.

TEOREMA 24. (Lindeberg (1922)). *Fie $\{X_k\}$ variabile aleatoare independente de medii zero, dispersii $\{\sigma_k^2\}$ şi funcţii de repartiţie $\{F_k\}$. Fie*

$$B_n^2 = D^2(S_n) = \sum_1^n \sigma_k^2.$$

Dacă pentru toţi $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{B_n^2}\sum_1^n \int_{|x|>\varepsilon B_n} x^2 \mathrm{d}F_k = 0, \tag{48}$$

atunci

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{S_n}{B_n} < x\right) = \Phi(x). \tag{49}$$

Demonstraţie. Vom considera cazul particular cînd fiecare X_k are dispersia 1.

Avem

$$\ln\varphi_{S_n}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) = \sum_1^n \ln\varphi_{X_k}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) \tag{50}$$

şi pentru x în vecinătatea lui zero,

$$\ln(1+x) = x + 0(|x|^2). \tag{51}$$

Scanned with OKEN Scanner

Să considerăm în rolul lui x, cantitatea

$$\varphi_{X_k}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) - 1.$$

Ţinînd seama că $M(X_k) = 0$, putem scrie

$$\varphi_{X_k}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) - 1 = \int_{-\infty}^{\infty} (e^{i\frac{t}{\sqrt{n}}x} - 1)\, dF_k(x) =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} (e^{i\frac{t}{\sqrt{n}}x} - 1 - \frac{it}{\sqrt{n}}x)\, dF_k(x). \tag{52}$$

Folosind dezvoltarea

$$|e^{ia} - 1 - ia| \leqslant \frac{a^2}{2}, \quad a \text{ real} \tag{53}$$

găsim

$$\left|\varphi_{X_k}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) - 1\right| \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} \frac{t^2x^2}{2n}\, dF_k = \frac{t^2}{2n}. \tag{54}$$

Din (51) şi (54) obţinem

$$\ln \varphi_{X_k}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) = \varphi_{X_k}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) - 1 + 0\left(\frac{1}{n^2}\right). \tag{55}$$

Evaluăm

$$\varphi_{X_k}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) - 1 + \frac{t^2}{2n} = \int_{-\infty}^{\infty} \left(e^{i\frac{t}{\sqrt{n}}x} - 1 - \frac{itx}{\sqrt{n}} + \frac{t^2x^2}{2n}\right) dF_k(x). \tag{56}$$

Din teorema lui Taylor, găsim

$$\left|e^{ia} - 1 - ia + \frac{a^2}{2}\right| \leqslant \frac{|a^3|}{3} \quad (a \text{ real}) \tag{57}$$

aproximaţie bună pentru valori mici ale lui a.

În (56) luăm modulul, alegem $\varepsilon > 0$ şi împărţim intervalul de integrare în două părţi

$$|x| \leqslant \varepsilon\sqrt{n} \text{ şi } |x| > \varepsilon\sqrt{n}.$$

În prima parte vom aproxima integrantul cu ajutorul lui (57), iar în a doua cu ajutorul lui (53). Obţinem

$$\left|\varphi_{X_k}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) - 1 + \frac{t^2}{2n}\right| \leqslant \frac{|t^3|}{6n^{3/2}} \int_{|x| \leqslant \varepsilon\sqrt{n}} |x^3|\, dF_k(x) +$$

$$+ \frac{\lambda^2}{n} \int_{|x| > \varepsilon\sqrt{n}} x^2 dF_k(x). \tag{58}$$

Scanned with OKEN Scanner

Avem

$$\frac{|t^3|}{6n^{3/2}}\int_{|x|\leqslant\varepsilon\sqrt{n}}|x^3|\,\mathrm{d}F_k(x)\leqslant\frac{|t^3|\varepsilon}{6n}$$

şi din (58) şi (55), obţinem :

$$(59)\quad \left|\ln\varphi_{X_k}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)+\frac{t^2}{2n}\right|\leqslant\frac{|t^3|\varepsilon}{6n}+\frac{\lambda^2}{n}\int_{|x|>\varepsilon\sqrt{n}}x^2\mathrm{d}F_k(x)+0\left(\frac{1}{n^2}\right):$$

Sumînd după k de la 1 la n şi ţinînd seama de (50) găsim

$$(60)\quad \left|\ln\varphi_{S_n}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)+\frac{t^2}{2}\right|\leqslant\frac{|t^3|\varepsilon}{6}+0\left(\frac{1}{n}\right)+\frac{\lambda^2}{n}\sum_1^n\int_{|x|>\varepsilon\sqrt{n}}x^2\mathrm{d}F_k(x).$$

Dat orice $\eta>0$, alegem ε astfel încît primul termen din membrul drept al relaţiei (60) să fie $\leqslant\eta$. Atunci, pentru valori mari ale lui n, membrul drept din (60) poate fi făcut $\leqslant 2\eta$, ceea ce demonstrează teorema.

Observaţii. i) În cazul teoremei 23, condiţia (48) se reduce la presupunerea

$$\int_{|x|>\varepsilon\sqrt{n}}x^2\mathrm{d}F(x)\to 0,$$

care este adevărată deoarece momentul de ordinul doi este finit.

ii) W. Feller (1937) a arătat că condiţia (48) este necesară : dacă $B_n^2=D^2(S_n)$, dacă

$$\lim_{n\to\infty}P\left(\frac{S_n}{B_n}<x\right)=\Phi(x)$$

şi dacă

$$(61)\quad \frac{\max\limits_{k\leqslant n}\sigma_k}{B_n}\to 0,$$

atunci (48) are loc.

Pentru aplicaţii practice ale teoremei limită centrală prezintă importanţă evaluarea ratei de convergenţă. Aceasta este dată de

TEOREMA 25. (Berry (1941), Essen (1944)). *Fie $X_1, X_2, \ldots$ variabile aleatoare independente avînd aceeaşi repartiţie de medie zero, dispersie σ^2 şi momentul de ordinul trei finit. Atunci există o constantă C astfel încît*

$$(62)\quad \left|P\left(\frac{S_n}{n}\leqslant x\right)-\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}\mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}}\,\mathrm{d}y\right|\leqslant\frac{CM(|X_1|^3)}{\sigma^3\sqrt{n}},\quad -\infty<x<\infty.$$

În cazul unui vector aleator k dimensional are loc

Scanned with OKEN Scanner

TEOREMA 26. *Fie* $(X_{1j}, \ldots, X_{kj})_{1 \leqslant k \leqslant n}$ *o selecție de volum* n *asupra unui vector aleator* k*-dimensional de vector valoare medie* $\boldsymbol{\mu}' = (\mu_1, \ldots, \mu_k)$ *și matrice de covarianță* $\Sigma = (\sigma_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant k}$. *Fie*

$$(Z_1, \ldots, Z_k) \text{ unde } Z_i = \sum_1^n X_{ik} = \text{sumele de selecție}$$

și

$$(\bar{X}_1, \ldots, \bar{X}_k) \text{ unde } \bar{X}_i = \frac{1}{n} \sum_1^n X_{ik} = \text{mediile de selecție.}$$

Atunci $(Z_1, \ldots, Z_k)$ $[(\bar{X}_1, \ldots, \bar{X}_k)]$ *are o repartiție*

$$N(n\boldsymbol{\mu}, n\Sigma) \left[N\left(\boldsymbol{\mu}, \frac{1}{n}\Sigma\right) \right].$$

§7. Repartiția asimptotică a funcțiilor de medii de selecție

Fie $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ o selecție asupra unei variabile aleatoare X având media μ și dispersia σ^2 finite.

TEOREMA 27. *Fie* $g(x)$ *o funcție care, în vecinătatea punctului* $x = \mu$, *are o derivată* $g'(x)$ *astfel încît* $g'(\mu) \neq 0$. *În aceste condiții* $g(\bar{X}_n)$, *asimptotic, pentru valori mari ale lui* n, *are repartiția*

$$N\{g(\mu), [\sigma g'(\mu)]^2/n\}.$$

Demonstrație. Fie $V(\mu)$ vecinătatea punctului $x = \mu$ pentru care $g'(x)$ există oricare ar fi $x \in V(\mu)$. Din enunț urmează că pentru orice $\varepsilon > 0$, există $n(\varepsilon)$ astfel încît pentru $n > n(\varepsilon)$

$$P(\bar{X}_n \in V(\mu)) > 1 - \varepsilon.$$

Pentru orice punct $x = \bar{X}_n$ din $V(\mu)$ putem scrie

$$g(\bar{X}_n) = g(\mu) + g'(x^*)(\bar{X}_n - \mu) \tag{63}$$

unde x^* este o variabilă aleatoare astfel încît

$$|x^* - \mu| \leqslant |\bar{X}_n - \mu|$$

(63) se mai poate scrie

$$(g(\bar{X}_n) - g(\mu))\sqrt{n} = g'(x^*)(\bar{X}_n - \mu)\sqrt{n} \tag{64}$$

și probabilitatea ca egalitatea (64) să aibă loc pentru toți $n > n(\varepsilon)$ este mai mare decît $1 - \varepsilon$.

Fie $U_n = (g(\bar{X}_n) - g(\mu))\sqrt{n}$ și $V_n = g'(x^*)(\bar{X}_n - \mu)\sqrt{n}$.

Scanned with OKEN Scanner

Deoarece σ^2 este finită, șirul de variabile aleatoare $\{\sqrt{n}\,(\bar{X}_n - \mu)\}$, $n = 1, 2, \ldots$ converge în repartiție către o variabilă repartizată $N(0, \sigma^2)$. Deoarece $g'(x)$ există în toate punctele din $V(\mu)$, este continuă în $V(\mu)$ și deci în $x = \mu$. Urmează că $g'(x^*)$ converge în probabilitate către $g'(\mu)$.

Prin urmare

$$\lim_{n\to\infty} P(V < w) = P(g'(\mu)\, s < w), \tag{65}$$

unde s este o variabilă $N(0, \sigma^2)$.
Relația (65) implică

$$\lim_{n\to\infty} P(U_n < w) = P(t < w),$$

unde t are o repartiție $N\{0, [\sigma g'(\mu)]^2\}$.

Deci $g(\bar{X}_n)$, pentru valori mari ale lui n, are o repartiție $N\{g(\mu), [\sigma g'(\mu)]^2/n\}$.

COROLARUL 5. *Variabila aleatoare*

$$g(X) = c\int_K^X \frac{d\mu}{\sigma(\mu)}, \tag{66}$$

unde $0 < X < \infty$ *și* K *este o constantă arbitrară, are asimptotic dispersia* c^2.

Observație. Corolarul 5 permite ca în cazul în care dispersia variabilei X depinde de μ, găsirea unei transformări care să stabilizeze dispersia.

În cazul k-dimensional are loc

TEOREMA 28. *Fie* T_n *o statistică* k *dimensională*

$$(T_{1n}, T_{2n}, \ldots, T_{kn})$$

astfel încît repartiția asimptotică a vectorului

$$(\sqrt{n}\,(T_{1n} - \theta_1), \ldots, \sqrt{n}\,(T_{kn} - \theta_k))$$

este normală k*-dimensională, cu vectorul valoare medie zero și matrice de covarianță* $\Sigma = (\sigma_{ij})$.

Fie g *o funcție diferențiabilă de* k *variabile.*

În aceste condiții variabila aleatoare

$$\sqrt{n}\, U_n = \sqrt{n}\,[g(T_{1n}, \ldots, T_{kn}) - g(\theta_1, \ldots, \theta_k)]$$

are asimptotic o repartiție $N\left(0, \Sigma\Sigma\sigma_{ij}\frac{\partial g}{\partial \theta_i}\cdot\frac{\partial g}{\partial \theta_j}\right)$, *cu condiția ca*

$$\Sigma\Sigma\sigma_{ij}\frac{\partial g}{\partial \theta_i}\cdot\frac{\partial g}{\partial \theta_j} \neq 0. \tag{67}$$

Scanned with OKEN Scanner

Demonstrație. Deoarece g este o funcție derivabilă

$$g(T_{1n}, \ldots, T_{kn}) - g(\theta_1, \ldots, \theta_k) = \Sigma (T_{in} - \theta_i) \frac{\partial g}{\partial \theta_i} + \varepsilon_n \| T_n - \theta \|,$$

unde $\varepsilon_n \to 0$ cînd $T_{in} \to \theta_i$.

$\varepsilon_n \xrightarrow{P} 0$ cînd $n \to \infty$ și deoarece

$$\sqrt{n} \| T_n - \theta \| = [\Sigma n^2 (T_{in} - \theta_i)^2]^{1/2}$$

are o repartiție asimptotică,

$$\left| \sqrt{n}\, U_n - \sqrt{n}\, \Sigma (T_{in} - \theta_i) \frac{\partial g}{\partial \theta_i} \right| \xrightarrow{P} 0.$$

Însă repartiția asimptotică a variabilei $\sqrt{n}\, \Sigma (T_{in} - \theta_i) \dfrac{\partial g}{\partial \theta_i}$ care este o funcție liniară de variabile normală, este normală cu media zero și dispersia (67).

§8. Dezvoltarea asimptotică a repartiției sumei de selecție

Ne propunem să determinăm, pentru valori mari ale lui n, acuratețea aproximării repartiției variabilei $\left(\sum_1^n X_i - n\mu \right) / \sqrt{n}\sigma$ prin repartiția $N(0,1)$.

În acest scop presupunem că momentele centrate $\mu_1, \ldots, \mu_r$, $r > 2$ ale variabilei aleatoare X, cu funcția de repartiție F, există și sînt finite. Atunci, dacă $\varphi(t)$ este funcția caracteristică a variabilei $(X - \mu)/\sqrt{n}\sigma$, avem

$$\varphi(t) = 1 - \frac{t^2}{2n} + \sum_{j=3}^{r} \frac{(it)^j \alpha_j}{j!(\sqrt{n})^j} + 0\left(\left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right)^r \right), \tag{68}$$

unde

$$\alpha_j = \mu_j / \sigma^j \quad \text{și} \quad (\sqrt{n})^r \cdot 0\left(\left(\frac{t}{n} \right)^r \right) \xrightarrow[n \to \infty]{} 0 \text{ pentru orice } t \neq 0.$$

Însă funcția caracteristică $\varphi_n(t)$ a variabilei $\left(\sum_1^n X_i - n\mu \right) / \sqrt{n}\sigma$, după teorema 23, este $\varphi_n(t) = [\varphi(t)]^n$. Putem scrie

$$\ln \varphi_n(t) = -\frac{t^2}{2} + n \sum_{j=3}^{r} \frac{(it)^j \mathfrak{K}_j}{j!(\sqrt{n})^j} + n\, 0\left(\left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right)^r \right), \tag{69}$$

Scanned with OKEN Scanner

unde $\mathcal{K}_j$ sînt semivarianţii repartiţiei variabilei $(X - \mu)/\sigma$. Urmează că

$$\varphi_n(t) = e^{-\frac{1}{2}t^2} \exp\left[n \sum_{j=3}^{r} \frac{(it)^j \mathcal{K}_j}{j!(\sqrt{n})^j} + n \cdot 0\left(\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^r\right)\right] \tag{70}$$

sau

$$\varphi_n(t) = e^{-\frac{1}{2}t^2}\left[1 + \sum_{j=1}^{r-2} \frac{u_j(it)}{(\sqrt{n})^j} + n \cdot 0\left(\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^r\right)\right], \tag{71}$$

unde $u_j(it)$ este un polinom de grad $3j$ în (it) ai cărui coeficienţi sînt funcţii de $\mathcal{K}_j$ însă nu depinde de n. Cea mai mică putere a lui (it) în $u_j(it)$ este $j + 2$.

Fie

$$F_n(x) = P\left(\frac{\sum_{1}^{n} X_i - n\mu}{\sqrt{n}\,\sigma} \leqslant x \right) \tag{72}$$

şi x_1, x_2 puncte de continuitate pentru $F_n(x)$.

Dacă în (41) punem

$$x = (x_1 + x_2)/2, \quad \delta = (x_1 - x_2)/2,$$

obţinem

$$F_n(x_1) - F_n(x_2) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{x_1 - x_2}{2}\right)t}{t} \exp\left\{ -it\left[\frac{1}{2}(x_1 + x_2)\right]\right\} \varphi_n(t)\,dt. \tag{73}$$

Dacă în (73) ţinem sema de (71) obţinem :

$$F_n(x_1) - F_n(x_2) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-itx_1} - e^{-itx_2}}{2(-it)} \cdot \tag{74}$$
$$\cdot e^{-\frac{1}{2}t^2}\left[1 + \sum_{j=1}^{r-2} \frac{u_j(it)}{(\sqrt{n})^j} + n \cdot 0\left(\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^r\right)\right] dt.$$

Avem

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-itx_1} - e^{-itx_2}}{2(-it)} e^{-\frac{1}{2}t^2}\,dt = \Phi(x_1) - \Phi(x_2). \tag{75}$$

Ceilalţi termeni din (73), cu excepţia unei constante de multiplicare, sînt de următoarea formă

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} (-it)^j (e^{-itx_1} - e^{-itx_2})\, e^{-\frac{1}{2}t^2}\,dt,$$

Scanned with OKEN Scanner

care avea valoarea

$$\frac{1}{2\pi}\frac{\mathrm{d}^j}{\mathrm{d}x_1^j}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}tx_1-\frac{1}{2}t^2}\,\mathrm{d}t - \frac{1}{2\pi}\frac{\mathrm{d}^j}{\mathrm{d}x_2^j}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}tx_2-\frac{1}{2}t^2}\,\mathrm{d}t = \tag{76}$$

$$= \Phi^{(j+1)}(x_1) - \Phi^{(j+1)}(x_2),$$

unde

$$\Phi^{j+1}(x) = \frac{\mathrm{d}^{j+1}}{\mathrm{d}x^{j+1}}\Phi(x) = \frac{\mathrm{d}^j}{\mathrm{d}x^j}\varphi(x). \tag{77}$$

Cu acestea (73) se scrie

$$F_n(x_1) - F_n(x_2) = \Phi(x_1) - \Phi(x_2) + \sum_{j=1}^{r-2}\frac{[u_j^*(x_1) - u_j^*(x_2)]}{n^{j/2}} + 0\left(\frac{1}{\sqrt{n^{r-2}}}\right) \tag{78}$$

unde $u_j^*(x_1)$ și $u_j^*(x_2)$ sînt funcțiile $u_j(it)$ în care am înlocuit $(it)^p$ prin $\Phi^{(p+1)}(x_1)$, respectiv prin $\Phi^{(p+1)}(x_2)$.

Dacă în (78) facem pe $x_2 \to -\infty$, obținem dezvoltarea asimptotică pentru $F_n(x_1)$

$$F_n(x_1) = \Phi(x_1) + \sum_{j=1}^{r-2}\frac{u_j^*(x)}{\sqrt{n^j}} + 0\left(\frac{1}{\sqrt{n^{r-2}}}\right). \tag{79}$$

Dacă $F_n(x_1)$ are densitatea de repartiție $f_n(x_1)$, din (79) obținem

$$f_n(x_1) = \varphi(x_1) + \sum_{j=1}^{r-2}\frac{u_j^{*\prime}(x_1)}{n^j} + 0\left(\frac{1}{\sqrt{n^{r-2}}}\right). \tag{80}$$

Am demonstrat

TEOREMA 29 (Edgeworth (1905)). *Dacă $X_1, \ldots, X_n$ este o selecție asupra unei variabile aleatoare X cu momentele $\mu_1, \ldots, \mu_r (r>2)$ finite, atunci funcția de repartiție $F_n(x)$ a variabilei aleatoare $\left(\sum_1^n X_i - n\mu\right)/\sqrt{n}\sigma$ admite o dezvoltare de forma* (79).

Observație. (79) și (80) admit dezvoltările în termeni de ordinul $n^{-\frac{3}{2}}$

$$F_n(x) = \Phi(x) - \frac{1}{\sqrt{n}}\left(\frac{\alpha_3}{3!}\right)\Phi^{(3)}(x) + \frac{1}{n}\left[\frac{1}{4!}(\alpha_4 - 3)\,\Phi^{(4)}(x) + \right. \tag{81}$$

$$\left. + \frac{10}{6!}\alpha_3^2\,\Phi^{6}(x)\right] - \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\left[\frac{1}{5!}(\alpha_5 - 10\alpha_3)\Phi^{(5)}(x) + \frac{35}{7!}\alpha_3(\alpha_4 - 3)\Phi^{(7)}(x) + \right.$$

$$\left. + \frac{280}{9!}\alpha_3^3\,\Phi^{(9)}(x)\right] + 0\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right),$$

Scanned with OKEN Scanner

şi

$$f_n(x) = \Phi^{(1)}(x) - \frac{1}{\sqrt{n}}\left(\frac{\alpha_3}{3!}\right)\Phi^{(4)}(x) +$$

$$(82) \qquad + \frac{1}{n}\left[\frac{1}{4!}(\alpha_4 - 3)\,\Phi^{(5)}(x) + \frac{10}{6!}\,\alpha_3^2\,\Phi^{(7)}(x)\right] -$$

$$- \frac{1}{n^{3/2}}\left[\frac{1}{5!}(\alpha_5 - 10\alpha_3)\,\Phi^{(6)}(x) + \frac{35}{7!}\,\alpha_3(\alpha_4 - 3)\,\Phi^{(8)}(x) +\right.$$

$$\left. + \frac{280}{9!}\,\alpha_3^3\Phi^{(10)}(x)\right] + 0\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right),$$

unde $\alpha_3 = (\mu_3/\sigma^3) = \gamma_1$ şi $\alpha_4 - 3 = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3 = \gamma_2$. Constantele γ_1 şi γ_2 joacă un rol important în gradul cu care $F_n(x)$ poate fi aproximată cu $\Phi(x)$. Din (81) urmează că $F_n(x)$ este aproximată de $\Phi(x)$ excepţie făcînd termenii de ordin $1/\sqrt{n}$.

Corolarul 6. *Dacă γ_1 variabilei X asupra căreia i s-a considerat selecţia $X_1, \ldots, X_n$ este egal cu zero, $F_n(x)$ este aproximată de $\Phi(x)$ cu excepţia termenilor de ordin $1/n$; dacă atît γ_1 cît şi γ_2 sînt zero, $F_n(x)$ este aproximată de $\Phi(x)$ cu excepţia termenilor de ordin $1/\sqrt{n^3}$.*

SELECŢIA DINTR-O POPULAŢIE FINITĂ

§9. Definiţii şi rezultate

DEFINIŢIA 13. Printr-o populaţie finită d-dimensională vom înţelege o mulţime finită de vectori d-dimensionali cu componente reale:

$$\pi = \{a_1, a_2, \ldots, a_N\},\ a_\nu = (a_\nu^{(1)}, a_\nu^{(2)}, \ldots, a_\nu^{(d)}),$$

unde $a_\nu^{(i)}$ sînt numere reale

$$i = 1, 2, \ldots, d;\ \nu = 1, 2, \ldots, N$$

N se numeşte volumul populaţiei.

DEFINIŢIA 14. Vectorul medie μ_π şi matricea de covarianţe $(\sigma_{ij})_{i,j=1,2,\ldots,d}$ corespunzătoare populaţiei sînt definite de

$$\mu_\pi = \frac{1}{N}\sum_1^N a_\nu,\ (\sigma_{ij}) = \frac{1}{N-1}\sum_1^N (a_\nu - \mu_\pi)'\,(a_\nu - \mu_\pi).$$

Scanned with OKEN Scanner

Pentru populații unidimensionale în loc de σ_{11} vom folosi notația σ_π^2 și o vom numi dispersia populației. Introducem mărimea

$$D_\pi^2 = \sum_1^N (a_\nu - \mu_\pi)^2 = (N-1)\,\sigma_\pi^2.$$

DEFINIȚIA 15. Repartiția populației este măsura probabilistică pe R^d obținută atribuind fiecărui element al populației π, masa $1/N$.

Vom considera funcția de repartiție $F_\pi(x)$ corespunzătoare acestei măsuri continuă la dreapta.

DEFINIȚIA 16. Funcția de repartiție centrată $F_\pi^c(x)$ este definită de

$$F_\pi^c(x) = F_\pi(x - \mu_\pi).$$

Acum vom defini selecția aleatoare $X_1, X_2, \ldots, X_n$ din π.

Fie Ω_N mulțimea tuturor permutărilor $\omega = (i_1, \ldots, i_N)$ ale numerelor $1, 2, \ldots, N$. Definim pe $\mathfrak{L}(\Omega_N)$ o probabilitate în felul următor

$$P(\omega) = (N!)^{-1} \text{ pentru orice } \omega \in \Omega_N.$$

Urmează că

$$P(A) = \text{card } A/N! \text{ pentru orice } A \subset \Omega_N.$$

Fie

$$T_\pi : \Omega_N \to \overset{N}{\underset{\nu=1}{\times}} R_\nu^d \text{ (prin } \times \text{ înțelegem produsul cartezian)}$$

dată de

$$\pi_\pi(\omega) = (a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_N}) \text{ dacă } \omega = (i_1, i_2, \ldots, i_N).$$

DEFINIȚIA 17. Această aplicație vectorială o vom numi permutare aleatoare $(r \cdot p)$ a elementelor lui π și vom nota componentele sale prin

$$T_\pi = (X_1, \ldots, X_N)$$

DEFINIȚIA 18. Printr-o selecție aleatoare de volum n, $n \leqslant N$ din π vom înțelege vectorul $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$.

Selecțiile aleatoare se bucură de următoarele proprietăți:

Invarianța la permutare.

$X_1, X_2, \ldots, X_n$ sînt *invariante la permutare*, adică repartiția lor comună este invariantă la orice permutare a X-lor.

Această proprietate se reduce în esență la următorul fapt

$$P(X_{i_1} = a_1,\ X_{i_2} = a_2, \ldots, X_{i_n} = a_n) =$$

$$= P(X_1 = a_1,\ X_2 = a_2, \ldots, X_n = a_n) = \frac{(N-n)!}{N!}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Principiul dualității

Fie $S_0 = 0$ și $S_\nu = X_1 + X_2 + \ldots + X_\nu$, $\nu = 1,2,\ldots,N$ și din $1,2,\ldots,N$ alegem $i_1, i_2, \ldots, i_n$.

Dacă $\mu_\pi = 0$, atunci vectorii aleatori

$$(S_{i_1}, S_{i_2}, \ldots, S_{i_n}) \text{ și } (-S_{N-i_1}, -S_{N-i_2}, \ldots, -S_{N-i_n})$$

au repartiții identice.

Principiul condiționării

Repartiția comună a variabilelor $X_{n+1}, X_{n+2}, \ldots, X_{n+m}$, $n + m \leqslant N$, condiționată de $X_1, X_2, \ldots, X_n$ este în punctul ω identică cu repartiția unei selecții aleatoare de volum m dintr-o populație $\pi'(\omega) = \pi$ din care am înlăturat elementele $X_1(\omega), X_2(\omega), \ldots, X_n(\omega)$.

TEOREMA 30. *Dacă $X_1, X_2, \ldots, X_n$ este o selecție aleatoare din $\pi = \{a_1, \ldots, a_N\}$ de medie μ și dispersie σ^2, atunci*

$$M(\bar{X}) = \mu \text{ și } D^2(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n}\left(1 - \frac{n-1}{N-1}\right). \tag{83}$$

Demonstrație. Avem

$$\mu = M(X) = \sum_{i=1}^{N} a_i P(X_k = a_i) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} a_i$$

$$\sigma^2 = D^2(X) = M(X^2) - M^2(X) = \sum_{i=1}^{N} a_i^2 P(X_k = a_i) - M^2(X) =$$

$$= \frac{1}{N}(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_N^2) - \left[\frac{1}{N}(a_1 + a_2 + \ldots + a_N)\right]^2 \tag{84}$$

σ^2 se mai poate pune sub forma

$$\sigma^2 = (a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_N^2)\left(\frac{1}{N} - \frac{1}{N^2}\right) - (a_1a_2 + a_1a_3 + \ldots + a_{N-1}a_N)\frac{2}{N^2}. \tag{84'}$$

Mulțimea tuturor selecțiilor de volum n din π va conține C_N^n selecții

$$\begin{aligned} &(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n) \\ &(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_{n+1}) \\ &\vdots \\ &(a_{N-n+1}, a_{N-n+2}, \ldots, a_N). \end{aligned} \tag{85}$$

Toate selecțiile sînt egal probabile, astfel încît probabilitatea de a obține oricare dintre selecțiile mulțimii definite de (85) este $1/C_N^n$.

Scanned with OKEN Scanner

Presupunem că selecţiile din (85) au mediile $\bar{a}_j$, $j = 1,2,\ldots, C_N^n$. Valoarea medie a lui $\bar{X}$ este

$$M(\bar{X}) = \sum_1^{C_N^n} \bar{a}_j P\{a_j\} = \frac{1}{C_N^n} \sum_1^{C_N^n} \bar{a}_j =$$

(86)

$$= \frac{1}{C_N^n}\left[\frac{1}{n}(a_1 + \ldots + a_n) + \ldots + \frac{1}{n}(a_{N-n+1} + \ldots + a_N)\right].$$

În (86) selecţiile conţinînd pe a_1 se obţin considerînd $(n-1)$ alte elemente din cele $N-1$ elemente ce mai conţine populaţia şi aceasta se poate realiza în C_{N-1}^{n-1} moduri. Cu alte cuvinte, în (86) a_1 apare de C_{N-1}^{n-1} şi această afirmaţie este adevărată pentru orice a_i. Astfel, ţinînd seama de (83)

$$M(\bar{X}) = \frac{1}{C_N^n}\left[\frac{1}{n} C_{N-1}^{n-1} \sum_1^N a_i\right] = \frac{1}{N} \sum_1^N a_i = \mu, \tag{87}$$

ceea ce arată că valoarea medie a mediei de selecţie este media populaţiei.

Dispersia mediei de selecţie $\bar{X}$ este

$$D^2(\bar{X}) = M(\bar{X}^2) - M^2(\bar{X}).$$

Avem

$$M(\bar{X}^2) = \sum_1^{C_N^n} \bar{a}_j^2 P(\bar{a}_j) = \frac{1}{C_n^n} \sum_1^{C_N^n} \bar{a}_j^2. \tag{88}$$

Vom evalua $\sum_1^{C_N^n} \bar{a}_j^2$. Putem scrie

$$\sum_1^{C_N^n} \bar{a}_j^2 = \left[\frac{1}{n}(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)\right]^2 + \ldots + \left[\frac{1}{n}(a_{N-n+1} + \ldots + a_N)\right]^2 \tag{89}$$

şi ţinînd seama că fiecare a_i^2 apare în (89) de C_{N-1}^{n-1} ori (printr-un raţionament asemănător celui folosit în calcularea lui $M(\bar{X})$) obţinem suma patratelor

$$\frac{1}{n^2} C_{N-1}^{n-1}(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_N^2). \tag{90}$$

De asemenea în (89) apar şi termeni de forma $a_i a_j$. Oricare dintre elementele a_i şi a_j vor apărea împreună în C_{N-2}^{n-2} selecţii, astfel încît partea din (89) ce conţine produse este

$$\frac{2}{n^2} C_{N-2}^{n-2}(a_1a_2 + a_1a_3 + \ldots + a_{N-1}a_N) \tag{91}$$

factorul 2 provenind din faptul că $a_i a_j = a_j a_i$.

Scanned with OKEN Scanner

Ţinînd seama în (88) de (90) şi (91), obţinem

$$(92)\quad M(\bar{X}^2) = \frac{1}{C_N^n}\left[\frac{1}{n^2}\,C_{N-1}^{n-1}(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_N^2) + \frac{2}{n^2}\,C_{N-2}^{n-2}(a_1 + a_2 + \ldots + a_{N-1}a_N)\right].$$

Urmează că

$$(93)\quad D^2(\bar{X}) = \left(\frac{1}{C_N^n}\frac{1}{n^2}\,C_{N-1}^{n-1} - \frac{1}{N^2}\right)(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_N^2) + \left(\frac{1}{C_N^n}\frac{2}{n^2}\,C_{N-2}^{n-2} - \frac{2}{N^2}\right)(a_1a_2 + \ldots + a_{N-1}a_N),$$

şi cum coeficientul lui $(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_N^2)$ poate fi scris

$$\frac{1}{n^2}\,\frac{(N-1)!}{(n-1)!\,(N-n)!}\,\frac{n!\,(N-n)!}{N!} - \frac{1}{N^2} = \frac{1}{nN} - \frac{1}{N^2} = \frac{N-n}{nN^2} = \frac{N-1}{N^2}\cdot\frac{N-n}{n(N-1)} = \left(\frac{1}{N} - \frac{1}{N^2}\right)\frac{N-n}{n(N-1)}$$

iar coeficientul lui $(a_1a_2 + \ldots + a_{N-1}a_N)$

$$\frac{2}{n^2}\,\frac{(N-2)!}{(n-2)!\,(N-n)!}\cdot\frac{n!\,(N-n)!}{N!} - \frac{2}{N^2} = \frac{2(n-1)}{nN(N-1)} - \frac{2}{N^2} = \frac{2(N-n)}{nN^2(N-1)},$$

obţinem

$$(94)\quad D^2(\bar{X}) = \frac{N-n}{n(N-1)}\left[\left(\frac{1}{N} - \frac{1}{N^2}\right)(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_N^2) - \frac{2}{N^2}\,a_1a_2 + \ldots + a_{N-1}a_N\right].$$

Dacă în (94) ţinem seama de (84′), putem scrie

$$(95)\quad D^2(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n}\cdot\frac{N-n}{N-1} = \frac{\sigma^2}{n}\left(1 - \frac{n-1}{N-1}\right).$$

§10. Procedee limită

În cele ce urmează vom considera un procedeu limită bazat pe şirul de populaţii $\{\pi_k\}_1^\infty$. Vom presupune că şirul de populaţii se bucură de pro-

Scanned with OKEN Scanner

prietatea că $N_{\pi_k} \to \infty$, cînd $k \to \infty$. Pentru simplificarea scrierii vom folosi notaţiile μ_k, σ_k^2, N_k, F_k în loc de μ_{π_k}, $\sigma^2_{\pi_k}$, N_{π_k}, F_{π_k}.

Să presupunem că se dă $\{\pi_k\}_1^\infty$. În aceste condiţii $X_{k1}, X_{k2}, \ldots, X_{kN_k}$ va reprezenta o permutare aleatoare a elementelor lui π_k. Fie $\{\varphi_{kn}\}$, $n = 1,2,\ldots, N_k$, $k = 1,2,\ldots$ un şir dublu de variabile aleatoare, unde $\varphi_{kn} = \varphi_{kn}(X_{k1}, \ldots, X_{kn})$.

DEFINIŢIA 19. Vom spune că $\{\varphi_{kn}\}$ converge în probabilitate către constanta c pentru şirul de volume de selecţie $\{n_k\}_1^\infty$ dacă pentru orice $\varepsilon > 0$

$$\lim_k P(|\varphi_{kn_k} - c| \geqslant \varepsilon) = 0.$$

DEFINIŢIA 20. Vom spune că $\{\varphi_{kn}\}$ converge tare către c pentru şirul de volume de selecţie $\{n_k\}_1^\infty$ dacă pentru orice $\varepsilon > 0$

$$\lim_k P(\max_{n_k \leqslant n \leqslant N_k} |\varphi_{kn} - c| \geqslant \varepsilon) = 0.$$

§11. Legătura dintre selecţia cu şi fără înlocuire

Am văzut că în cazul observaţiilor independente (teorema 7) dispersia mediei de selecţie este $\frac{\sigma^2}{n}$.

Prin urmare în cazul unei selecţii fără înlocuire se obţine o dispersie mai mică, adică există tendinţa ca media de selecţie într-o selecţie fără înlocuire să se găsească într-un interval mai mic centrat în medie decît în cazul observaţiilor independente.

Un rezultat mult mai general în această direcţie este conţinut în

TEOREMA 31 (Hoeffding (1963)). *Dacă $X_1, X_2, \ldots, X_n$ şi $X_1', X_2', \ldots, X_n'$ sînt selecţii din π extrase fără, respectiv cu înlocuire, dacă*

$$S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n, \quad S_n' = X_1' + X_2' + \ldots + X_n'$$

şi dacă ψ este continuă şi convexă, atunci

$$M(\psi(S_n)) \leqslant M(\psi(S_n')).$$

Cu ajutorul acestei teoreme se pot obţine inegalităţi pentru probabilităţile referitoare la sume de selecţii fără înlocuire din inegalităţi referitoare la sume de variabile aleatoare independente.

De fapt, următoarea lemă care este o consecinţă a teoremei lui Cebîşev şi a teoremei lui Hoeffding exprimă în mod precis acest lucru.

LEMA 1. *Dacă $\psi(X)$ este măsurabilă, pozitivă, nedescrescătoare şi convexă pentru $X > 0$, atunci pentru orice, $\alpha > 0$, avem*

$$P(|S_n - M(S_n)| \geqslant \alpha) \leqslant [\psi(\alpha)]^{-1} M\,\psi(|S_n' - M(S_n')|).$$

Scanned with OKEN Scanner

Lema 2 este exprimarea matematică a ideii că dacă selecţia extrasă din π are volum mic, atunci selecţiile cu sau fără înlocuire sînt aproape echivalente.

LEMA 2. *Dacă* $\{\pi_k\}_1^\infty$ *este un şir de populaţii pentru care* $F_k \to F$ *în repartiţie cînd* $k \to \infty$ *şi dacă*

$$X_{k1}, \ldots, X_{kN_k}$$

este o permutare aleatoare a elementelor lui π_k. *Atunci pentru fiecare* m *fixat repartiţia lui*

$$X_{k1}, \ldots, X_{km}$$

converge cînd $k \to \infty$ *la repartiţia a* m *variabile aleatoare independente, toate avînd repartiţia* F.

Demonstraţie. Fie $x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_m$.

Folosind egalitatea

$$P(X_{k1} \leqslant x_1, \ldots, X_{km} \leqslant x_m) =$$

$$= P(X_{k1} \leqslant x_1)\, P(X_{k2} \leqslant x_2 \mid X_{k1} \leqslant x_1) \ldots P(X_{km} \leqslant x_m \mid X_{k1} \leqslant x_1, \ldots, X_{km-1} \leqslant x_{m-1})$$

şi definiţia clasică a probabilităţii, putem scrie

$$P(X_{k1} \leqslant x_1, \ldots, X_{km} \leqslant x_m) =$$

$$= \frac{N_k F_k(x_1)}{N_k} \cdot \frac{N_k F_k(x_2) - 1}{N_k - 1} \cdot \ldots \cdot \frac{N_k F_k(x_m) - (m-1)}{N_k - (m-1)}.$$

Este aşa deoarece în prima extracţie s-a scos un element, la a doua extacţie populaţia va avea N_{k-1} elemente. Numărul cazurilor favorabile va fi $N_k F_k(x_2) - 1$; deci al doilea factor va fi $\dfrac{N_k F_k(x_2) - 1}{N_k - 1}$ etc.

Datorită faptului că $\lim N_k = \infty$

$$P(X_{k1} \leqslant x_1, \ldots, X_{km} \leqslant x_m) \to F(x_1) F(x_2) \ldots F(x_m)$$

şi ţinînd seama de invarianţa la permutarea X-lor relaţia anterioară are loc fără nici o restricţie.

§12. Legea numerelor mari

Fie $X_1, X_2, \ldots, X_N$ o selecţie fără înlocuire din populaţia π şi $S_0 = 0$, $S_\nu = X_1 + X_2 + \ldots + X_\nu$, $\nu = 1,2,\ldots,N$ şi

$$\bar{X}_\nu = S_\nu / \nu \text{ media de selecţie.}$$

Vom începe cu demonstrarea unor leme în care se estimează $P(\max_{\nu \geqslant n} | b_\nu S_\nu | \geqslant \varepsilon)$, unde $b_0, b_1, \ldots, b_N$ sînt numere reale.

Scanned with OKEN Scanner

LEMA 3. *Fie π o populație cu media zero și dispersia σ^2 și $\{b_\nu\}_0^N$ un șir de numere reale. Atunci pentru orice $\varepsilon > 0$ și $n = 1,2,\ldots,N$ avem*

$$P(\max_{\nu \geqslant n} |b_\nu S_\nu| \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}\left[\left(1 - \frac{1}{N}\right)\sum_n^{N-1} b_\nu^2 + \right.$$

$$\left. + \sum_{n+1}^{N-1} \nu\left(1 - \frac{\nu}{N}\right)\left(b_{\nu-1}^2\left(1 - \frac{2}{\nu}\right) - b_\nu^2\right)^+\right],$$

unde $a^+ = \max(a,0)$.

Demonstrație. Vom considera în locul expresiei cerute, expresia

$$P(\max_{\nu \leqslant n} |c_\nu S_\nu| \geqslant \varepsilon) \text{ cu } c_\nu = b_{N-\nu}.$$

Fie $\varepsilon > 0$ dat. Pentru $\nu = 0,1,\ldots,N$ fie I_ν funcția caracteristică a evenimentului

$$(\max_{i \leqslant \nu} c_i^2 S_i^2 < \varepsilon^2)$$

și $H_\nu = 1 - I_\nu$. Fie L primul indice ν (dacă există) pentru care $c_\nu^2 S_\nu^2 \geqslant \varepsilon^2$. Atunci

$$\varepsilon^2 H_n \leqslant \sum_0^{n-1} I_\nu (c_{\nu+1}^2 S_{\nu+1}^2 - c_\nu^2 S_\nu^2). \tag{96}$$

Pentru a demonstra această relație vom distinge două cazuri

a) $\max_{\nu \leqslant n} c_\nu^2 S_\nu^2 < \varepsilon$. În acest caz toți I_ν, $\nu = 0,1,\ldots,n$ sînt identic 1, iar H_n este identic nul. Deci membrul stîng este nul și cel drept (după reducerea termenilor) este $c_n^2 S_n^2 \geqslant 0$.

b) $\max_{\nu \leqslant n} c_\nu^2 S_\nu^2 \geqslant \varepsilon^2$. În acest caz $H_n \equiv 1$. Fie L primul indice (care acum există) pentru care $c_\nu^2 S_\nu^2 \geqslant \varepsilon^2$.

În această situație $I_\nu \equiv 1$ pentru $\nu = 0,1,\ldots,L-1$ și $I_\nu \equiv 0$ pentru $\nu = L,\ldots,n$, membrul drept este $c_L^2 S_L^2$ care este $\geqslant \varepsilon^2$.

Integrînd relația demonstrată obținem

$$\varepsilon^2 P(\max_{\nu \leqslant n} c_\nu^2 S_\nu^2 \geqslant \varepsilon^2) = \varepsilon^2 M H_n \leqslant \sum_0^{n-1} \int_{I_{\nu=1}} (c_{\nu+1}^2 S_{\nu+1}^2 - c_\nu^2 S_\nu^2) P(\mathrm{d}\omega) \tag{97}$$

Pentru $\nu = 0,\ldots,N$ fie B_ν σ-algebra generată de $S_0, S_1,\ldots,S_\nu$. Din principiul condiționării avem

$$M^{B_\nu} X_{\nu+1} = -\frac{S_\nu}{N - \nu}$$

Scanned with OKEN Scanner

Într-adevăr

$$\int\limits_{\left\{\begin{smallmatrix} S_1=\alpha_1 \\ \vdots \\ S_\nu=\alpha_\nu \end{smallmatrix}\right\}} M^{B_\nu} X_{\nu+1}\,\mathrm{d}P(\omega) = \int\limits_{\left\{\begin{smallmatrix} S_1=\alpha_1 \\ \vdots \\ S_\nu=\alpha_\nu \end{smallmatrix}\right\}} X_{\nu+1}\,\mathrm{d}P(\omega) =$$

$$= P(S_1=\alpha_1,\ldots,S_\nu=\alpha_\nu) \int\limits_{\left\{\begin{smallmatrix} S_1=\alpha_1 \\ \vdots \\ S_\nu=\alpha_\nu \end{smallmatrix}\right\}} X_{\nu+1}\,\mathrm{d}P(\omega)\,|\,S_1=\alpha_1,\ldots,S_\nu=\alpha_\nu) =$$

$$= P(S_1=\alpha_1,\ldots,S_\nu=\alpha_\nu)\int X_{\nu+1}\,\mathrm{d}P(\omega\,|\,X_1=\alpha_1,\ldots,X_\nu=\alpha_\nu-\alpha_{\nu-1}) =$$

$$= P(S_1=\alpha_1,\ldots,S_\nu=\alpha_\nu)\cdot\frac{-\alpha_\nu}{N-\nu},$$

deoarece media populației este zero și suma elementelor care au mai rămas în populație, dînd la o parte pe α_1, $\alpha_2-\alpha_1,\ldots,\alpha_\nu-\alpha_{\nu-1}$ este deci suma celor date la o parte, adică $-\alpha_\nu$ Avem:

$$\int\limits_{\left\{\begin{smallmatrix} S_1=\alpha_1 \\ \vdots \\ S_\nu=\alpha_\nu \end{smallmatrix}\right\}} S_\nu\,\mathrm{d}P = \alpha_\nu P(S_1=\alpha_1,\ldots,S_\nu=\alpha_\nu)$$

Folosind acest rezultat avem

$$M^{B_\nu} S_{\nu+1}^2 = M^{B_\nu} S_\nu^2 + 2M^{B_\nu} S_\nu X_{\nu+1} + M^{B_\nu} X_{\nu+1}^2 =$$

(98)

$$= S_\nu^2 + 2S_\nu\left(-\frac{S_\nu}{N-\nu}\right) + M^{B_\nu} X_{\nu+1}^2 = S_\nu^2\left(1-\frac{2}{N-\nu}\right) + M^{B_\nu} X_{\nu+1}^2.$$

Deoarece $\{I_\nu=1\}\in\mathfrak{B}_\nu$ ținînd seama de (97) și (98), avem

$$\varepsilon^2 P\left(\max_{\nu\leqslant n} c_\nu^2\, S_\nu^2 \geqslant \varepsilon^2\right) \leqslant \sum_0^{n-1}\int_{I_\nu=1} M^{B_\nu}\left(c_{\nu+1}^2 S_{\nu+1}^2 - c_\nu S_\nu^2\right)\mathrm{d}P(\omega) =$$

$$= \sum_0^{n-1}\int_{I_\nu=1} S_\nu^2\left[c_{\nu+1}^2\left(1-\frac{2}{N-\nu}\right) - c_\nu^2\right]\mathrm{d}P + \sum_0^{n-1} c_{\nu+1}^2\int_{I_\nu=1} M^{B_\nu} X_{\nu+1}^2\,\mathrm{d}P.$$

Înlocuind

$$\left[c_{\nu+1}^2\left(1-\frac{2}{N-n}\right) - c_\nu^2\right] \quad \text{cu} \quad \left[c_{\nu+1}^2\left(1-\frac{2}{N-\nu}\right) - c_\nu^2\right]^+$$

Scanned with OKEN Scanner

și apoi extinzînd domeniul de integrare la Ω, obținem

$$\varepsilon^2 P\left(\max_{\nu\leqslant n} c_\nu^2 S_\nu^2 \geqslant \varepsilon^2\right) \leqslant \sum_0^{n-1} MS_\nu^2\left[c_{\nu+1}^2\left(1-\frac{2}{N-\nu}\right)-c_\nu^2\right]^+ + \tag{99}$$

$$+\sum_0^{n-1} c_{\nu+1}^2 MX_{\nu+1}^2 = \sigma^2\left\{\left[\left(1-\frac{1}{N}\right)\Sigma c_\nu^2+\sum_1^{n-1}\nu\left(1-\frac{\nu}{N}\right)\right]\left[c_{\nu+1}^2\left(1-\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.-\frac{2}{N-\nu}\right)-c_\nu^2\right]^+\right\}.$$

Inegalitatea din lema 3 urmează din (99) și din egalitatea

$$P(\max_{\nu\geqslant n}|b_\nu S_\nu|\geqslant\varepsilon) = P(\max_{\nu\leqslant N-n}|b_{N-\nu}S_\nu|\geqslant\varepsilon), \tag{100}$$

care este o consecință imediată a principiului dualității.

Lema 4. *Fie π o populație cu media zero și dispersia σ^2. Pentru orice $\varepsilon>0$ și $n=1,2,\ldots,N$ avem*

$$P\left(\max_{\nu\geqslant n}|\bar{X}_\nu|\geqslant\varepsilon\right)\leqslant\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}\left(1-\frac{1}{N}\right)\sum_{\nu=n}^{N-1}\frac{1}{\nu^2}=\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{N}\right)C(n,N),$$

unde $C(n,N)\leqslant 1+n^{-1}$.

Demonstrație. Inegalitatea rezultă din lema 3 pentru $b_\nu=\frac{1}{\nu}$.

În acest caz

$$\left[\frac{1}{(\nu-1)^2}\left(1-\frac{2}{\nu}\right)-\frac{1}{\nu^2}\right]^+=0.$$

O margine superioară pentru $C(n,N)$ se obține în felul următor. Punînd $C(n,N)=0$ pentru $n=1,2,\ldots,N-1$, avem

$$C(n,N)=n(N-1)(N-n)^{-1}\sum_{\nu=n}^{N-1}\nu^{-2}. \tag{101}$$

Avem

$$\sum_{\nu=n}^{N-1}\nu^{-2}\leqslant\frac{1}{n^2}\sum_{\nu=n}^{N-2}\frac{1}{\nu(\nu+1)}=\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n}-\frac{1}{N-1};$$

În acest mod obținem

$$C(n,N)\leqslant\frac{N-n-1}{N-n}+\frac{N-1}{n(N-n)}\leqslant 1+n^{-1}.$$

În lema următoare vom estima

$P(\max_{\nu\geqslant n}|b_\nu S_\nu|\geqslant\varepsilon)$ în termeni de $M|S_n|$.

Scanned with OKEN Scanner

LEMA 5. Fie π *o populație cu media zero și dispersia* σ^2 *și* $\{b_\nu\}_0^N$ *un șir de numere nenegative pentru care* $\{\nu b_\nu\}_1^{N-1}$ *este descrescător. Atunci pentru orice* $\varepsilon > 0$ *și* $n = 1,2,\ldots,N$, *avem*

$$P(\max_{\nu \geqslant n} |b_\nu S_\nu| \geqslant \varepsilon) \leqslant \varepsilon^{-1} M|S_n|. \tag{102}$$

Demonstrație. Demonstrația este analogă celeia de la lema 3. Fie $c_\nu = b_{N-\nu}$. Atunci c_ν $(N - \nu)$ este descrescător fiind șirul inițial privit de la dreapta spre stînga. Pentru $\nu = 0,1,\ldots,N$, I_ν este funcția caracteristică a evenimentului

$$\max_{t \leqslant \nu} c_t S_t < \varepsilon$$

și $H_\nu = 1 - I_\nu$. Fie L primul indice ν (dacă există) pentru care $c_\nu S_\nu \geqslant \varepsilon$. Notînd $a^- = \min(0, a)$, obținem

$$\varepsilon H_n \leqslant -c_n S_n^- + \sum_0^{n-1} I_\nu (c_{\nu+1} S_{\nu+1} - c_\nu S_\nu). \tag{103}$$

Într-adevăr, dacă $\max_\nu c_\nu S_\nu < \varepsilon$ atunci membrul stîng este nul, iar membrul drept este

$$-c_n S_n^- + c_n S_n \geqslant 0.$$

Dacă $\max_\nu c_\nu S_\nu \geqslant \varepsilon$ atunci membrul stîng este ε, iar membrul drept

$$-c_n S_n^{-1} + c_L S_L \geqslant \varepsilon.$$

Analog, fie $\mathfrak{B}_\nu$ σ — algebra generată de $S_0, S_1, \ldots, S_\nu$. Atunci $\{I_\nu = 1\} \in \mathfrak{B}_\nu$ și integrînd relația (103), obținem

$$\varepsilon P(\max_{\nu \leqslant n} c_\nu S_\nu \geqslant \varepsilon) = \varepsilon M H_n \leqslant -c_n M S_n^- + \sum_0^{n-1} \int_{I_\nu = 1} c_{\nu+1} S_{\nu+1} - c_\nu S_\nu) \, dP =$$

$$= -c_n M S_n^- + \int_{I_\nu = 1} (c_{\nu+1} M^{B_\nu} S_{\nu+1} - c_\nu S_\nu) \, dP = \tag{104}$$

$$= -c_n M S_n^- + \sum_0^{n-1} \left(c_{\nu+1} \frac{N - (\nu+1)}{N - \nu} - c_\nu \right) \int_{I_\nu = 1} S_\nu \, dP,$$

deoarece

$$M^{B_\nu} S_{\nu+1} = M^{B_\nu} (S_\nu + X_{\nu+1}) =$$

$$= S_\nu - \frac{S_\nu}{N - \nu} = \frac{N - (\nu+1)}{N - \nu} S_\nu.$$

Scanned with OKEN Scanner

Din ipoteza că $c_\nu\ (N-\nu)$ este crescător, obținem

$$c_{\nu+1}\,\frac{N-(\nu+1)}{N-\nu}-c_\nu\geqslant 0.$$

Dacă vom arăta că integralele din ultima sumă sînt nepozitive atunci putem renunța la sumă și vom obține

$$P(\max_{\nu\leqslant n}\ c_\nu S_\nu\geqslant\varepsilon)\leqslant -\varepsilon^{-1}C_n E^- = (2\ \varepsilon)^{-1}\,C_n\,M|S_n|, \tag{105}$$

deoarece $|S_n| = S_n^- + S_n^+$ și media populației este zero

$$M(S_n^-) = -MS_n^+.$$

Pentru $\varepsilon>0$ definim pentru $t=0,1,\ldots,N$ evenimentele

$$A_t=\{S_t\geqslant\varepsilon \text{ și } S_\tau<\varepsilon \text{ pentru } \tau<t\}.$$

În acest caz $A_t\in\mathfrak{B}_t$ și

$$(I_\nu=0)=\bigcup_0^\nu A_t \text{ cu } A_t\cap A_s=\emptyset \text{ pentru } t\neq s. \tag{106}$$

Deoarece π are media zero, avem:

$$-\int_{I_\nu=1} S_\nu\,dP=\int_{I_\nu=0} S_\nu\,dP=\sum_{t=0}^{\nu}\int_{A_t} S_\nu\,dP=$$

$$=\sum_{t=0}^{\nu}\int_{A_t} M^{B_t}\,S_\nu\,dP=\sum_{t=0}^{\nu}\frac{N-\nu}{N-t}\int_{A_t} S_t\,dP\geqslant$$

$$\geqslant\varepsilon\sum_{t=0}^{\nu}\frac{N-\nu}{N-t}P(A_t)\geqslant 0$$

și (105) este complet demonstrată.

Am folosit faptul că

$$M^{B_t}S=M^{B_t}M^{B_{t+1}}\ldots M^{B_{\nu-1}}S_\nu=M^{B_t}\ldots M^{B_{\nu-2}}\frac{N-\nu}{N-\nu-1}S_{\nu-1}=\ldots$$

$$\ldots=\frac{N-\nu}{N-t}\,S_t\,.$$

Considerînd $-S_0,\ -S_1,\ldots,-S_N$ din (105) obținem

$$P(\min_{\nu\leqslant n}\ c_\nu S_\nu\leqslant-\varepsilon)\leqslant(2\ \varepsilon)^{-1}\,c_n\,M\,|S_n|. \tag{107}$$

Scanned with OKEN Scanner

Deci

$$P(\max_{\nu\leqslant n}|c_\nu S_\nu| \geqslant \varepsilon) \leqslant \varepsilon^{-1} c_n M|S_n|. \tag{108}$$

Folosind principiul dualităţii (108) conduce la

$$P(\max_{\nu\geqslant n}|b_\nu S_\nu| \geqslant \varepsilon) = P(\max_{\nu\leqslant n}|b_\nu S_{N-\nu}| \geqslant \varepsilon) =$$

$$= P(\max_{\nu\leqslant N-n}|c_{N-\nu} S_\nu| \geqslant \varepsilon) \leqslant \varepsilon^{-1} b_n M|S_{N-n}| = \varepsilon^{-1} b_n M|S_n|.$$

Pentru a aplica această lemă avem nevoie de un estimator pentru $M|S_n|$.

Următoarea lemă ne dă răspunsul la această problemă.

LEMA 6. *Fie $\lambda(x)$ o funcţie pară astfel încît pentru $x \geqslant 0$, $\lambda(x)/x$ este pozitivă şi nedescrescătoare în timp ce $\lambda(x)/x^2$ este necrescătoare. Pentru X cu media zero, avem*

$$M|S_n| \leqslant \lambda^{-1}(n)\left[\left(\frac{N-n}{N-1} M\lambda(X_1) + M(\lambda(X_1))^2\right)^{1/2} + M\lambda(X_1)\right]$$

unde $\lambda^{-1}(y)$ este inversa lui $\lambda(X)$ pentru $X \geqslant 0$.

Demonstraţie. Fixăm n şi definim pentru $\nu = 1,2,\ldots,N$, $X'_\nu = X_\nu$ dacă $|X_\nu| \leqslant \lambda^{-1}(n)$ şi $X'_\nu = 0$ în rest, $Y_\nu = X_\nu - X'_\nu$ şi $S'_\nu = X_1 + \ldots + X'_\nu$.

$X'_1, X'_2, \ldots, X'_N$ este o selecţie dintr-o populaţie π' care se obţine din π prin înlocuirea tuturor elementelor din π a căror valoare absolută depăşeşte $\lambda^{-1}(n)$ prin zero. Din inegalitatea lui Schwarz, obţinem

$$M|S_n| \leqslant M|S'_n| + M\left|\sum_1^n Y_\nu\right| \leqslant \sqrt{MS'^2_n} + nM|Y_1|. \tag{109}$$

Avem

$$MS'^2_n = \sigma^2(S'_n) + (MS'_n)^2 = n\left(1 - \frac{n}{N}\right)\left(1 + \frac{1}{N-n}\right)[MX'^2_1 -$$

$$- (MX'_1)^2 + n^2 (MX'_1)^2 = n(N-n)(N-1)^{-1} MX'^2_1 + \tag{110}$$

$$+ nN(n-1)(N-1)^{-1}(MX'_1)^2.$$

Deoarece $\lambda(X)/X^2$ este descrescătoare, pentru $n \geqslant 0$

$$MX'^2_1 = \int_{|X|\leqslant\lambda^{-1}(n)} \frac{X^2}{\lambda(X)} \lambda(X)\,dF_\pi(X) \leqslant \frac{\lambda^{-1}(n)}{n} M\lambda(X_1). \tag{111}$$

Din $\mu_\pi = 0$ şi deoarece $\frac{\lambda(X)}{X}$ este crescătoare pentru $X \geqslant 0$, avem

$$|MX'_1| = |MY_1| = \left|\int_{|x|>\lambda^{-1}(x)} \frac{x}{\lambda(x)} \lambda(x)\,dF_1(x)\right| \leqslant \frac{\lambda^{-1}(n)}{n} M\lambda(X_1). \tag{112}$$

Scanned with OKEN Scanner

Rezultatul dorit se obține introducînd estimațiile (111) și (112) în (110) și (109).

§13. Convergența mediilor de selecție

Fie $\{\pi_k\}_1^\infty$, un șir de populații, $X_{k1},\ldots,X_{kN_k}$ o selecție din π_k. $S_n^{(k)} = X_{k1} + \ldots + X_{kn}$, $n = 1,\ldots,N_k$

$$S_0^{(k)} = 0 \text{ și } \bar{X}_n^{(k)} = \frac{1}{n} S_n^{(k)}.$$

TEOREMA 32. *Fie $\{\pi_k\}_1^\infty$ un șir de populații. O condiție suficientă pentru ca $\bar{X}_n^{(k)} - \mu_k$ să conveargă tare la 0 pentru șirul $\{n_k\}_1^\infty$ de volume de selecție este ca*

$$\lim_{k\to\infty} \sigma_k^2 \left(\frac{1}{n_k} - \frac{1}{N_k}\right) = 0. \tag{113}$$

Dacă $\{\pi_k\}_1^\infty$ *satisface relația*

$$\lim_{A\to\infty} \sup_k \int_{|x|>A} x^2 \mathrm{d}F_k^c(x) = 0 \tag{114}$$

atunci relația (113) *este necesară pentru ca $\bar{X}_n^{(k)} - \mu_k$ să conveargă în probabilitatea la 0 pentru șirul de volume de selecție $\{n_n\}_1^\infty$.*

Demonstrație. Putem presupune că $\mu_k = 0$ pentru orice k. Suficiența rezultă din lema a doua.

Pentru demonstrarea necesității avem nevoie de următoarea lemă:

LEMA 7. *Dacă pentru un întreg l $S_l^{(k)} \to 0$ în probabilitate cînd $k\to\infty$, atunci $X_{k1}\to 0$ în probabilitate cînd $k\to 0$.*

Demonstrație. Presupunem că lema este falsă, anume că există numerele ε și ρ și un șir $\{k_\nu\}_1^\infty$ astfel încît

$$P(|X_{k_\nu 1}| \geqslant \varepsilon) \geqslant 2\rho$$

în timp ce

$$P(|S_l^{(k_\nu)}| \geqslant \varepsilon) \to 0 \text{ cînd } \nu\to\infty. \tag{115}$$

Atunci cel puțin una din inegalitățile

$$P(X_{k_\nu 1} \geqslant \varepsilon) \geqslant \rho \text{ și } P(X_{k_\nu 1} \leqslant -\varepsilon) \geqslant \rho$$

are loc pentru o infinitate de ν. Să presupunem că prima. Adică există un șir $(\pi_{k_\tau})_{\tau=1}^\infty$ astfel ca o mulțime de probabilități $\geqslant \rho$ de elemente din π_{k_τ} sînt $\geqslant \varepsilon$.

Scanned with OKEN Scanner

Astfel

$$P(S_l^{k_\tau} \geqslant l\,\varepsilon) \geqslant C_{N_{k_{\tau\rho}}}^{l} (C_{N_{k_\tau}}^{l})^{-1} \to \rho^l \text{ cînd } \tau \to \infty. \tag{116}$$

Atunci (115) şi (116) se contrazic reciproc.

Vom demonstra şi necesitatea teoremei tot prin reducere la absurd. Să presupunem că negaţia are loc, adică

$$\bar{X}_{n_k}^{(k)} \to 0 \text{ în probabilitate cînd } k \to \infty \tag{117}$$

$$\sigma_k^2 \left(\frac{1}{n_k} - \frac{1}{N_k}\right) \geqslant \rho > 0, \quad k = 1,2,\ldots \tag{118}$$

Ultima relaţie are loc pe un subşir care va fi pentru simplificare, tot şirul dat. Din relaţia (116)

$$\sigma_k^2 \leqslant c < \infty$$

şi deci din (118) rezultă că

$$\sup_k n_k < \infty.$$

Deci există un subşir $\{k_\nu\}_1^\infty$ astfel ca $n_k = l$. Din (117) şi din lema 7 urmează că $X_{k_\nu 1} \to 0$ cînd $\nu \to \infty$. Dar

$$P(|X_{k_\nu 1}| \geqslant \varepsilon) \geqslant P(\varepsilon \leqslant |X_{k_\nu 1}| \leqslant A) \geqslant A^{-2} \int_{\varepsilon \leqslant |X| \leqslant A} X^2 \, dF_{k_\nu}(X) \geqslant A^{-2} \left[\left(1 - \right.\right.$$

$$\left. - \frac{1}{N_{k_\nu}}\right) \sigma_{k_\nu}^2 - \int_{|x|>A} x^2 \, dF_k(X) - \varepsilon^2 \right] \tag{119}$$

Alegînd A astfel încît

$$\int_{|x|>A} x^2 \, dF_{k_\nu}(x) < \rho/6 \text{ şi } \varepsilon^2 < \rho/6$$

şi ţinînd cont de (118), de îndată ce $N_{k_\nu} \geqslant 2$

$$P(|X_{k_\nu 1}| \geqslant \varepsilon) \geqslant A^{-2}(\rho/2 - \rho/6 - \rho/6) > 0$$

şi astfel am obţinut o contradicţie.

COROLARUL 7. *Fie* $\{\pi_k\}_1^\infty$ *un şir de populaţii nedegenerat (nu există nici un subşir pentru care* $F_{n_k} \xrightarrow{w} F$ *cu* $F(X) = 0$ *pentru* $X \leqslant 0$ *şi* $F(x) = 1$ *pentru* $X > 0$ *şi care satisface* (114). *O condiţie necesară şi suficientă ca* $\bar{X}_n^{(k)} - \mu_k$

Scanned with OKEN Scanner

să conveargă tare la 0 pentru şirul $\{n_k\}$ de volume de selecţie este ca

$$\lim_{k\to\infty} n_k = \infty. \tag{120}$$

Demonstraţie. Din (114) urmează că $\sigma_k^2 \leqslant c < \infty$ şi deci dacă $\lim n_k = \infty$ atunci (113) are loc şi deci $\overline{X}_{n_k}^{(k)} - \mu_k \to 0$ tare. Într-adevăr, deoarece $\{\pi_k\}_1^\infty$ este nedegenerat va exista un $\rho > 0$ şi $\varepsilon > 0$ şi k_0 astfel ca $P(|X_{k1}| \geqslant \varepsilon) \geqslant \rho > 0$ pentru $k \geqslant k_0$. Atunci $\sigma_k^2 \geqslant \rho\varepsilon^2$ pentru $k \geqslant k_0$, deoarece converge tare, converge deci în probabilitate şi deci (113) are loc şi deoarece $\sigma_k^2 \geqslant \rho\varepsilon^2$ rezultă că

$$\lim_{k\to\infty} n_k = \infty.$$

Vom prezenta următoarea propoziţie, pe care o vom nota prin A (A) : $\overline{X}_n^{(k)} - \mu_k$ converge tare la 0 pentru orice s.s.s. $\{n_k\}_1^\infty$ pentru care $n_k \xrightarrow[k\to\infty]{} \infty$.

Corolarul 7 spune că condiţia (114) este suficientă pentru ca (A) să aibă loc.

Următoarea teoremă stabileşte această condiţie:

Teorema 33. *Condiţia necesară şi suficientă pentru ca (A) să aibe loc este ca $\{\pi_k\}_1^\infty$ să satisfacă condiţia*

$$\lim_{A\to\infty} \sup_k \int_{|x|>A} x\,\mathrm{d}F_k^c(x) = 0 \tag{121}$$

Demonstraţie. Fără a micşora generalitatea vom presupune că $\mu_k = 0$ pentru orice k.

Mai întîi demonstrăm suficienţa. Lemele 5 şi 6 arată că

$$P\left(\max_{\nu\geqslant n_k} |\overline{X}_\nu^{(k)}| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \varepsilon^{-1} \frac{\lambda^{-1}(n_k)}{n_k} \left[\left(\frac{N_k - n_k}{N_k - 1} M\lambda(X_{k1}) + \right.\right. \tag{122}$$

$$\left.\left. + (M\lambda(X_{k1}))^2)^{1/2} + M\lambda(X_{k1})\right)\right].$$

Suficienţa condiţiei (121) rezultă din faptul că cu ajutorul ei vom putea construi o funcţie $\lambda(X)$ care să îndeplinească condiţiile lemei 6 şi în plus

$$\frac{\lambda^{-1}(x)}{x} \to 0 \text{ cînd } n \to \infty \tag{123}$$

$$\sup_x M(\lambda(X_{k1})) < \infty. \tag{124}$$

Din (121) urmează că

$$\sup_k M\ |X_{k1}| < \infty$$

Scanned with OKEN Scanner

și că există un șir $\{A_t\}_1^\infty$, $A_t \nearrow \infty$ astfel încît

$$\sup_k \int_{|x|>A_t} |x| \, dF_k(x) \leqslant 3^{-t} \sup_k M|X_{k1}|, \quad t = 1,2,\ldots$$

Fie $\{\tau_t\}_1^\infty$ un șir cu următoarele proprietăți

1) $\tau_t \nearrow \infty$ cînd $t \to \infty$

2) $\tau_t \leqslant 2^t$, $t = 1,2,\ldots$

3) $\dfrac{\tau_{t+1} - \tau_t}{A_{t+1} - A_t} \leqslant \tau_t A_t^{-1}, t = 1,2,\ldots$

Definim pentru $x \geqslant 0$, $\rho(x)$ funcția al cărui grafic este interpolarea liniară între punctele (0,0), (A_1, τ_1), $(A_2, \tau_2)\ldots$ Se verifică funcția $\lambda(x) = |x| \rho(|x|)$ satisface condițiile lemei 6 și în plus (123), (124).

Într-adevăr $\lambda(x)$ este pară prin definiție; pentru $x \geqslant 0$ $\dfrac{\lambda(x)}{x} = \rho(x)$ și deoarece $\{\tau_t\}$ sînt pozitivi și nedescrescători așa va fi și $\dfrac{\lambda(x)}{x}$; pentru $x \geqslant 0$, trebuie să arătăm că $\dfrac{\lambda(x)}{x^2}$ este descrescătoare.

Este suficient să arătăm aceasta pentru $x_1 < x_2$ și $x_1, x_2 \in [A_t, A_{t+1}]$. Cînd cele două puncte nu cad în același interval se procedează din aproape în aproape.

Pentru $x \in [A_t, A_{t+1}]$, $\rho(x)$ este dat de ecuația

$$\frac{\rho(x) - \tau_t}{\tau_{t+1} - \tau_t} = \frac{x - A_t}{A_{t+1} - A_t}.$$

Deci

$$\frac{\rho(x)}{x} = \frac{\tau_{t+1} - \tau_t}{A_{t+1} - A_t}\left[1 - \frac{A_t}{x}\right] + \frac{\tau_t}{x}$$

$$\frac{\rho(x_1)}{x_1} - \frac{\rho(x_2)}{x_2} = \frac{\tau_{t+1} - \tau_t}{A_{t+1} - A_t}\left[A_t\left(\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1}\right)\right] + \tau_t\left(\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2}\right) =$$

$$= A_t \frac{\tau_{t+1} - \tau_t}{A_{t+1} - A_t} \frac{x_1 - x_2}{x_1 x_2} + \tau_t \frac{x_2 - x_1}{x_1 x_2} \geqslant \tau_t \frac{x_1 - x_2}{x_1 x_2} + \tau_t \frac{x_2 - x_1}{x_1 x_2} = 0.$$

Deci condițiile lemei 6 sînt îndeplinite.

Fie acum $x_n \nearrow \infty$. Trebuie să arătăm că $\dfrac{\lambda^{-1}(x_n)}{x_n} \to 0$.

Însă $\lambda^{-1}(x_n) = x_n'$ unde x_n' este soluția ecuației $\lambda(x_n') = x_n$, adică

$$x_n' \rho(x_n') = x_n$$

$$\frac{\lambda^{-1}(x_n)}{x_n} = \frac{x_n'}{x_n} = \frac{\dfrac{x_n}{\rho(x_n')}}{x_n} = \frac{1}{\rho(x_n')}.$$

Deoarece $x\rho(x)$ este strict crescătoare, atunci din $x_n \to \infty$ rezultă că și $x_n' \to \infty$. Cum $\tau_t \nearrow \infty$, atunci $\rho(x_n') \to \infty$ cînd $x_n' \to \infty$. Deci

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\lambda^{-1}(x_n)}{x_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\rho(x_n')} = 0.$$

Să arătăm acum că $\sup_k M\lambda(X_{k1}) < \infty$.

Avem

$$M\lambda(X_{k1}) = \int_{-\infty}^{\infty} |x|\ \rho(|x|)\ dF_k(x) = 2\int_0^{\infty} x\ \rho(x)\ dF_k(x) =$$

$$= 2\sum_{t=0}^{\infty} \int_{[A_t, A_{t+1})} x \left[\frac{\tau_{t+1} - \tau_t}{A_{t+1} - A_t}(x - A_t) + \tau_t\right] dF_k(x) \leqslant$$

$$\leqslant 2\sum_{t=0}^{\infty} \int_{[A_t, A_{t+1})} x \left[\frac{\tau_{t+1} - \tau_t}{A_{t+1} - A_t}(A_{t+1} - A_t) + \tau_t\right] dF_k(x) =$$

$$= 2\sum_{t=0}^{\infty} \int_{[A_t, A_{t+1}]} x\ \tau_{t+1}\, dF_k(x) \leqslant$$

$$\leqslant 2\sum_{t=0}^{\infty} 2^{t+1} \int_{(A_t, A_{t+1}]} x\ dF_k(x) \leqslant 4\sum_{t=0}^{\infty} 2^t \int_{(A_t, \infty)} x\, dF_k(x) \leqslant$$

$$\leqslant 4\sum_{t=0}^{\infty} \frac{2^t}{3^t} \sup M\,|X_{k1}| = c < \infty \text{ independent de (121).}$$

Să demonstrăm necesitatea lui (121).
Să arătăm că dacă (A) are loc, atunci pentru orice $\varepsilon > 0$, avem

(125) $$P(\max_{n \geqslant n_k} |X_{n_k}/n| \geqslant \varepsilon) \to 0 \text{ dacă } n_k \to \infty \text{ cînd } k \to \infty$$

(125) urmează din inegalitatea

$$P(\max_{n\geqslant n_k} |X_{k_n}/n| \geqslant \varepsilon) = P(\max_{n\geqslant n_k} |S_n^{(k)} - S_{n-1}^{(k)}/n| \geqslant \varepsilon) \leqslant$$

$$\leqslant P\left(\max_{n\geqslant n_k} |\bar{X}_n^{(k)}| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}\right) + P\left(\max_{n\geqslant n_k} \frac{n-1}{n} |\bar{X}_{n-1}^{(k)}| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}\right).$$

Vom da o demonstrație indirectă și vom presupune că (A) și prin urmare (125) sînt îndeplinite, însă nu este îndeplinită (121). Restrîngîndu-se la un subșir $\{\pi_k\}_1^{\infty}$, fără să introducem o nouă notație, va exista

Scanned with OKEN Scanner

un subșir de întregi $\{A_k\}_1^\infty$, $A_k \nearrow \infty$, astfel ca

$$\int_{|x|\geqslant A_k} |x|\, dF_k(x) \geqslant \rho > 0,\ k = 1, 2, \ldots \tag{126}$$

Putem presupune de asemenea că

$$P(|X_{k1}| \geqslant A_k) \to 0 \text{ cînd } k \to \infty \tag{127}$$

deoarece dacă nu ar fi așa, atunci (125) nu poate fi îndeplinită cu $n_k = A_k$ și $\varepsilon = 1$.

Mai putem presupune că

$$P(X_{k1}| > N_k) = 0 \text{ pentru } k \geqslant k_0 \tag{128}$$

deoarece din faptul că $\bar{X}_n^{(k)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ aproape sigur și deoarece mulțimea punctelor ω pe care este definit X_{kn} este finită atunci va exista un k_0 astfel că $|\bar{X}_n^{(k)}| < N_k$ aproape sigur pentru $k \geqslant k_0$. Atunci din inegalitatea folosită în demonstrația lui (118) rezultă (128).

Pentru $k \geqslant k_0$, avem

$$P(\max_{n\geqslant n_k} |X_{kn}/n| \geqslant 1) = 1 - P(|X_{kn_k}| < n_k, |X_{kn_k+1}| < n_k + 1, \ldots,$$

$$\ldots, |X_{kN_k}| < N_k) = 1 - \prod_{n=n_k}^{N_k} P(|X_{kn}| < n \mid |X'_{k\nu}| < \nu,\ \nu = n_k, \ldots, n-1) =$$

$$= 1 - \prod_{n=n_k}^{N_k} \frac{N_k\, P(|X_{k1}| < n) - (n - n_k)}{N_k - (n - n_k)} \geqslant 1 - \prod_{n=n_k}^{N_k} P(|X_{k1}| < n) =$$

$$= 1 - \prod_{n=n_k}^{N_k} \left(1 - \int_{|x|\geqslant n} dF_k(x)\right) \geqslant 1 - \exp\left\{-\sum_{n=n_k}^{N_k} \int_{|x|\geqslant n} dF_k(x)\right\} \geqslant$$

$$\geqslant 1 - \exp\left\{-\sum_{s=n_k}^{\infty} (s + 1 - n_k)\, P(s < |X_{k1}| < (s+1)\right\}. \tag{129}$$

Ultimul pas s-a obținut din (128). Datorită relației (127) putem alege $\{n_k\}_1^\infty$ astfel încît $n_k \leqslant A_k$, $k = 1, 2, \ldots$ și $n_k\, P(|X_{k1}| \geqslant A_k) = 0$ cînd $k \to \infty$. Din (129) și (126) obținem $\lim_{k\to\infty} P(\max_{n\geqslant n_k} |X_{kn}/n| \geqslant 1) \geqslant 1 - \overline{\lim_k} \exp\left\{-\right.$

$$\left. - \sum_{s=A_k}^{\infty} (s + n - n_k).\, P(s \leqslant |X_{k1}| < s+1)\right\} \geqslant 1 - \overline{\lim_k} \exp\left\{-\int_{|x|\geqslant A_k} |x| dF_k(x) + \right.$$

$$+ n_k\, P(|X_{k1}| \geqslant A_k) \geqslant 1 - e^{-\rho} > 0.$$

Acest rezultat contrazice (125), ceea ce arată necesitatea lui (121). Deci teorema 33 este demonstrată.

Rezultatele din paragrafele 9—13 se datoresc lui Bengt Rosén.

Scanned with OKEN Scanner

Capitolul III

SELECȚIA DINTR-O POPULAȚIE NORMALĂ

§1. Selecția dintr-o populație normală unidimensională

Din teorema II.18*) obținem :

TEOREMA 1. *Dacă* $X_1 \ldots, X_n$ *sînt variabile aleatoare independente* $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$, *atunci variabila aleatoare* $Y = \sum_1^n a_i X_i \sim N\left(\sum_1^n a_i \mu_i, \sum_1^n a_i^2 \sigma_i^2\right)$.

TEOREMA 2. *Dacă* $X_1, \ldots, X_n$ *este o selecție asupra unei variabile aleatoare* $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, *atunci* $\bar{X} \sim N(\mu, \sigma^2/n)$.

COROLARUL 1. *Variabila aleatoare*

$$U = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0, 1).$$

TEOREMA 3. *Dacă* $(X_{j1}, X_{j2} \ldots, X_{jn_j})_{1 \leqslant j \leqslant k}$ *sînt* k *selecții asupra variabilelor* $(X_j)_{1 \leqslant j \leqslant k}$ *independente și repartizate* $N(\mu_j, \sigma_j^2)$, *atunci* $Y = \sum_1^n a_j \bar{X}_j \sim N\left(\sum_1^n a_j \mu_j, \sum_1^n a_j^2 \sigma_j^2/n_j\right)$.

Demonstrație. Din teorema 2 urmează că $\bar{X}_j \sim N(\mu_j, \sigma_j^2/n_j)$, $1 \leqslant j \leqslant k$ și teorema este demonstrată ținînd seama de teorema 1.

Dacă în teorema 3 facem

$$a_1 = 1, \; a_2 = -1, \; a_3 = a_4 = \ldots = a_n = 0,$$

obținem

COROLARUL 2. *Variabila aleatoare* $\bar{X}_1 - \bar{X}_2 \sim N\left(\mu_1 - \mu_2, \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}\right)$

---

* este vorba de teorema 18 din Capitolul II.

Scanned with OKEN Scanner

şi

$$\frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2 - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{(\sigma_1^2/n_1) + (\sigma_2^2/n_2)}} \sim N(0,1).$$

TEOREMA 4. *Dacă* $X_1, X_2, \ldots, X_n$ *este o selecţie asupra unei variabile aleatoare* $X \sim N(0, 1)$ *şi* $\mathbf{A} = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ *este o matrice ortonormală, atunci variabilele*

$$V_j = \sum_{k=1}^{n} a_{jk} X_k, \quad 1 \leqslant j \leqslant n$$

sînt independente şi repartizate $N(0, 1)$.

Demonstraţie. Deoarece matricea $\boldsymbol{A}$ este ortonormală, pentru transformarea $\mathbf{V} = \mathbf{AX}$, unde

$$\mathbf{V}' = (V_1, \ldots, V_n) \text{ şi } \mathbf{X}' = (X_1, \ldots, X_n),$$

avem

$$\sum_{1}^{n} V_j^2 = \mathbf{V}'\mathbf{V} = \mathbf{X}'\mathbf{A}'\mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{X}'\mathbf{I}\mathbf{X} = \mathbf{X}'\mathbf{X} = \sum_{1}^{n} X_j^2$$

şi deoarece jacobianul transformării este 1, funcţia caracteristică corespunzătoare vectorului $(V_1, \ldots, V_n)$ se poate pune sub forma :

$$\varphi_{V_1, V_2, \ldots, V_n}(t_1, t_2, \ldots, t_n) = M[\exp(it_1 V_1 + it_2 V_2 + \ldots + it_n V_n)] =$$

$$= (2\pi)^{-n/2} \int_{R_n} \exp\left(i \sum_{1}^{n} t_k V_k\right) \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{1}^{n} x_k^2\right) \prod_{1}^{n} dx_k =$$

$$= (2\pi)^{-n/2} \int_{R_n} \exp\left(i \sum_{1}^{n} t_k V_k\right) \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{1}^{n} V_k^2\right) \prod_{1}^{n} dV_k =$$

$$= \prod_{1}^{n} (2\pi)^{-1/2} \int_{R} \exp\left(it_k V_k - \frac{1}{2} V_k^2\right) dV_k = \prod_{1}^{n} \exp\left(-\frac{t_k^2}{2}\right),$$

ceea ce reprezintă funcţia caracteristică corespunzătoare repartiţiei comune a n variabile aleatoare independente, fiecare urmînd o repartiţie $N(0, 1)$.

TEOREMA 5. *Dacă* $X_1, X_2, \ldots, X_n$ *este o selecţie asupra unei variabile aleatoare* $X \sim N(0, 1)$, *atunci variabilele aleatoare*

$$U = \sqrt{n}\,\bar{X} \text{ şi } V = \sum_{1}^{n} (X_j - \bar{X})^2$$

sînt independente $U \sim N(0, 1)$ şi $V \sim \chi^2(n-1)$.

Scanned with OKEN Scanner

Demonstrație. Considerăm transformarea $\mathbf{V} = \mathbf{AX}$, unde $\mathbf{X}$ și $\mathbf{V}$ sînt vectorii din teorema 4, iar $\mathbf{A}$ este matricea ortonormală :

$$\begin{pmatrix}
\frac{1}{\sqrt{n}} & \frac{1}{\sqrt{n}} & \frac{1}{\sqrt{n}} & \frac{1}{\sqrt{n}} & \cdots & \frac{1}{\sqrt{n}} & \cdots & \frac{1}{\sqrt{n}} \\
\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\
\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
\frac{1}{\sqrt{j(j-1)}} & \frac{1}{\sqrt{j(j-1)}} & \frac{1}{\sqrt{j(j-1)}} & \frac{1}{\sqrt{j(j-1)}} & \cdots & \frac{1-j}{\sqrt{j(j-1)}} & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
\frac{1}{\sqrt{n(n-1)}} & \frac{1}{\sqrt{n(n-1)}} & \frac{1}{\sqrt{n(n-1)}} & \frac{1}{\sqrt{n(n-1)}} & \cdots & \frac{1}{\sqrt{n(n-1)}} & \cdots & \frac{1-n}{\sqrt{n(n-1)}}
\end{pmatrix}$$

Din teorema 4 urmează că $V_1, V_2, \ldots, V_n$ sînt variabile independente și repartizate $N(0,1)$. Deoarece $V_1, V_2, \ldots, V_n$ sînt variabile aleatoare independente, urmează că și variabilele $V_1, V_2^2, \ldots, V_n^2$ sînt independente.

Avem :

$$V_1 = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_1^n X_i = \sqrt{n}\,\bar{X} = U$$

și cum matricea $\mathbf{A}$ este ortonormală :

$$\sum_2^n V_j^2 = \sum_1^n V_k^2 - V_1^2 = \sum_2^n X_k^2 - n\bar{X}^2 = V.$$

Rezultă că : variabilele U și V sînt independente și $U \sim N(0,1)$ (teorema 2). Deoarece $V_2 \ldots, V_n$ sînt variabile aleatoare independente, fiecare repartizată $N(0,1)$, urmează că $V \sim \chi^2(n-1)$, ceea ce demonstrează teorema.

COROLARUL 3. *Dacă $X_1, X_2, \ldots, X_n$ este o selecție asupra unei variabile aleatoare $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, atunci variabilele*

$$U = \frac{\sqrt{n}}{\sigma}(\bar{X} - \mu) \quad \text{și} \quad V = \frac{1}{\sigma^2}\sum_1^n (X_j - \bar{X})^2$$

sînt independente : $U \sim N(0,1)$ și $V \sim \chi^2(n-1)$.

Demonstrație. Variabila aleatoare $Y = \frac{1}{\sigma}(X - \mu) \sim N(0,1)$.

Fie $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ selecţia asupra variabilei Y corespunzătoare selecţiei $X_1, X_2, \ldots, X_n$, adică

$$Y_j = \frac{1}{\sigma}(X_j - \mu), \quad 1 \leqslant j \leqslant n.$$

Ne situăm în condiţiile teoremei 5, cu

$$U = \frac{\sqrt{n}}{\sigma}\left(\frac{1}{n}\sum_1^n X_k - \mu\right) = \sqrt{n}\sum_1^n \frac{X_j - \mu}{\sigma} = \sqrt{n}\bar{Y}$$

şi

$$V = \frac{1}{\sigma^2}\sum_1^n \left(X_j - \frac{1}{n}\sum_1^n X_k\right)^2 = \sum_1^n \left(\frac{X_j - \mu}{\sigma} - \frac{1}{n}\sum_1^n \frac{X_k - \mu}{\sigma}\right)^2 =$$

$$= \sum_1^n \left(Y_j - \frac{1}{n}\sum_1^n Y_k\right)^2 = \sum_1^n (Y_j - \bar{Y})^2.$$

TEOREMA 5'. *Dacă $X_1, \ldots, X_n$ este o selecţie asupra unei variabile aleatoare $X \sim N(0,1)$ atunci statisticile $\bar{X}$ şi m_2 sînt independente.*

Demonstraţie. Densitatea de repartiţie a variabilelor de selecţie este

$$(1) \quad \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n \exp\left(-\frac{1}{2}\Sigma x_i^2\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n \exp\left[-\frac{1}{2}(nm_2 + n\bar{x}^2)\right].$$

Deoarece (1) se exprimă în funcţie de $\bar{x}$ şi m_2 trebuie să găsim o transformare a elementului de volum $dv = dx_1 \ldots dx_n$.

În spaţiul n-dimensional considerăm vectorul unitate OQ (O originea) ai cărui cosinuşi directori sînt

$$\frac{1}{\sqrt{n}}, \frac{1}{\sqrt{n}}, \ldots, \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Dacă P este punctul ale cărui coordonate sînt variabilele de selecţie, PM perpendiculara din P pe OQ, atunci

i) OM are lungimea $\frac{x_1}{\sqrt{n}} + \frac{x_2}{\sqrt{n}} + \ldots + \frac{x_n}{\sqrt{n}} = \bar{x}\sqrt{n}$

ii) OP are lungimea $\sqrt{\sum_1^n x_i^2}$

şi deci

$$PM = \sqrt{\Sigma x_i^2 - n\bar{x}^2} = \sqrt{nm_2}.$$

Elementul de volum din P este egal cu produsul dintre creşterea elementară a lui OM, egală cu $\sqrt{n}\,d\bar{x}$ şi volumul elementar din hiperplanul

perpendicular pe MP. În hiperplan conturile avînd aceeaşi densitate sînt hipersferele de rază $\sqrt{nm_2}$ centrate în M şi în consecinţă elementul de volum este proporţional cu $k\mathrm{d}\tilde{x}m_2^{(n-2)/2}\,\mathrm{d}\sqrt{m_2}$. Urmează că probabilitatea elementară este proporţională cu

$$\exp\left[-\frac{1}{2}(nm_2+n\tilde{x}^2)\right]m_2^{\frac{n-2}{2}}\,\mathrm{d}\tilde{x}\,\mathrm{d}\sqrt{m_2} \tag{2}$$

(2) se poate despărţi în doi factori

$$\exp\left(-\frac{1}{2}n\tilde{x}^2\right)\mathrm{d}\tilde{x}, \tag{3}$$

$$\exp\left(-\frac{1}{2}nm_2\right)m_2^{\frac{n-2}{2}}\,\mathrm{d}\sqrt{m_2} \tag{4}$$

ceea ce arată că media şi dispersia de selecţie sînt independente.

TEOREMA 6. *Fie* $X_1, X_2, \ldots, X_n$ *o selecţie asupra unei variabile aleatoare* $X\sim N(0,1)$ *şi* $g(X_1, X_2, \ldots X_n)$ *o statistică astfel încît egalitatea*

$$g(x_1+a, x_2+a, \ldots, x_n+a) = g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

este adevărată pentru toate valorile $a, x_1, \ldots, x_n$.

În aceste condiţii statisticile

$$U = \sqrt{n}\,\bar{X}_n \text{ şi } V = g(X_1, X_2, \ldots, X_n)$$

sînt independente.

Demonstraţie. Cu ajutorul matricei **A** din teorema 5, transformăm variabilele $X_1, X_2, \ldots, X_n$. Variabilele transformate

$$U_1 = \sqrt{n}\,\bar{X}_n,$$

$$U_j = \frac{1}{\sqrt{j(j-1)}}\left[\sum_1^{j-1} X_k + (1-j)X_j\right] = \sqrt{\frac{j-1}{j}}(\bar{X}_{j-1} - X_j),\quad 2\leqslant j\leqslant n$$

sînt independente. Avem

$$X_2 - X_1 = -\sqrt{2}\,U_1$$

$$X_{j+1} - X_j = X_{j+1} - \frac{1}{j}\sum_1^j X_k - \left(\frac{j-1}{j}X_j - \frac{1}{j}\sum_1^{j-1} X_k\right) =$$

(5)

$$= X_{j+1} - \bar{X}_j - \frac{j-1}{j}(X_j - \bar{X}_{j-1}) = -\sqrt{\frac{j+1}{j}}\,U_{j+1} +$$

$$+\sqrt{\frac{j-1}{j}}\,U_j, \qquad 2\leqslant j\leqslant n,$$

Scanned with OKEN Scanner

$$a = -\left(X_1 + \frac{1}{\sqrt{1.2}}\,U_2 + \frac{1}{\sqrt{2.3}}\,U_3 + \ldots + \frac{1}{\sqrt{(n-1)n}}\,U_n\right)$$

atunci $X_j + a$ este o funcţie liniară $L_j(U_2, \ldots, U_n)$; pentru $j = 1, 2, \ldots, n$. Avem :

$$X_1 + a = -\left(\frac{1}{\sqrt{1.2}}\,U_2 + \frac{1}{\sqrt{2.3}}\,U_3 + \ldots + \frac{1}{\sqrt{(n-1)n}}\,U_n\right) = L_1(U_2, \ldots U_n)$$

şi prin inducţie din (5) urmează că

$$X_{j+1} + a = X_{j+1} - X_j + X_j + a = -\sqrt{\frac{j+1}{j}}\,U_{j+1} + \sqrt{\frac{j-1}{j}}\,U_j +$$

$$+ L_j(U_2, \ldots, U_n) = L_{j+1}(U_2, \ldots, U_n).$$

Rezultă că

$$g(X_1, \ldots, X_k) = g(X_1 + a, \ldots, X_n + a)$$

$$= g\,[L_1(U_2, \ldots, U_n), \ldots, L_n(U_2, \ldots, U_n)] =$$

$$= h(U_2, \ldots, U_n),$$

şi cum $U_2, \ldots, U_n$ sînt independente de U_1.

$$V = g(X_1, \ldots, X_n) = h(U_2, \ldots, U_n)$$

este independentă de $U_1 = U$.

TEOREMA 7. (Student (1908)). *Dacă $X_1, X_2, \ldots, X_n$ este o selecţie asupra unei variabile aleatoare $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, atunci*

$$t = \frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu)}{\sqrt{s^2}} \sim t(n-1).$$

Demonstraţie. Variabilele aleatoare

$$U = \frac{\sqrt{n}}{\sigma}\,(\bar{X} - \mu) \sim N(0,1)$$

şi

$$V = \frac{1}{\sigma^2}\sum_1^n (X_j - \bar{X})^2 \sim \chi^2(n-1)$$

sînt independente (Corolarul 3). Prin urmare variabila aleatoare

$$t = U/\sqrt{V(n-1)} = \frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu)}{\sqrt{s^2}} \sim t(n-1) \text{ (teorema 1.7)}$$

ceea ce demonstrează teorema.

Scanned with OKEN Scanner

TEOREMA 8. *Dacă* $X_1, X_2, \ldots, X_n$ *este o selecție asupra unei variabile aleatoare* $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, *atunci variabila aleatoare*

$$\frac{\sqrt{n}\,(\bar{X} - \mu_0)}{\sqrt{s^2}} \sim t\left(n-1,\ \frac{\sqrt{n}\,(\mu - \mu_0)}{\sigma}\right).$$

TEOREMA 9. *Fie* X_1 *și* X_2 *două variabile independente,* $X_1 \sim N(\mu_1, \sigma^2)$ *și* $X_2 \sim N(\mu_2, \sigma^2)$. *Dacă* $X_{11}, \ldots, X_{1n_1}$ $(X_{21}, X_{22}, \ldots, X_{2n_2})$ *este o selecție asupra variabilei* $X_1(X_2)$, *atunci statistica*

$$\frac{(\bar{X}_{n_1} - \bar{X}_{n_2}) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{V_1 + V_2}} \sqrt{\frac{n_1 + n_2 - 2}{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}},$$

unde $V_i = \sum_{j=1}^{n_i} (X_{ij} - \bar{X}_{n_i})^2$, $i=1,2$ *este repartizată* $t(n_1+n_2-2)$.

Demonstrație. Variabila aleatoare

$$U = \frac{(\bar{X}_{n_1} - \bar{X}_{n_2}) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sigma\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \sim N(0,1) \quad \text{(corolarul 2, cu } \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2\text{)}.$$

Variabila aleatoare $V = (V_1/\sigma^2) + (V_2/\sigma^2)$ este suma a două variabile aleatoare independente: $(V_1/\sigma^2) \sim \chi^2(n_1-1)$ și $(V_2/\sigma^2) \sim \chi^2(n_2-1)$ (corolarul 3). Cum repartiția χ^2 este stabilă, rezultă că $V \sim \chi^2(n_1+n_2-2)$ și deoarece vectorii aleatori $(\bar{X}_{n_1}, V_1)$ și $(\bar{X}_{n_2}, V_2)$ sînt independenți datorită faptului că X_1 și X_2 sînt independente, rezultă că $\bar{X}_{n_1} - \bar{X}_{n_2}$ și $V_1 + V_2$ sînt independente; deci U și V sînt independente și conform teoremei I.7, variabila aleatoare $t = U/\sqrt{V/(n_1+n_2-2)} \sim t(n_1+n_2-2)$.

TEOREMA 10. *Fie* X_1 *și* X_2 *două variabile aleatoare independente,* $X_1 \sim N(\mu_1, \sigma^2)$ *și* $X_2 \sim N(\mu_2, \sigma^2)$, σ^2 *cunoscută și* $\mu_1 - \mu_2 = \theta$. *Dacă* $X_{11}, \ldots, X_{1n_1}$ $(X_{21}, \ldots, X_{2n_2})$ *este o selecție asupra variabilei* $X_1(X_2)$ *atunci variabila aleatoare*

$$\sqrt{\frac{n_1 n_2}{n_1 + n_2}}\,(\bar{X}_{n_1} - \bar{X}_{n_2}) \Big/ \sqrt{\frac{V_1 + V_2}{n_1 + n_2 - 2}}$$

este repartizată $t\left(n_1 + n_2 - 2,\ \frac{\theta}{\sigma}\sqrt{\frac{n_1 n_2}{n_1 + n_2}}\right)$.

TEOREMA 11. *Fie* X_1 *și* X_2 *două variabile aleatoare independente,* $X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ *și* $X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$. *Dacă* $X_{11}, \ldots, X_{1n_1}$ $(X_{21}, \ldots, X_{2n_2})$ *este o selecție asupra variabilei* $X_1(X_2)$, *atunci*

$$\frac{s_1^2}{s_2^2} \sim \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_2}\right)^2 F(n_1 - 1,\ n_2 - 1).$$

Demonstrația rezultă din corolarul 3 și din definiția I.9.

Scanned with OKEN Scanner

§2. Selecția dintr-o populație normală bidimensională

Fie $(X_1, Y_1), \ldots, (X_n, Y_n)$ o selecție asupra unui vector aleator (X, Y) ce are o repartiție normală bidimensională cu densitatea

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2(1-\rho^2)^{1/2}} \times$$

$$\times \exp\left\{\frac{1}{2(1-\rho)^2}\left[\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2 - \frac{2\rho(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2\right]\right\}.$$

TEOREMA 12. (Fisher (1915)). *În selecțiile din populații normale bidimensionale mediile de selecție sînt în întregime independente de dispersiile și covariantele de selecție.*

Demonstrație. Probabilitatea elementară a vectorilor de selecție este

$$\frac{1}{(2\pi\sigma_1\sigma_2)^n(1-\rho^2)^{n/2}}\left\{\exp -\frac{1}{2(1-\rho^2)}\Sigma\left(\frac{x_j-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2 - \right.$$

(6)

$$\left. - 2\rho\,\Sigma\frac{(x_j-\mu_1)(y_j-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \Sigma\left(\frac{y_j-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2\right\} dx_1\,dy_1\ldots dx_n\,dy_n.$$

Cu notațiile

(7)

$$\begin{cases} \bar{x} = \dfrac{1}{n}\Sigma x_i, \quad \bar{y} = \dfrac{1}{n}\Sigma y_i \\ s_1^2 = \dfrac{1}{n}\Sigma(x_i-\bar{x})^2, \quad s_2^2 = \dfrac{1}{n}\Sigma(y_j-\bar{y})^2 \\ r = \dfrac{1}{n}\Sigma(x_i-\bar{x})(y_j-\bar{y})/s_1 s_2, \end{cases}$$

avem

$$\Sigma\left(\frac{x_i-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2 = \frac{n}{\sigma_1^2}[s_1^2 + (\bar{x}-\mu_1)^2],$$

$$\Sigma\left(\frac{y_i-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2 = \frac{n}{\sigma_2^2}[s_2^2 + (\bar{y}-\mu_2)^2]$$

și

$$\Sigma\left(\frac{x_i-\mu_1}{\sigma_1}\right)\left(\frac{y_j-\mu_2}{\sigma_2}\right) = \frac{r\,n s_1 s_2}{\sigma_1\sigma_2} + n\,\frac{(\bar{x}-\mu_1)(\bar{y}-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}$$

Scanned with OKEN Scanner

ceea ce permite să scriem exponenţiala din (6) sub forma

$$-\frac{n}{2(1-\rho^2)}\left\{\left[\left(\frac{\bar{x}-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2 - 2\rho\frac{\bar{x}-\mu_1}{\sigma_1}\cdot\frac{\bar{y}-\mu_2}{\sigma_2} + \left(\frac{\bar{y}-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2\right] + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{s_1^2}{\sigma_2^2} - 2\rho\frac{s_1 s_2}{\sigma_1\sigma_2}r + \frac{s_2^2}{\sigma_2^2}\right)\right\}.$$

Determinăm repartiţia comună a statisticilor definite în (7). În acest scop, ţinînd seama de (28) considerăm elementul de volum. Dacă P reprezintă punctul $(x_1\, x_2, \ldots, x_n)$ în spaţiul de selecţie n-dimensional al variabilei X şi Q reprezintă punctul $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ în spaţiul de selecţie n-dimensional al variabilei Y şi dacă P^*, Q^* sînt punctele $(\bar{x}, \bar{x}, \ldots, \bar{x})$, $(\bar{y}, \bar{y}, \ldots, \bar{y})$, atunci pentru orice r dat, avem :

$$r = \frac{\Sigma\,(x_i - \bar{x})\,(y_j - \bar{y})}{n s_1 s_2} = \frac{\Sigma\,(x - \bar{x})\,(y_j - \bar{y})}{\sqrt{\Sigma(x_i - \bar{x})^2\,\Sigma(y_j - \bar{y})^2}},$$

ceea ce arată că r este cosinusul unghiului θ dintre PP^* şi QQ^*, astfel încît dacă P şi r sînt fixe, Q variază în conul, din spaţiul variabilei Y, obţinînd rotind Q^*Q astfel încît unghiul făcut cu P^*P este constant.

Elementul de volum în spaţiul n-dimensional al variabilei X este proporţional cu $s_1^{n-2}\, ds_1\, d\bar{x}$ (teorema 5'). Pentru r, $\bar{y}$ şi s_2 daţi, punctul Q variază într-o zonă a hipersferei $(n-1)$ dimensionale de centru $\bar{y}$ şi rază $s_2\sqrt{n}$. Zona are raza

$$s_2\sqrt{n}\sin\theta = s_2\sqrt{n}(1-r^2)^{1/2}$$

şi grosimea

$$s_2\sqrt{n}\,d\theta = s_2\sqrt{n}\,dr/(1-r^2)^{1/2}.$$

Conţinutul este proporţional cu

$$[s_2\sqrt{n}\,(1-r^2)^{1/2}]^{n-3}\;\frac{s_2\sqrt{n}\,dr}{(1-r^2)^{1/2}}.$$

Prin urmare elementul de volum se poate scrie :

$$dv \simeq s_1^{n-2}\, ds_1\, d\bar{x}\cdot s_2^{n-2}\,(1-r^2)^{\frac{n}{2}-2}\, ds_2\, d\bar{y}\, dr =$$

(9)

$$= s_1^{n-2}\, s_2^{n-2}\, ds_1\, ds_2\,(1-r^2)^{\frac{n}{2}-2}\, dr\, d\bar{x}\, d\bar{y}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Din (6), (8) şi (9) probabilitatea elementară a statisticilor definite în (7) este proporţională cu

$$\exp\left\{-\frac{n}{2(1-\rho^2)}\left[\left(\frac{\bar{x}-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2-2\rho\frac{(\bar{x}-\mu_1)(\bar{y}-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\left(\frac{\bar{y}-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2\right]-\right.$$

(10)

$$\left.-\frac{n}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{s_1^2}{\sigma_1^2}-2\rho r\frac{s_1 s_2}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{s_2^2}{\sigma_2^2}\right]\right\}\mathrm{d}v,$$

ceea ce demonstrează teorema.

Observaţie. Din (10) obţinem : probabilitatea elementară a mediilor de selecţie proporţională cu

$$\exp\left\{-\frac{n}{2(1-\rho^2)}\left[\left(\frac{\bar{x}-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2-2\rho\frac{(\bar{x}-\mu_1)(\bar{y}-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\left(\frac{\bar{y}-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2\right]\right\}\mathrm{d}\bar{x}\,\mathrm{d}\bar{y}$$

(11)

probabilitatea elementară a dispersiilor şi covarianţelor de selecţie proporţională cu

$$\exp\left\{-\frac{n}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{s_1^2}{\sigma_1^2}-2\rho r\frac{s_1 s_2}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{s_2^2}{\sigma_2^2}\right]\right\}(s_1 s_2)^{n-2}(1-r^2)^{\frac{n}{2}-2}\,\mathrm{d}s_1\,\mathrm{d}s_2\,\mathrm{d}r.$$

(12)

Din (11) rezultă că repartiţia mediilor de selecţie are forma normală bidimensională cu

$$M(\bar{x})=\mu_1,\ M(\bar{y})=\mu_2,\ D^2(\bar{x})=\frac{\sigma_1^2}{n},\ D^2(\bar{y})=\frac{\sigma_2^2}{n}$$

şi $\operatorname{cov}(\bar{x},\bar{y})=\sigma_1\sigma_2\rho/n$.

TEOREMA 13. (Fisher (1915)). *Probabilitatea elementară a statisticilor* s_1, s_2 *şi* r *este*

$$\frac{n^{n-1}}{\pi(n-3)!}(\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2})^{-(n-1)}\exp\left\{-\frac{n}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{s_1^2}{\sigma_1^2}-\frac{2\rho r s_1 s_2}{\sigma_1\sigma_2}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{s_2^2}{\sigma_2^2}\right]\right\}(s_1 s_2)^{n-2}(1-r^2)^{\frac{n}{2}-2}\mathrm{d}s_1\,\mathrm{d}s_2\,\mathrm{d}r.$$

Demonstraţie. Pentru a determina probabilitatea elementară a statisticilor s_1, s_2 şi r trebuie să găsim constanta ce trebuie ataşată expresiei (12), astfel încît

$$\int \mathrm{d}F = 1$$

Scanned with OKEN Scanner

Pentru transformarea

$$(14)\qquad \begin{cases} a = \dfrac{s_1^2}{\sigma_1^2} \cdot \dfrac{n}{2(1-\rho^2)} \\ b = \dfrac{r s_1 s_2}{\sigma_1 \sigma_2} \cdot \dfrac{n}{2(1-\rho^2)} \\ c = \dfrac{s_2^2}{\sigma_2^2} \cdot \dfrac{n}{2(1-\rho^2)} \end{cases}$$

avem

$$\frac{D(a,b,c)}{D(s_1,s_2,r)} = \begin{vmatrix} \dfrac{s_1}{\sigma_1^2} \cdot \dfrac{n}{(1-\rho^2)} & 0 & 0 \\ \dfrac{r s_2}{\sigma_1 \sigma_2} \cdot \dfrac{n}{2(1-\rho^2)} & \dfrac{r s_1}{\sigma_1 \sigma_2} \cdot \dfrac{n}{2(1-\rho^2)} & \dfrac{s_1 s_2}{\sigma_1 \sigma_2} \cdot \dfrac{n}{2(1-\rho^2)} \\ 0 & \dfrac{s_2}{\sigma_2^2} \cdot \dfrac{n}{1-\rho^2} & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{s_1^2 s_2^2}{\sigma_1^3 \sigma_2^3} \frac{n^3}{2(1-\rho^2)^3} = \frac{2acn}{\sigma_1 \sigma_2 (1-\rho^2)} .$$

Se observă că $r^2 = b^2/ac$.

Ţinînd seama de transformarea (10) şi de (12) obţinem :

$$\int_0^\infty \int_{-\sqrt{ac}}^{\sqrt{ac}} \int_0^\infty \left(\frac{2\sigma_1 \sigma_2 (1-\rho^2)}{n}\right)^{n-2} (ac)^{\frac{n}{2}-1} \left(1 - \frac{b^2}{ac}\right)^{\frac{n}{2}-2} \frac{\sigma_1 \sigma_2 (1-\rho^2)}{2acn} \times$$

$$(15)\qquad \times \exp(-a + 2\rho b - c)\, s\, da\, db\, dc =$$

$$= \frac{2^{n-3} (\sigma_1 \sigma_2)^{n-1} (1-\rho^2)^{n-1}}{n^{n-1}} \int_0^\infty \int_{-\sqrt{ac}}^{\sqrt{ac}} \int_0^\infty (ac - b^2)^{\frac{n}{2}-2} \times$$

$$\times \exp(-a + 2\rho b - c)\, da\, db\, dc.$$

Dacă în integrala din (15) facem transformarea

$$u = a - \frac{b^2}{c}$$

Scanned with OKEN Scanner

obținem

$$\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \int_0^\infty u^{\frac{n}{2}-2} c^{\frac{n}{2}-2} \exp(-u) \exp\left(2\rho b - c - \frac{b^2}{c}\right) du\, db\, dc =$$

$$= \Gamma\left(\frac{n}{2}-1\right) \int_{-\infty}^\infty \int_0^\infty \exp\left[-\frac{1}{c}((b-\rho c)^2 + (1-\rho^2)c^2)\right] c^{\frac{n}{2}-2} db\, dc =$$

$$= \sqrt{\pi}\, \Gamma\left(\frac{n}{2}-1\right) \int_0^\infty c^{\frac{n+1}{2}-2} \exp[-(1-\rho^2)c]\, dc =$$

$$= \sqrt{\pi}\, \Gamma\left(\frac{n}{2}-1\right) \frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{(1-\rho^2)^{\frac{n-1}{2}}},$$

și cum

$$\Gamma\left(\frac{n}{2}-1\right) \Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right) = (n-3)!\, 2^{-(n-3)} \sqrt{\pi},$$

urmează că

$$\iiint u^{\frac{n}{2}-2} c^{\frac{n}{2}-2} \exp(-u) \exp\left(2\rho b - c - \frac{b^2}{c}\right) du\, db\, dc =$$

(16)

$$= \frac{\pi (n-3)!}{2^{n-3}(1-\rho^2)^{\frac{n-1}{2}}}.$$

Folosind (15) și (16), obținem (13).

TEOREMA 14. (Fisher (1915)). *Probabilitatea elementară a coeficientului de corelație de selecție este*

$$(17) \qquad \frac{(1-\rho^2)^{\frac{n-1}{2}}}{\pi (n-3)!} (1-r^2)^{\frac{n}{2}-2} \frac{d^{n-2}}{d(r\rho)^{n-2}} \left[\frac{\arccos(-\rho r)}{\sqrt{1-\rho^2 r^2}}\right] dr.$$

Demonstrație. În (13) facem transformarea

$$\alpha = \frac{s_1 s_2}{\sigma_1 \sigma_2}, \quad \beta = \ln \frac{\sigma_2 s_1}{\sigma_1 s_2}, \quad r = r.$$

Avem :

$$(18) \qquad \frac{D(\alpha, \beta, r)}{D(s_1 s_2, r)} = \begin{vmatrix} \frac{s_2}{\sigma_1 \sigma_2} & \frac{s_1}{\sigma_1 \sigma_2} & 0 \\ \frac{1}{s_1} & -\frac{1}{s_2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -\frac{2}{\sigma_1 \sigma_2}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Exponenţiala din (13) se scrie

$$\exp\left\{-\frac{n}{2(1-\rho^2)}\left[\alpha e^{\beta}-2\rho r\alpha+\alpha e^{-\beta}\right]\right\}$$

sau

$$\exp\left\{-\frac{n}{(1-\rho^2)}\alpha\left[\operatorname{ch}\beta-\rho r\right]\right\}. \tag{19}$$

Ţinînd seama de (18) şi (19), (13) se scrie

$$\frac{n^{n-1}}{\pi(1-\rho^2)^{\frac{n-1}{2}}(n-3)!}\alpha^{n-2}\exp\left[-\frac{n}{(1-\rho^2)}\alpha(\operatorname{ch}\beta-\rho r)\right]d\alpha d\beta(1-r^2)^{\frac{n}{2}-2}dr$$

Deoarece

$$\int_0^{\infty}\alpha^{n-2}\exp\left[-\frac{n}{(1-\rho^2)}\alpha(\operatorname{ch}\beta-\rho r)\right]d\alpha=\frac{\Gamma(n-1)}{\left[\frac{n}{1-\rho^2}(\operatorname{ch}\beta-\rho r)\right]^{n-1}}$$

urmează că probabilitatea elementară corespunzătoare variabilelor β şi r este

$$\frac{\Gamma(n-1)}{\pi(n-3)!}(1-\rho^2)^{\frac{n-1}{2}}\frac{(1-r^2)^{\frac{n}{2}-2}}{(\operatorname{ch}\beta-\rho r)^{n-1}}. \tag{20}$$

Pentru a afla probabilitatea elementară a coeficientului de corelaţie de selecţie integrăm (20) în raport cu β între 0 şi ∞.
Cu $-\rho r=\cos\theta$, avem

$$\int_0^{\infty}\frac{d\beta}{\operatorname{ch}\beta+\cos\theta}=\frac{\theta}{\sin\theta},$$

Într-adevăr

$$\int_0^{\infty}\frac{2d\beta}{e^{\beta}+e^{-\beta}+2\cos\theta}=2\int_1^{\infty}\frac{du}{u\left(u+\frac{1}{u}+2\cos\theta\right)}=$$

$$=2\int_1^{\infty}\frac{du}{u^2+2(\cos\theta)u+1}=2\int_1^{\infty}\frac{du}{(u+\cos\theta)^2+1-\cos^2\theta}=$$

$$=2\int_1^{\infty}\frac{du}{(u+\cos\theta)^2+\sin^2\theta}=\frac{2}{\sin\theta}\operatorname{arc\,tg}\frac{u+\cos\theta}{\sin\theta}\Big|_1^{\infty}=$$

$$=\frac{2}{\sin\theta}\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arc\,tg}\frac{1+\cos\theta}{\sin\theta}\right).$$

Scanned with OKEN Scanner

Cum

$$1+\cos\theta=2\cos^2\frac{\theta}{2},\quad \sin\theta=2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2},$$

urmează că

$$\int_0^\infty\frac{d\beta}{ch\beta+\cos\theta}=\frac{2}{\sin\theta}\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arc\,tg}\frac{\cos\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}\right)$$

$$=\frac{2}{\sin\theta}\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arc\,tg}\left(\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}\right)\right)=$$

$$=\frac{2}{\sin\theta}\left[\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}\right)\right]=\frac{2}{\sin\theta}\frac{\theta}{2}=\frac{\theta}{\sin\theta}.$$

Fie

$$I=\int_0^\infty\frac{d\beta}{ch\beta+\cos\theta}=\frac{\theta}{\sin\theta}.$$

Avem

$$\frac{d}{d(-\cos\theta)}I=\int_0^\infty\frac{d\beta}{(ch\beta+\cos\theta)^2}=\frac{d}{d(-\cos\theta)}\left(\frac{\theta}{\sin\theta}\right),$$

$$\frac{d^2}{d(-\cos\theta)^2}I=\int_0^\infty\frac{2!\,d\beta}{(ch\beta+\cos\theta)^3}=\frac{d^2}{d(-\cos\theta)^2}\left(\frac{\theta}{\sin\theta}\right),$$

$$\frac{d^3}{d(-\cos\theta)^3}I=\int_0^\infty\frac{3!\,d\beta}{(ch\beta+\cos\theta)^4}=\frac{d^3}{d(-\cos\theta)^3}\left(\frac{\theta}{\sin\theta}\right),$$

. . . . . .

$$\frac{d^{n-2}}{d(-\cos\theta)^{n-2}}I=\int_0^\infty\frac{(n-2)!\,d\beta}{(ch\beta+\cos\theta)^{n-1}}=\frac{d^{n-2}}{d(-\cos\theta)^{n-2}}\left(\frac{\theta}{\sin\theta}\right)$$

sau

$$\frac{d^{n-2}}{d(-\cos\theta)^{n-2}}I=\Gamma(n-1)\int_0^\infty\frac{d\beta}{(ch\beta+\cos\theta)^{n-1}}=$$

$$=\frac{d^{n-2}}{d(-\cos\theta)^{n-2}}\left(\frac{\theta}{\sin\theta}\right).$$

Scanned with OKEN Scanner

Cu aceste rezultate, obţinem pentru r, probabilitatea elementară

$$\frac{(1-\rho^2)^{\frac{n-1}{2}}}{\pi(n-3)!}(1-r^2)^{\frac{n}{2}-2}\frac{d^{n-2}}{d(-\cos\theta)^{n-2}}\left(\frac{\theta}{\sin\theta}\right)dr =$$

(21)

$$=\frac{(1-\rho^2)^{\frac{n-1}{2}}}{\pi(n-3)!}(1-r^2)^{\frac{n}{2}-2}\frac{d^{n-2}}{d(\rho r)^{n-2}}\left[\frac{\arccos(-\rho r)}{\sqrt{1-\rho^2 r^2}}\right]dr,$$

ceea ce demonstrează teorema.

Observaţii. i) Dacă $\rho = 0$, (21) devine

(22)
$$\frac{1}{B\left(\frac{n}{2}-1,\frac{1}{2}\right)}(1-r^2)^{\frac{n}{2}-2}\,dr.$$

ii) Hotteling (1953) exprima (21) sub forma unei serii hipergeometrice. În acest scop în

(23)
$$I_{n-1}=\int_0^\infty \frac{d\beta}{(\mathrm{ch}\beta-\rho r)^{n-1}}$$

face schimbarea

$$\mathrm{ch}\,\beta = (1-\rho r z)/(1-z).$$

Obţinem

$$I_{n-1}=\frac{1}{\sqrt{2}(1-\rho r)^{n-\frac{3}{2}}}\int_0^1 z^{-\frac{1}{2}}(1-z)^{n-2}\left[1-\frac{1}{2}(1+\rho r)z\right]^{-\frac{1}{2}}dz.$$

Dezvoltînd $\left[1-\frac{1}{2}(1+\rho r)z\right]^{-\frac{1}{2}}$ în serie şi integrînd-o termen cu termen, obţinem

$$I_{n-1}=\frac{B\left(\frac{1}{2},\ n-1\right)}{\sqrt{2}(1-\rho r)^{n-\frac{3}{2}}}F\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ n-\frac{1}{2},\ \frac{1+\rho r}{2}\right).$$

De aci rezultă o dezvoltare într-o serie foarte rapid convergentă. Asimptotic, pentru $r>\rho$, obţinem

$$1-F(r)\simeq\frac{(n-2)}{(n-1)^2\sqrt{2}B\left(\frac{1}{2},\ n-\frac{1}{2}\right)}\cdot$$

(24)

$$\cdot\frac{(1-\rho^2)^{\frac{n-1}{2}}(1-r^2)^{\frac{n}{2}-1}}{(r-\rho)(1-\rho r)^{n-5/2}}\left(1+0\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

Scanned with OKEN Scanner

Se observă că

$$M(r) = \rho - \frac{\rho(1-\rho^2)}{2n} + \dots$$

(25)

$$D^2(r) = \frac{(1-\rho^2)^2}{n} \cdot 0\left(\frac{1}{n}\right)$$

Variabila $(\rho - r)\sqrt{n}/(1-\rho^2)$ este asimptotic $N(0, 1)$.

Folosirea formulei (25) prezintă două limitări.

În primul rînd ea se bazează pe ρ — coeficientul de corelaţie teoretic a cărui mărime este de obicei necunoscută. Adeseori se foloseşte valoarea lui r obţinută din selecţie, ca mărime aproximativă a lui ρ, fapt ce conduce la erori în special pentru valori mici ale lui n. Limitarea semnalată dispare de îndată ce $\rho = 0$.

Cea de a doua limitare se referă îa interpretarea lui $D(r)$ ca abatere medie pătratică a repartiţiei normale pentru r rezultat din selecţie. La selecţiile cu volum mic repartiţia lui r se deosebeşte considerabil de repartiţia normală, mai ales pentru valori mari ale lui ρ.

Dacă ρ este totuşi aproape de unitate, atunci n trebuie să fie foarte mare, pentru ca formula (17) să poată fi aplicabilă.

Evitarea limitărilor care decurg din cauza abateriilor repartiţiei statisticii r faţă de repartiţia normală, a devenit posibilă prin transformarea propusă de Fisher (1921). Fisher a arătat că repartiţia variabilei

$$z = \frac{1}{2}\log\frac{1+r}{1-r}$$

este apropiată de cea normală pentru valori mici ale lui n.

Avem

(26) $$M(z) = \frac{1}{2}\log\frac{1+\rho}{1-\rho} + \frac{\rho}{2(n+1)} + \dots; D^2(z) \simeq \frac{1}{n-3}.$$

Hotelling (1953) arată că variabila aleatoare

$$z^* = z - (3z + r)/(4n)$$

are o repartiţie mai apropiată de cea normală.

TEOREMA 15. *Dacă vectorul aleator* (X, Y) *este repartizat normal cu coeficientul de corelaţie* $\rho = 0$, *atunci variabila aleatoare*

(27) $$t = \sqrt{n-2}\,\frac{r}{\sqrt{1-r^2}} \text{ pentru } n \geqslant 3$$

este repartizată $t(n-2)$.

Demonstraţia rezultă din (22) prin schimbarea

$$r = t\,(t^2 + n - 2)^{-1/2}.$$

Scanned with OKEN Scanner

§3. Selecția dintr-o populație normală multidimensională

3.1. Repartiția normală multidimensională

DEFINIȚIA 1. Vectorul aleator $\mathbf{X}$ care admite o densitate de repartiție de forma

$$(28)\quad f(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}\sqrt{\det \Sigma}} \exp\left[-\frac{1}{2}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})' \Sigma^{-1}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})\right], \quad x \in R^n,$$

unde $\boldsymbol{\mu}$ este un vector $n \times 1$, iar Σ o matrice pozitiv definită se numește vector aleator normal n-dimensional.

Se arată că

$$(29)\qquad M(X) = \boldsymbol{\mu}, \ \mathcal{C}(X) = \Sigma$$

DEFINIȚIA 2. Vectorul aleator normal cu media $\boldsymbol{\mu}$ și matricea de covarianță Σ se numește vector aleator $N(\boldsymbol{\mu}, \Sigma)$.

DEFINIȚIA 3. În cazul în care rang $\Sigma < n$ spunem că avem de-a face cu o repartiție normală multidimensională degenerată; dacă rang $\Sigma = n$, atunci repartiția se numește nedegenerată și în acest caz se spune că rangul repartiției este n.

DEFINIȚIA 4. Prin rangul unei repartiții multidimensionale se înțelege rangul matricei de covarianță.

În continuare prezentăm unele proprietăți ale vectorilor normali (Anderson (1958), Văduva (1970), Ciucu și Craiu (1974)).

TEOREMA 16. *Dacă* $\mathbf{X}$ *este un vector aleator* n*-dimensional* $N(\boldsymbol{\mu}, \Sigma)$ *și* D *o matrice de ordin* n *nesingulară, atunci* $\mathbf{Y} = \mathbf{DX}$ *este un vector aleator* n*-dimensional* $N(\mathbf{D}\boldsymbol{\mu}, \mathbf{D}\Sigma\mathbf{D}')$.

Demonstrație. Avem

$$M(\mathbf{Y}) = M(\mathbf{DX}) = \mathbf{D}M(\mathbf{X}) = \mathbf{D}\boldsymbol{\mu}$$

$$\mathcal{C}(\mathbf{Y}) = M[(\mathbf{Y} - M(\mathbf{Y}))(\mathbf{Y} - M(\mathbf{Y}))'] =$$

$$= M[(\mathbf{DX} - \mathbf{D}\boldsymbol{\mu})(\mathbf{DX} - \mathbf{D}\boldsymbol{\mu})'] = M[\mathbf{D}(\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu})\{\mathbf{D}(\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu})\}'] =$$

$$= M[\mathbf{D}(\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu})(\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu})'\mathbf{D}'] = \mathbf{D}\Sigma\mathbf{D}'.$$

Rămîne să arătăm că $\mathbf{Y}$ este un vector n-dimensional normal.

Fie $f^*(\mathbf{y})$ densitatea de repartiție a variabilei $\mathbf{Y}$. Avem

$$f^*(\mathbf{y}) = f(\mathbf{x})|J| = n(x; \boldsymbol{\mu}, \Sigma)|J|$$

unde $n(\mathbf{x}; \boldsymbol{\mu}, \Sigma)$ reprezintă densitatea de repartiție a vectorului $\mathbf{X}$ n-dimensional $N(\boldsymbol{\mu}, \Sigma)$.

Deoarece $\mathbf{X} = \mathbf{D}^{-1}\mathbf{Y}$ urmează că $J = \det \mathbf{D}^{-1} = 1/\det \mathbf{D}$ și

$$f^*(\mathbf{y}) = n(\mathbf{x}; \boldsymbol{\mu}, \Sigma)|\det \mathbf{D}^{-1}|.$$

Scanned with OKEN Scanner

Dacă folosim notaţia

$$Q^*(\mathbf{y}) = Q(\mathbf{D}^{-1}\mathbf{y}),\ Q(\mathbf{x}) = (\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})'\,\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu}),$$

urmează că

$$Q^*(\mathbf{y}) = (\mathbf{D}^{-1}\mathbf{y}-\boldsymbol{\mu})'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\mathbf{D}^{-1}\mathbf{y}-\boldsymbol{\mu}) = [\mathbf{D}^{-1}(\mathbf{y}-\mathbf{D}\boldsymbol{\mu})]'\,\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\,[\mathbf{D}^{-1}(\mathbf{y}-\mathbf{D}\boldsymbol{\mu})] =$$

$$= (\mathbf{y}-\mathbf{D}\boldsymbol{\mu})'\,(\mathbf{D}^{-1})'\,\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\,\mathbf{D}^{-1}\,(\mathbf{y}-\mathbf{D}\boldsymbol{\mu}).$$

Deoarece $(\mathbf{D}^{-1})' = (\mathbf{D}')^{-1}$, obţinem

$$Q^*(\mathbf{y}) = (\mathbf{y}-\mathbf{D}\boldsymbol{\mu})'(\mathbf{D}\,\boldsymbol{\Sigma}\,\mathbf{D}')^{-1}(\mathbf{y}-\mathbf{D}\boldsymbol{\mu}),$$

ceea ce ne arată că $Q^*(\mathbf{y})$ este o formă pătratică analogă cu cea de la care am plecat cu media $\mathbf{D}\boldsymbol{\mu}$ şi matricea de covarianţă $\mathbf{D}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{D}'$.

Avem :

$$\det(\mathbf{D}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{D}') = \det\mathbf{D}\,\det\boldsymbol{\Sigma}\,\det\mathbf{D}' = \det\boldsymbol{\Sigma}\,(\det\mathbf{D})^2,$$

de unde

$$\det(\mathbf{D}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{D}')^{1/2} = (\det\boldsymbol{\Sigma})^{1/2}\det\mathbf{D}$$

obţinem

$$f^*(\mathbf{y}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}\,|\boldsymbol{\Sigma}|^{1/2}\,|\mathbf{D}|}\exp\left[-\frac{1}{2}Q^*(\mathbf{y})\right],$$

ceea ce demonstrează teorema.

Această teoremă rămîne adevărată şi cînd $\mathbf{D}$ este o matrice $q \times p$ iar rang $\mathbf{D} = q \leqslant p$ (Anderson (1958)).

TEOREMA 17. *Fie $X_1, X_2, \ldots, X_n$ o mulţime de n variabile aleatoare unidimensionale, avînd repartiţia comună $N(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ şi $(X_1,\ldots,X_m)$, $(X_{m+1},\ldots,X_n)$ o partiţie a acestei mulţimi de variabile aleatoare. Condiţia necesară şi suficientă ca aceste două submulţimi să fie independente una de alta este ca ele să fie necorelate.*

Demonstraţie. Vom interpreta cele două submulţimi ca variabile aleatoare : m, respectiv $(n-m)$ dimensionale.

Pentru variabilă aleatoare

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix}\mathbf{X}^{(1)}\\ \\ \mathbf{X}^{(2)}\end{pmatrix},\ \text{unde}\ \mathbf{X}^{(1)} = \begin{pmatrix}X_1\\ \vdots\\ X_m\end{pmatrix},\ \mathbf{X}^{(2)} = \begin{pmatrix}X_{m+1}\\ \vdots\\ X_n\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{\mu} = \begin{pmatrix}\boldsymbol{\mu}^{(1)}\\ \\ \boldsymbol{\mu}^{(2)}\end{pmatrix},\ \text{unde}\ \boldsymbol{\mu}^{(1)} = \begin{pmatrix}\mu_1\\ \vdots\\ \mu_m\end{pmatrix},\ \boldsymbol{\mu}^{(2)} = \begin{pmatrix}\mu_{m+1}\\ \vdots\\ \mu_n\end{pmatrix}$$

Scanned with OKEN Scanner

şi

$$\Sigma = \left(\begin{array}{ccc|ccc} \sigma_{11} & \cdots & \sigma_{1m} & \sigma_{1m+1} & \cdots & \sigma_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sigma_{m1} & \cdots & \sigma_{mm} & \sigma_{mm+1} & \cdots & \sigma_{mn} \\ \hline \sigma_{m+1} & \cdots & \sigma_{m+1m} & \sigma_{m+1\,m+1} & \cdots & \sigma_{m+1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sigma_{n1} & \cdots & \sigma_{nm} & \sigma_{nm+1} & \cdots & \sigma_{nn} \end{array}\right) = \begin{pmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{pmatrix}$$

Matricea de covarianţă fiind simetrică Σ_{12} şi Σ_{21} sînt transpuse una alteia şi

$$\Sigma'_{11} = \Sigma_{11},\ \Sigma'_{12} = \Sigma_{21},\ \Sigma'_{21} = \Sigma_{12},\ \Sigma'_{22} = \Sigma_{22}.$$

Mai întîi să presupunem că $\mathbf{X}^{(1)}$ şi $\mathbf{X}^{(2)}$ sînt independente şi să arătăm că $\mathbf{X}^{(1)}$ şi $\mathbf{X}^{(2)}$ sînt necorelate.

Fie $f(\mathbf{x})$ densitatea de repartiţie comună a variabilelor aleatoare $X_1, X_2, \ldots, X_n$ şi $g(\mathbf{x}^{(1)})$ şi $h(\mathbf{x}^{(2)})$ densitatea de repartiţie a variabilei $\mathbf{X}^{(1)}$, respectiv $\mathbf{X}^{(2)}$. Din ipoteza de independenţă

$$f(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x}^{(1)})\, h(\mathbf{x}^{(2)})$$

şi cum

$$\sigma_{ij} = \int_{R^n} (x_i - M(X_i))\,(x_j - M(X_j))\, f(x)\, \mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_n,$$

obţinem

$$\sigma_{ij} = \int_{R^m} (x_i - \mu_i)\, g(\mathbf{x}^{(1)})\, \mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_m \int_{R^{n-m}} (x_j - \mu_j) h(\mathbf{x}^{(2)}) \mathrm{d}x_{m+1} \ldots \mathrm{d}x_n = 0.$$

Urmează că

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \Sigma_{11} & 0 \\ 0 & \Sigma_{22} \end{pmatrix}$$

ceea ce arată că independenţa implică necorelarea.

Reciproc, să arătăm că

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \Sigma_{11} & 0 \\ 0 & \Sigma_{22} \end{pmatrix} \Rightarrow f(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x}^{(1)})\, h(\mathbf{x}^{(2)}).$$

Deoarece

$$Q(\mathbf{x}) = (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})' \Sigma^{-1} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})$$

şi cum

$$\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu} = \begin{pmatrix} x_1 - \mu_1 \\ \vdots \\ x_m - \mu_m \\ \cdots\cdots\cdots \\ x_{m+1} - \mu_{m+1} \\ \vdots \\ x_n - \mu_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}^{(1)} - \boldsymbol{\mu}^{(1)} \\ \mathbf{x}^{(2)} - \boldsymbol{\mu}^{(2)} \end{pmatrix},$$

Scanned with OKEN Scanner

urmează că

$$Q(\mathbf{x}) = ((\mathbf{x}^{(1)} - \boldsymbol{\mu}^{(1)})', (\mathbf{x}^{(2)} - \boldsymbol{\mu}^{(2)})') \begin{pmatrix} \boldsymbol{\Sigma}_{11}^{-1} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\Sigma}_{22}^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}^{(1)} - \boldsymbol{\mu}^{(1)} \\ \mathbf{x}^{(2)} - \boldsymbol{\mu}^{(2)} \end{pmatrix} =$$

$$= ((\mathbf{x}^{(1)} - \boldsymbol{\mu}^{(1)})' \boldsymbol{\Sigma}_{11}^{-1}, (\mathbf{x}^{(2)} - \boldsymbol{\mu}^{(2)})' \boldsymbol{\Sigma}_{22}^{-1}) \begin{pmatrix} \mathbf{x}^{(1)} - \boldsymbol{\mu}^{(1)} \\ \mathbf{x}^{(2)} - \boldsymbol{\mu}^{(2)} \end{pmatrix} =$$

$$= Q^{(1)}(\mathbf{x}^{(1)}) + Q^{(2)}(\mathbf{x}^{(2)}),$$

unde

$$Q^{(1)}(\mathbf{x}^{(1)}) = (\mathbf{x}^{(1)} - \boldsymbol{\mu}^{(1)})' \boldsymbol{\Sigma}_{11}^{-1} (\mathbf{x}^{(1)} - \boldsymbol{\mu}^{(1)})$$

este o formă pătratică în variabilele $x_1, \ldots, x_m$, iar

$$Q^{(2)}(\mathbf{x}^{(2)}) = (\mathbf{x}^{(2)} - \boldsymbol{\mu}^{(2)})' \boldsymbol{\Sigma}_{22}^{-1} (\mathbf{x}^{(2)} - \boldsymbol{\mu}^{(2)})$$

este o formă pătratică în variabilele $x_{m+1}, \ldots, x_n$.

Prin urmare

$$n(\mathbf{x}; \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} |\boldsymbol{\Sigma}|^{1/2}} \exp\left[-\frac{1}{2}(Q^{(1)}(\mathbf{x}^{(1)}) + Q^{(2)}(\mathbf{x}^{(2)}))\right] =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{m/2} |\boldsymbol{\Sigma}_{11}|^{1/2}} \exp\left[-\frac{1}{2} Q^{(1)}(\mathbf{x}^{(1)})\right] \cdot$$

$$\cdot \frac{1}{(2\pi)^{(n-m)/2} |\boldsymbol{\Sigma}_{22}|^{1/2}} \exp\left[-\frac{1}{2} Q^{(2)}(\mathbf{x}^{(2)})\right] = n(\mathbf{x}^{(1)}; \boldsymbol{\mu}^{(1)}, \boldsymbol{\Sigma}_{11})$$

$$\cdot n(\mathbf{x}^{(2)}, \boldsymbol{\mu}^{(2)}, \boldsymbol{\Sigma}_{22}) = g(\mathbf{x}^{(1)}) h(\mathbf{x}^{(2)}),$$

ceea ce demonstrează teorema.

TEOREMA 18. *Dacă X este un vector aleator n-dimensional $N(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ atunci orice submulțime a coordonatelor vectorului $\mathbf{X}$ are o repartiție normală avînd media și matricea de covarianță extrase din media și matricea de covarianță a vectorului $\mathbf{X}$.*

Demonstrație. Folosim teorema 17.

Să arătăm că este posibil să găsim o transformare

$$\mathbf{Y} = \mathbf{D}\mathbf{X}$$

astfel încît vectorii $\mathbf{Y}^{(1)}$ și $\mathbf{Y}^{(2)}$ să fie liniar independenți

$$\begin{pmatrix} \mathbf{Y}^{(1)} \\ \mathbf{Y}^{(2)} \end{pmatrix} = \mathbf{D} \begin{pmatrix} \mathbf{X}^{(1)} \\ \mathbf{X}^{(2)} \end{pmatrix};$$

În acest scop, alegem matricea $\mathbf{D}$ de forma următoare

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \mathbf{I}^{(1)} & \mathbf{D}_{12} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}^{(2)} \end{pmatrix}$$

Scanned with OKEN Scanner

unde $\mathbf{I}^{(1)}$ și $\mathbf{I}^{(2)}$ sînt matrici unitate de ordin m și respectiv $n - m$, iar matricea $\mathbf{D}_{12}$ se alege astfel încît să satisfacă condiția pusă. Avem :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{Y}^{(1)} \\ \mathbf{Y}^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{I}^{(1)} & \mathbf{D}_{12} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}^{(2)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{X}^{(1)} \\ \mathbf{X}^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{X}^{(1)} + \mathbf{D}_{12}\,\mathbf{X}^{(2)} \\ \mathbf{X}^{(2)} \end{pmatrix}$$

sau

$$\mathbf{Y}^{(1)} = \mathbf{X}^{(1)} + \mathbf{D}_{12}\,\mathbf{X}^{(2)}$$

$$\mathbf{Y}^{(2)} = \mathbf{X}^{(2)}$$

care este transformarea căutată.

Dorim ca vectorul $\mathbf{Y}$ să se desfacă în doi vectori independenți, adică ca în matricea de covarianță a vectorului $\mathbf{Y}$, cei doi vectori să aibă matricea de covarianță corespunzătoare lor, zero, sau

$$\mathcal{C}(\mathbf{Y}^{(1)},\ \mathbf{Y}^{(2)}) = 0.$$

Avem :

$$\mathcal{C}(\mathbf{Y}) = \mathbf{D}\Sigma\mathbf{D}' = \begin{pmatrix} \mathbf{I}^{(1)} & \mathbf{D}_{12} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}^{(2)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{I}^{(1)} & \mathbf{0} \\ \mathbf{D}'_{12} & \mathbf{I}^{(2)} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \Sigma_{11} + \mathbf{D}_{12}\,\Sigma_{21} + \Sigma_{12}\,\mathbf{D}'_{12} + \mathbf{D}_{12}\,\Sigma_{22}\,\mathbf{D}'_{12} & \Sigma_{12} + \mathbf{D}_{12}\,\Sigma_{22} \\ \Sigma_{21} + \Sigma_{22}\,\mathbf{D}'_{12} & \Sigma_{22} \end{pmatrix}$$

Trebuie să avem :

$$\Sigma_{12} + \mathbf{D}_{12}\,\Sigma_{22} = 0 \tag{30}$$

și cum matricea de covarianță este simetrică

$$(\Sigma_{12} + \mathbf{D}_{12}\,\Sigma_{22}) = (\Sigma_{12} + \mathbf{D}_{12}\,\Sigma_{22})' = \Sigma_{21} + \Sigma_{22}\,\mathbf{D}'_{12}.$$

Din (30) și cum matricea Σ_{22} este nesingulară, obținem :

$$\mathbf{D}_{12} = -\,\Sigma_{12}\,\Sigma_{22}^{-1}, \tag{31}$$

de unde

$$\Sigma_{21} + \Sigma_{22}\,\mathbf{D}'_{12} = \Sigma_{21} - \Sigma_{22}\,\Sigma_{22}^{-1}\,\Sigma_{21} = \Sigma_{21} - \Sigma_{21} = 0$$

Ținînd seama de (31) putem scrie

$$\Sigma_{11} + \mathbf{D}_{12}\,\Sigma_{21} + \Sigma_{12}\,\mathbf{D}'_{12} + \mathbf{D}_{12}\,\Sigma_{22}\,\mathbf{D}'_{12} =$$

$$= \Sigma_{11} + (-\,\Sigma_{12}\,\Sigma_{22}^{-1})\,\Sigma_{21} + \Sigma_{12}\,(-\Sigma_{12}\,\Sigma_{22}^{-1})' + (-\Sigma_{12}\,\Sigma_{22}^{-1})\,\Sigma_{22}\,(-\,\Sigma_{12}\,\Sigma_{22}^{-1})' =$$

$$= \Sigma_{11} - \Sigma_{12}\,\Sigma_{22}^{-1}\,\Sigma_{21} - \Sigma_{12}\,(\Sigma_{22}^{-1})'\,\Sigma'_{12} + \Sigma_{12}\,\Sigma_{22}^{-1}\,\Sigma_{22}\,(\Sigma_{22}^{-1})'\,\Sigma'_{12} =$$

$$= \Sigma_{11} - \Sigma_{12}\,\Sigma_{22}^{-1}\,\Sigma_{21} - \Sigma_{12}\,(\Sigma_{22}^{-1})'\,\Sigma'_{12} + \Sigma_{12}\,(\Sigma_{22}^{-1})'\,\Sigma'_{12} = \Sigma_{11} - \Sigma_{12}\,\Sigma_{22}^{-1}\,\Sigma_{21}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Prin urmare, condiţia ca $Y^{(1)}$ şi $Y^{(2)}$ să fie independente, este

$$\mathcal{C}(\mathbf{Y}) = \begin{pmatrix} \Sigma_{11} - \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{21} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Sigma_{22} \end{pmatrix}.$$

Vectorul $\mathbf{Y}^{(2)}$ are matricea de covarianţă

$$\mathcal{C}(\mathbf{Y}^{(2)}) = \Sigma_{22}.$$

Avem

$$M(\mathbf{Y}) = \mathbf{D}\mu = \begin{pmatrix} \mathbf{I}^{(1)} & \mathbf{D}_{12} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}^{(2)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu^{(1)} \\ \mu^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu^{(1)} + \mathbf{D}_{12}\mu^{(2)} \\ \cdots\cdots\cdots \\ \mu^{(2)} \end{pmatrix},$$

de unde

$$M(\mathbf{Y}^{(2)}) = \mu^{(2)}$$

ceea ce arată că vectorul $\mathbf{Y}^{(2)}$ are media (matricea de covarianţă) extrasă din media (matricea de covarianţă) vectorului Y.

Deci $\mathbf{Y}^{(2)}$ are densitate $n(\mathbf{y}^{(2)};\ \mu^{(2)}, \Sigma_{22})$, sau cu alte cuvinte $\mathbf{Y}^{(2)}$ este tocmai $\mathbf{X}^{(2)}$ şi ceea ce este adevărat pentru $\mathbf{Y}^{(2)}$ este adevărat şi pentru $X^{(2)}$. În aceste condiţii densitatea de repartiţie a vectorului $\mathbf{X}$ este

$$n(\mathbf{y};\ \mathbf{D}\mu,\ \mathbf{D}\Sigma\mathbf{D}') = n(\mathbf{y}^{(1)};\ \mu^{(1)} - \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}\mu^{(2)},\ \Sigma_{11} - \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{21}) \times$$

$$\times\, n(\mathbf{y}^{(2)};\ [\mu^{(2)},\ \Sigma_{22}).$$

Teorema 18 este adevărată pentru o transformare $\mathbf{Y} = \mathbf{DX}$ care are matricea $\mathbf{D}$ nesingulară. Extindem această teoremă.

Să presupunem că $\mathbf{D}$ este o matrice de ordin $m \times n$ şi că rang $\mathbf{D} = m$. Deci sîntem în cazul unui sistem de forma :

$$\begin{aligned} Y_1 &= d_{11}X_1 + \ldots + d_{1n}X_n \\ &\vdots \\ Y_m &= d_{m1}X_1 + \ldots + {}_{mn}X_n \end{aligned}$$

în care $m \leqslant n$, sau în cuvinte, un sistem în care avem mai puţine forme liniare decît variabile.

Putem să completăm matricea $\mathbf{D}$ cu o matrice $\mathbf{E}$ aşa fel încît matricea rezultă să fie de rang n şi să fie nesingulară, adică putem să adăugăm sistemul

$$\begin{aligned} Y_{m+1} &= d_{m+11}X_1 + \ldots + d_{m+1n}X_n \\ &\vdots \\ Y_n &= d_{n1}X_1 + \ldots + d_{nn}X_n. \end{aligned}$$

Avem

$$\text{ordin}\ \mathbf{E} = (n - m) \times m$$

şi

$$\text{rang}\begin{pmatrix} \mathbf{D} \\ \mathbf{E} \end{pmatrix} = n.$$

Scanned with OKEN Scanner

Putem să considerăm vectorul aleator

$$\mathbf{Z} = \begin{pmatrix} \mathbf{D} \\ \mathbf{E} \end{pmatrix} \mathbf{X}.$$

În baza teoremei 18, $\mathbf{Z}$ este un vector normal şi este partiţionat în doi vectori

$$\mathbf{Y} = \mathbf{DX} \text{ şi } \mathbf{EX},$$

vectorul $\mathbf{Y}$ fiind repartizat $n(\mathbf{y}; \mathbf{D}\mu, \mathbf{D}\,\Sigma\,\mathbf{D}')$.

Dar formulele pecare le-am stabilit pînă acum sînt adevărate oricare ar fi matricea $\mathbf{D}$.

Pentru $m = 1$, această teoremă dă repartiţia unei forme liniare de variabile aleatoare normale.

TEOREMA 19. *Dacă vectorii aleatori n dimensionali* $\mathbf{X}_1, \ldots, \mathbf{X}_n$ *sînt independenţi şi au repartiţii* $N(\mu_i, \Sigma)$, $1 \leqslant i \leqslant N$ *şi dacă matricea* $D = (d_{ij})_{1 \leqslant i, j \leqslant N}$ *este ortogonală, atunci vectorul aleator*

$$\mathbf{Y}_i = \sum_{j=1}^{N} d_{ij} \mathbf{X}_j, \quad 1 \leqslant i \leqslant N$$

are repartiţia $N(\nu_i, \Sigma)$, $\nu_i = \sum_{j=1}^{N} d_{ij} \mu_j$, *iar vectorii* $\mathbf{Y}_1 \ldots, \mathbf{Y}_N$ *sînt independenţi.*

Demonstraţie. Componentele vetorului $\mathbf{Y}_i$ sînt combinaţii liniare de componentele vectorilor $\mathbf{X}_j$, $1 \leqslant j \leqslant N$ care sînt variabile aleatoare normale şi de aici rezultă că $\mathbf{Y}_i$ are o repartiţie normală multidimensională. Avem :

$$M(\mathbf{Y}_j) = M\left(\sum_{j=1}^{N} d_{ij} \mathbf{X}_j\right) = \sum_{j=1}^{N} d_{ij} M(\mathbf{X}_j) = \sum_{j=1}^{N} d_{ij} \mu_j = \nu_i$$

şi

$$\operatorname{cov}(\mathbf{Y}_i, \mathbf{Y}_k') = \operatorname{cov}\left[\sum_{j=1}^{N} d_{ij} \mathbf{X}_j, \left(\sum_{l=1}^{N} d_{kl} \mathbf{X}_l\right)'\right] =$$

$$= \sum_{j,l} d_{ij} d_{kl} \operatorname{cov}(\mathbf{X}_j, \mathbf{X}_l') = \sum_{j,l} d_{ij} d_{kl} \delta_{jl} \Sigma = \delta_{jl} \Sigma,$$

unde δ_{jl} este simbolul lui Kronecker. Teorema este astfel demonstrată De asemenea, se poate demonstra

TEOREMA 20. *Dacă* X_i, $1 \leqslant i \leqslant N$ *sînt vectori aleatori* $N(\mu_i, \Sigma_i)$ *independenţi, atunci vectorul aleator* $\sum_{1}^{N} \beta_i \mathbf{X}_i$, *este un vector* $N\left(\sum_{1}^{N} \beta_i \mu_i, \sum_{1}^{N} \beta_i^2 \Sigma_i\right)$.

Scanned with OKEN Scanner

TEOREMA 21. *Dacă* $\mathbf{X}$ *este un vector aleator n-dimensional* $N(\mu, \Sigma)$, *atunci forma pătratică*

$$(\mathbf{x} - \mu)' \Sigma^{-1} (\mathbf{x} - \mu)$$

este o variabilă aleatoare $\chi^2(n)$.

Demonstrație. Matricea Σ fiind pozitiv definită există o matrice D nesingulară astfel încît

$$\mathbf{D}\Sigma\mathbf{D}' = \mathbf{I} \quad \text{sau} \quad \Sigma = \mathbf{D}^{-1}(\mathbf{D}')^{-1} = (\mathbf{D}'\mathbf{D})^{-1}.$$

Vectorul $\mathbf{Y} = \mathbf{D}(\mathbf{X} - \mu)$ are media

$$M(\mathbf{Y}) = \mathbf{D}M(\mathbf{X} - \mu) = 0$$

și matricea de covarianță

$$\mathcal{C}(\mathbf{Y}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

$\mathbf{X}$ fiind un vector normal, urmează că și $\mathbf{Y}$ este un vector normal, ceea ce înseamnă că fiecare componentă Y_i are ca dispersie elementul de pe diagonala matricei $\mathcal{C}(\mathbf{Y}) = \mathbf{I}$, adică 1.

Avem $M(Y_i) = 0$ și cum corelația variabilelor $Y_i (1 \leqslant i \leqslant n)$ este zero, urmează că ele sînt independente.

Avem

$$\mathbf{Y}'\mathbf{Y} = Y_1^2 + \dots + Y_n^2 = [\mathbf{D}(\mathbf{X} - \mu)]']\mathbf{D}(\mathbf{X} - \mu)] =$$

$$= (\mathbf{X} - \mu)' \mathbf{D}'\mathbf{D}(\mathbf{X} - \mu)$$

și cum $\Sigma^{-1} = \mathbf{D}'\mathbf{D}$, urmează că

$$Y_1^2 + Y_2^2 + \dots + Y_n^2 = (\mathbf{X} - \mu)' \Sigma^{-1} (\mathbf{X} - \mu),$$

ceea ce demonstrează teorema.

3.2. Repartiția Wishart

Fie $\mathbf{Z}_\alpha$, $1 \leqslant \alpha \leqslant q$, q vectori aleatori n-dimensionali $N(\mathbf{0}, \Sigma)$.

DEFINIȚIA 5. Se numește variabilă aleatoare Wishart, matricea aleatoare simetrică.

$$\mathbf{Y} = \sum_1^q \mathbf{Z}_\alpha \mathbf{Z}'_\alpha = (Y_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}. \tag{32}$$

Scanned with OKEN Scanner

TEOREMA 22. *Densitatea de repartiție a matricei aleatoare* $\mathbf{Y}$ *este dată de expresia*

$$(33)\qquad f(\mathbf{y};\Sigma,n)=\frac{|\mathbf{y}|^{\frac{1}{2}(q-n-1)}e^{-\frac{1}{2}\operatorname{Ur}\Sigma^{-1}\mathbf{y}}}{2^{\frac{qn}{2}}\pi^{\frac{n(n-1)}{4}}|\Sigma|^{\frac{n}{2}}\prod_{1}^{n}\Gamma\left(\frac{1}{2}(n+1-i)\right)},\qquad y\geqslant 0$$

unde $\mathbf{y}$ *este o matrice variabilă* $n\times n$, *iar* $\operatorname{Ur}\Sigma^{-1}\mathbf{y}$ *este dată de relația*

$$\operatorname{Ur}\Sigma^{-1}\mathbf{y}=\sum_{i,j}^{n}a_{ij}\,y_{ij},\ \Sigma^{-1}=(a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}=\mathbf{A}.$$

Numărul $\operatorname{Ur}\Sigma^{-1}\mathbf{y}$ *poartă numele de urma matricei* $\Sigma^{-1}\mathbf{y}$, *iar* $y\geqslant 0$ *înseamnă că* $y_{ij}\geqslant 0$, $1\leqslant i,\ j\leqslant n$.

Demonstrație. Densitatea de repartiție comună corespunzătoare vectorilor aleatori $\mathbf{Z}_1,\ldots,\mathbf{Z}_q$ este

$$\frac{|\mathbf{A}|^{\frac{q}{2}}}{(2\pi)^{\frac{qn}{2}}}\exp\left[-\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}\sum_{h=1}^{q}z_{ih}z_{jh}\right],\quad Z=(z_{ih})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant q}}.$$

Funcția caracterstică a variabilei Y este

$$\varphi(t)=M\left[\exp\left(\mathrm{i}\sum_{i,j=1}^{n}\varepsilon_{ij}\,t_{ij}\,y_{ij}\right)\right],$$

unde

$$\varepsilon_{ij}=\begin{cases}1 & \text{dacă } i=j\\ \dfrac{1}{2} & \text{dacă } i\neq j.\end{cases}$$

Avem :

$$(34)\qquad \varphi(t)=\frac{|\mathbf{A}|^{\frac{q}{2}}}{(2\pi)^{\frac{qn}{2}}}\iint\ldots\int\exp\left[-\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}(a_{ij}-2\mathrm{i}\,\varepsilon_{ij}\,t_{ij})\,y_{ij}\right]\prod\mathrm{d}z_{ih},$$

unde

$$y_{ij}=\sum_{h=1}^{q}z_{ih}z_{jh},\quad 1\leqslant i,\ \ j\leqslant n,\quad y_{ij}=y_{ji}.$$

Punînd

$$(35)\qquad \mathbf{B}=(a_{ij}-2\mathrm{i}\varepsilon_{ij}t_{ij}),$$

Scanned with OKEN Scanner

obținem

$$\varphi(t) = \frac{|\mathbf{A}|^{\frac{q}{2}}}{|\mathbf{B}|^{\frac{q}{2}}}. \tag{36}$$

Deoarece

$$\iint \dots \int |\mathbf{Y}|^m \exp\left[-\frac{1}{2}\sum a_{ij} y_{ij}\right] \prod dy_{ij} =$$

$$= \frac{\pi^{\frac{n(n-1)}{4}} 2^{n\left(m+\frac{n+1}{2}\right)} \Gamma\left(m+\frac{n+1}{2}\right) \dots \Gamma(m+1)}{|A|^{m+\frac{n+1}{2}}}$$

putem defini în $R^{\frac{n(n+1)}{2}}$ o repartiție avînd densitatea

$$\begin{cases} \dfrac{|\mathbf{A}|^{m+\frac{n+1}{2}}}{\pi^{\frac{n(n-1)}{4}} 2^{n\left(m+\frac{n+1}{2}\right)} \prod_{i=1}^{n} \Gamma\left(m+\frac{i+1}{2}\right)} |\mathbf{Y}|^m \exp\left[-\frac{1}{2}\sum a_{ij} y_{ij}\right], & \text{dacă } \mathbf{Y} \geqslant 0 \\ 0 & \text{dacă } \mathbf{Y} < 0. \end{cases} \tag{37}$$

Funcția caracteristică corespunzătoare acestei densități de repartiție este

$$\frac{|\mathbf{A}|^{m+\frac{n+1}{2}}}{\pi^{\frac{n(n-1)}{4}} 2^{n\left(m+\frac{n+1}{2}\right)} \prod_{i=1}^{n} \Gamma\left(m+\frac{i+1}{2}\right)} \times$$

$$\times \iint \dots \int |\mathbf{Y}|^m \exp\left[-\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} (a_{ij} - 2i\varepsilon_{ij} t_{ij}) y_{ij}\right] \prod_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant n}} dy_{ij} = \frac{|\mathbf{A}|^{m+\frac{n+1}{2}}}{|\mathbf{B}|^{m+\frac{n+1}{2}}}$$

unde B este matricea definită cu (35).

Pentru a determina densitatea de repartiție, căutată, facem în (37) $m + \frac{n+1}{2} = \frac{q}{2}$, ceea ce ne conduce la (33). Teorema este astfel demonstrată.

Repartiția variabilei $\mathbf{Y}$ este $\frac{n(n-1)}{2}$ dimensională.

DEFINIȚIA 6. Repartiția a cărei densitate este de forma (33) se numește repartiția Wishart cu q grade de libertate.

Pentru $n = 1$, obținem repartiția $\chi^2(q)$.

Scanned with OKEN Scanner

3.3. Repartiția T^2

DEFINIȚIA 7. Fie $\mathbf{Y}$ un vector aleator $N(\mathbf{0}, \mathbf{\Sigma})$ și $n\mathbf{S}$ o matrice aleatoare independentă, de forma

$$nS = \sum_1^n \mathbf{Z}_\alpha \mathbf{Z}'_\alpha, \tag{38}$$

unde $\mathbf{Z}_\alpha$, $1 \leqslant \alpha \leqslant n$ sînt vectori aleatori $N(\mathbf{0}, \mathbf{\Sigma})$ independenți. Se numește variabilă T^2 sau variabila Hoteling variabila aleatoare

$$\mathbf{T}^2 = \mathbf{Y}\mathbf{S}^{-1}\mathbf{Y}. \tag{39}$$

Variabila aleatoare (39) se mai numește și variabila Hoteling centrată cu n grade de libertate. Dacă $\mathbf{Y}$ este un vector $N(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{\Sigma})$, atunci variabila (39) este o variabilă Hoteling necentrată cu n grade de libertate și cu parametrul de necentricitate $\delta^2 = \boldsymbol{\mu}'\mathbf{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu}$.

În această definiție am presupus că $\mathbf{Y}$ cît și $\mathbf{Z}_\alpha$, $1 \leqslant \alpha \leqslant n$ sînt vectori $q \times 1$.

TEOREMA 23. *Variabila aleatoare T^2 cu n grade de libertate este legată de variabila aleatoare F prin relația*

$$\frac{n-q-1}{q} \cdot \frac{T^2}{n} = F(q, n-q+1; \boldsymbol{\mu}'\mathbf{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu}). \tag{40}$$

Pentru demonstrarea teoremei 23 avem nevoie de următoarea lemă.

LEMA 1. *Pentru orice două matrici nedegenerate C și H de ordin $q \times q$ și orice vector $\mathbf{k}$, avem*

$$\mathbf{k}'\mathbf{H}^{-1}\mathbf{k} = (\mathbf{C}\mathbf{k})'(\mathbf{C}\mathbf{H}\mathbf{C}')^{-1}(\mathbf{C}\mathbf{k}).$$

Demonstrația teoremei 23. Fie $\mathbf{D}$ o matrice nedegenerată astfel încît $\mathbf{D}\mathbf{\Sigma}\mathbf{D}' = \mathbf{I}$. Cu notațiile

$$\mathbf{Y}^* = \mathbf{D}\mathbf{Y}$$

$$\mathbf{S}^* = \mathbf{D}\mathbf{S}\mathbf{D}'$$

$$\boldsymbol{\mu}^* = \mathbf{D}\boldsymbol{\mu}$$

și din lema 1, urmează că $\mathbf{T}^2 = \mathbf{Y}^{*\prime}\mathbf{S}^{*-1}\mathbf{Y}^*$, unde $\mathbf{Y}^*$ este un vector $N(\boldsymbol{\mu}^*, \mathbf{I})$ (teorema 16), iar $n\mathbf{S}$ este repartizat ca $\sum_1^n \mathbf{Z}_j^* \mathbf{Z}_j^{*\prime} = \sum_1^n \mathbf{D}\mathbf{Z}_j (\mathbf{D}\mathbf{Z}_j)'$, unde $\mathbf{Z}_j^* = \mathbf{D}\mathbf{Z}_j$ sînt vectori aleatori $N(\mathbf{0}, \mathbf{I})$. Fie $\mathbf{Q}$ o matrice ortogonală de ordin $(q \times q)$ avînd ca elemente ale primei linii cantitățile

$$q_{1i} = \frac{Y_i^*}{\sqrt{\mathbf{Y}^{*\prime}\mathbf{Y}^*}}, \qquad i = 1, 2, \ldots p. \tag{41}$$

Scanned with OKEN Scanner

Se observă că $\sum_1^q q_{1i}^2 = 1$. Matricea $\mathbf{Q}$ este aleatoare deoarece depinde de $\mathbf{Y}^*$.

Fie

$$\mathbf{U} = \mathbf{Q}\mathbf{Y}^* \tag{42}$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{Q}\, n\mathbf{S}^*\, \mathbf{Q}'. \tag{43}$$

În baza definiției matricei $\mathbf{Q}$, obținem :

$$\mathbf{U}_1 = \sum_1^q q_{1i}\, Y_i^* = \sqrt{\mathbf{Y}^{*\prime}\, \mathbf{Y}^*}$$

$$\mathbf{U}_j = \sum_1^q q_{ji}\, Y_i^* = \sqrt{\mathbf{Y}^{*\prime}\, \mathbf{Y}^*} \sum_1^q q_{ji}\, q_{1i} = 0, \qquad j \neq 1.$$

Urmează că :

$$\frac{T^2}{n} = \mathbf{U}'\mathbf{B}^{-1}\mathbf{U} = (U_1, 0, \ldots, 0) \begin{pmatrix} b^{11} & b^{12} & \ldots & b^{1q} \\ b^{21} & b^{22} & \ldots & b^{2q} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b^{q1} & b^{q2} & \ldots & b^{qq} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = U_1^2\, b^{11},$$

unde $(b^{ij})_{1 \leqslant i,\, j \leqslant q} = \mathbf{B}^{-1}$.

Dacă $\mathbf{A} = \boldsymbol{\Sigma}^{-1}$ și $\boldsymbol{\Sigma}$ admit descompunerile

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\Sigma}_{11} & \boldsymbol{\Sigma}_{12} \\ \boldsymbol{\Sigma}_{21} & \boldsymbol{\Sigma}_{22} \end{pmatrix},$$

atunci

$$\boldsymbol{\Sigma}_{11} - \boldsymbol{\Sigma}_{12}\, \boldsymbol{\Sigma}_{22}^{-1}\, \boldsymbol{\Sigma}_{21} = \mathbf{A}_{11}^{-1}.$$

Aplicînd acest rezultat, obținem

$$\frac{1}{b^{11}} = b_{11} - \mathbf{b}'_{(1)}\, \mathbf{B}_{22}^{-1}\, \mathbf{b}'_{(1)} = b_{11 \cdot 2, \ldots, q} \tag{45}$$

unde

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & \mathbf{b}_{(1)} \\ \mathbf{b}'_{(1)} & \mathbf{B}_{22} \end{pmatrix}$$

$$\frac{\mathbf{T}^2}{n} = U_1^2 / b_{11 \cdot 2, \ldots, q} = \mathbf{Y}^{*\prime}\, \mathbf{Y}^* / b_{11 \cdot 2, \ldots, q}.$$

Repartiția lui B pentru Q fixat coincide cu repartiția sumei

$$\mathbf{V}_1\mathbf{V}_1' + \mathbf{V}_2\mathbf{V}_2' + \ldots + \mathbf{V}_n\mathbf{V}_n',$$

Scanned with OKEN Scanner

unde pentru $\mathbf{Q}$ dat, vectorii $\mathbf{V}_j = \mathbf{Q}\mathbf{Z}_j^*$ sînt independente și repartizați $N(\mathbf{0}, \mathbf{I})$. $b_{11.2,\ldots,p}$ este repartizat la fel ca $\sum_1^{n-(q-1)} W_j^2$, unde W_j sînt variabile aleatoare independente repartizate $N(0, 1)$, adică

$$\mathbf{b}'' \sim \chi^2(n - q + 1). \tag{46}$$

De asemenea, întrucît

$$U_1^2 = \mathbf{Y}^{*\prime}\mathbf{Y}^* = \sum_1^q Y_i^{*2}$$

rezultă că

$$U_1^2 \sim \chi^2(q\,;\, \boldsymbol{\mu}^{*\prime}\boldsymbol{\mu}^* = \boldsymbol{\mu}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu}). \tag{47}$$

Deci

$$\frac{T^2}{n} \cdot \frac{n - q + 1}{q} = F(q, n - q + 1;\, \boldsymbol{\mu}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu}) \tag{48}$$

și teorema este demonstrată.

Dacă $\boldsymbol{\mu} = 0$, repartiția devine F centrat.

În continuare vom nota prin $T^2(q, n)$ $[T^2(q, n\,;\, \delta)]$ variabila Hoteling centrată (necentrată) cu n grade de libertate. Indicele q arată că variabila Hoteling este definită pentru vectori aleatori din R^q.

Între cuantilele variabilei F și cele ale variabilei T^2 există relațiile

$$\frac{T_\alpha^2(q, n)}{n} \cdot \frac{n - q + 1}{q} = F_\alpha(q, n - q + 1)$$

$$\frac{T_\alpha^2(q, n;\, \delta)}{n} \cdot \frac{n - q + 1}{q} = F_\alpha(q, n - q + 1).$$

3.4. Repartiții de selecție

TEOREMA 24. *Dacă* $\mathbf{X}$ *este un vector* $N(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$, *atunci* $\sqrt{N}\,\bar{\mathbf{X}}$, *unde*

$$\bar{\mathbf{X}} = \frac{1}{N}\sum_1^N \mathbf{X}_\alpha = \begin{pmatrix} \bar{X}_1 \\ \vdots \\ \bar{X}_q \end{pmatrix} \tag{49}$$

este independentă de

$$N\hat{\boldsymbol{\Sigma}} = \sum_1^N (\mathbf{X}_\alpha - \bar{\mathbf{X}})(\mathbf{X}_\alpha - \bar{\mathbf{X}})' = \left(\sum_1^N (X_{i\alpha} - \bar{X}_i)(X_{j\alpha} - \bar{X}_j)_{1 \leqslant i,\, j \leqslant q} \right) \tag{50}$$

Scanned with OKEN Scanner

și $\overline{\mathbf{X}}$ *este un vector* $N\left(\boldsymbol{\mu}, \frac{1}{N}\boldsymbol{\Sigma}\right)$, *iar* $N\hat{\boldsymbol{\Sigma}}$ *este o variabilă Wishart cu* $N-1$ *grade de libertate.*

Demonstrație. Fie $\mathbf{X}_1, \ldots, \mathbf{X}_N$ o selecție efectuată asupra vectorului aleator $\mathbf{X}$ și fie $\mathbf{B} = (b_{\alpha\beta})_{1\leqslant\alpha,\,\beta\leqslant N}$ matricea ortogonală care are ultima linie

$$\left(\frac{1}{\sqrt{N}}, \ldots, \frac{1}{\sqrt{N}}\right).$$

Considerăm transformarea

$$\mathbf{Z}_\alpha = \sum_1^N b_{\alpha\beta}\mathbf{X}_\beta \qquad 1 \leqslant \alpha \leqslant N. \tag{51}$$

Avem

$$\mathbf{Z}_N = \sum_1^N b_{N\beta}\,\mathbf{X}_\beta = \sum \frac{1}{\sqrt{N}}\,\mathbf{X}_\beta = \sqrt{N}\,\overline{\mathbf{X}}$$

și

$$N\hat{\boldsymbol{\Sigma}} = \sum_1^N \mathbf{X}_\alpha\mathbf{X}'_\alpha - n\overline{\mathbf{X}}\,\overline{\mathbf{X}}' = \sum_1^N \mathbf{Z}_\alpha\mathbf{Z}'_\alpha - \mathbf{Z}_N\mathbf{Z}'_N = \sum_1^{N-1}\mathbf{Z}_\alpha\mathbf{Z}'_\alpha. \tag{52}$$

Din teorema 19 rezultă că:

a) $\mathbf{Z}_N$ este independent de vectorii $\mathbf{Z}_1, \ldots, \mathbf{Z}_{N-1}$, adică $\sqrt{N}\,\mathbf{X}$ este independent de $N\hat{\boldsymbol{\Sigma}}$.

b) $\mathbf{Z}_N$ este un vector $N(\Sigma\, b_{N\beta}\,\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$, adică un vector $N(\sqrt{N}\,\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$. Cum $\overline{\mathbf{X}} = \frac{1}{\sqrt{N}}\,\mathbf{Z}_N$, rezultă că

$$M(\overline{\mathbf{X}}) = \frac{1}{\sqrt{N}}\,M(Z_N) = \boldsymbol{\mu}$$

$$\operatorname{cov}(\overline{X}, \overline{X}') = \operatorname{cov}\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\,\mathbf{Z}_n, \frac{1}{\sqrt{N}}\,\mathbf{Z}'_n\right) = \frac{1}{N}\,\boldsymbol{\Sigma},$$

ceea ce arată că $\overline{\mathbf{X}}$ este un vector $N\left(\boldsymbol{\mu}, \frac{1}{N}\boldsymbol{\Sigma}\right)$.

Din (52) și din teorema 22 rezultă că $N\hat{\boldsymbol{\Sigma}}$ este o variabilă Wishart cu $N-1$ grade de libertate, ceea ce demonstrează teorema.

Observații: i) $M(\hat{\boldsymbol{\Sigma}}) = \frac{1}{N}\,M\left(\sum_1^{N-1}\mathbf{Z}_\alpha\mathbf{Z}'_\alpha\right) = \frac{N-1}{N}\,\boldsymbol{\Sigma}$

ii) $(N-1)\,\mathbf{S} = \mathbf{A} = \sum_1^N (\mathbf{X}_\alpha - \overline{\mathbf{X}})(\mathbf{X}_\alpha - \overline{\mathbf{X}})'$ este o variabilă Wishart cu $N-1$ grade de libertate.

Scanned with OKEN Scanner

În cele ce urmează vom nota prin $\overline{\mathbf{X}}$ vectorul medie aritmetică determinat pe baza unei selecții de volum N. În cazul în care vom considera doi vectori aleatori $\mathbf{X}^{(1)}$ și $\mathbf{X}^{(2)}$, vom nota prin $\overline{\mathbf{X}}^{(1)}$ și $\overline{\mathbf{X}}^{(2)}$ mediile lor aritmetice determinate pe baza a două selecții de volume N_1, respectiv N_2, independente.

TEOREMA 25. *Dacă* $\mathbf{X}$ *este un vector aleator* $N(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ *unde* $\boldsymbol{\Sigma}$ *este o matrice cunoscută atunci statistica*

$$N(\overline{\mathbf{X}} - \boldsymbol{\mu}_0)' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\overline{\mathbf{X}} - \boldsymbol{\mu}_0) \tag{53}$$

este o variabilă aleatoare $\chi^2(n)$ *cînd* $\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}_0$, *iar cînd* $\boldsymbol{\mu} \neq \boldsymbol{\mu}_0$ *statistica (53) este o variabilă aleatoare* $\chi^2(n\,;\,\delta)$ *unde* δ *este dat de relația*

$$\delta^2 = N(\boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{\mu}_0)' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{\mu}_0). \tag{54}$$

Demonstrație. Teorema rezultă din faptul că punînd $\mathbf{Y} = \sqrt{N}\,(\overline{\mathbf{X}} - \boldsymbol{\mu}_0)$ sîntem în condițiile teoremei 21.

TEOREMA 26. *Dacă* $\mathbf{X}^{(1)}$ *și* $\mathbf{X}^{(2)}$ *sînt respectiv vectori aleatori* $N(\boldsymbol{\mu}^{(1)}, \boldsymbol{\Sigma})$, $N(\boldsymbol{\mu}^{(2)}, \boldsymbol{\Sigma})$, *unde* $\boldsymbol{\Sigma}$ *este cunoscută, atunci statistica*

$$\frac{N_1 N_2}{N_1 + N_2} (\overline{\mathbf{X}}^{(1)} - \overline{\mathbf{X}}^{(2)})' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\overline{\mathbf{X}}^{(1)} - \overline{\mathbf{X}}^{(2)}) \tag{55}$$

este o variabilă aleatoare $\chi^2(n)$ *cînd* $\boldsymbol{\mu}^{(1)} = \boldsymbol{\mu}^{(2)}$, *iar cînd* $\boldsymbol{\mu}^{(1)} \neq \boldsymbol{\mu}^{(2)}$ *statistica* (55) *este o variabilă aleatoare* $\chi^2(n, \delta)$ *unde parametrul de necentricitate* δ *este dat de relația*

$$\delta^2 = \frac{N_1 N_2}{N_1 + N_2} (\boldsymbol{\mu}^{(1)} - \boldsymbol{\mu}^{(2)})' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\boldsymbol{\mu}^{(1)} - \boldsymbol{\mu}^{(2)}). \tag{56}$$

Demonstrație. Dacă punem $\mathbf{Y} = \sqrt{\frac{N_1 N_2}{N_1 + N_2}} (\overline{\mathbf{X}}^{(1)} - \overline{\mathbf{X}}^{(2)})$ sîntem în condițiile teoremei 21, ceea ce demonstrează teorema.

Observații. i) Statistica

$$\frac{N_1 N_2}{N_1 + N_2} [(\overline{\mathbf{X}}^{(1)} - \overline{\mathbf{X}}^{(2)}) - (\boldsymbol{\mu}^{(1)} - \boldsymbol{\mu}^{(2)})]' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} [(\overline{\mathbf{X}}^{(1)} - \overline{\mathbf{X}}^{(2)}) - (\boldsymbol{\mu}^{(1)} - \boldsymbol{\mu}^{(2)})] \tag{57}$$

este o variabilă aleatoare $\chi^2(n)$.

ii) În cazul în care $\mathbf{X}^{(i)}$, $i = 1, 2$, sînt vectori aleatori $N(\boldsymbol{\mu}^{(i)}, \boldsymbol{\Sigma}_i)$ conform teoremei 26 și teoremei 20 rezultă că $\overline{\mathbf{X}}^{(1)} - \overline{\mathbf{X}}^{(2)}$ este un vector aleator $N\left(\boldsymbol{\mu}^{(1)} - \boldsymbol{\mu}^{(2)}, \frac{1}{N_1}\boldsymbol{\Sigma}_1 + \frac{1}{N_2}\boldsymbol{\Sigma}_2\right)$. Deci dacă luăm

$$\boldsymbol{\Sigma} = \frac{1}{N_1}\boldsymbol{\Sigma}_1 + \frac{1}{N_2}\boldsymbol{\Sigma}_2 \tag{58}$$

Scanned with OKEN Scanner

atunci conform teoremei 21 statistica

$$(59) \qquad (\bar{\mathbf{X}}^{(1)} - \bar{\mathbf{X}}^{(2)})' \Sigma^{-1} (\bar{\mathbf{X}}^{(1)} - \bar{\mathbf{X}}^{(2)}),$$

cînd $\mu^{(1)} = \mu^{(2)}$ este o variabilă aleatoare $\chi^2(n)$, iar cînd $\mu^{(1)} \neq \mu^{(2)}$ este o variabilă aleatoare $\chi^2(n\,;\,\delta)$ unde δ este dat de relația

$$(60) \qquad \delta^2 = (\mu^{(1)} - \mu^{(2)})' \Sigma^{-1} (\mu^{(1)} - \mu^{(2)}).$$

TEOREMA 27. *Dacă* $\mathbf{X}^{(i)}$, $1 \leqslant i \leqslant r$ *sînt vectori aleatori independenți repartizați* $N(\mu^{(i)}, \Sigma)$, *cu* Σ *cunoscută, atunci statistica*

$$(61) \qquad \left(\sum_1^r \frac{\beta_i^2}{N_i} \right)^{-1} \left(\sum_1^r \beta_i \bar{\mathbf{X}}^{(i)} - \mu_0 \right)' \Sigma^{-1} \left(\sum_1^r \beta_i \bar{\mathbf{X}}_i - \mu_0 \right)$$

este o variabilă aleatoare $\chi^2(n)$ *cînd* $\mu = \sum_1^r \beta_i \mu^{(i)} = \mu_0$ *cu* β_i, $1 \leqslant i \leqslant r$ *constante, iar cînd* $\mu \neq \mu_0$ *statistica (61) este o variabilă* $\chi^2(n, \delta)$ *unde* δ *este dat de egalitatea*

$$(62) \qquad \delta^2 = \left(\sum_1^r \frac{\beta_i^2}{N_i} \right)^{-1} \left(\sum_1^r \beta_i \mu^{(i)} - \mu_0 \right)' \Sigma^{-1} \left(\sum_1^r \beta_i \mu^{(i)} - \mu_0 \right).$$

Demonstrație. Din teoremele 24 și 20 urmează că vectorul $\sum_1^r \beta_i \mathbf{X}^{(i)} - \mu_0$ este un vector

$$N\left(\sum_1^r \beta_i \mu^{(i)} - \mu_0, \quad \left(\sum_1^r \frac{\beta_i^2}{N_i} \right) \Sigma \right)$$

de unde rezultă că vectorul

$$\sqrt{\left(\sum_1^r \frac{\beta_i^2}{N_i} \right)^{-1}} \left(\sum_1^r \beta_i \bar{\mathbf{X}}_i - \mu_0 \right)$$

satisface condițiile teoremei 21 și deci teorema este demonstrată.

Observație. Dacă $\mathbf{X}^{(i)}$, $1 \leqslant i \leqslant r$ sînt vectori aleatori $N(\mu^{(i)}, \Sigma)$, fiecare avînd dimensiunea n, atunci conform teoremelor 24 și 20 vectorul aleator $\sum_1^r \beta_i \mu^{(i)}$, cu $\mathbf{X}^{(i)}$ independenți, este de tipul $N(\mu, \Sigma_*)$ unde

$$(63) \qquad \mu = \sum_1^r \beta_i \mu^{(i)}, \quad \Sigma_* = \sum_1^r \frac{\beta_i^2}{N_i} \Sigma_i.$$

Deci conform teoremei 21 rezultă că statistica

$$(64) \qquad \left(\sum_1^r \beta_i \bar{\mathbf{X}}^{(i)} - \mu_0 \right)' \Sigma_*^{-1} \left(\sum_1^r \beta_i \bar{\mathbf{X}}^{(i)} - \mu_0 \right)$$

Scanned with OKEN Scanner

este o variabilă aleatoare $\chi^2(n)$ cînd $\mu = \mu_0$, iar cînd $\mu \neq \mu_0$ statistica (64) este o variabilă aleatoare $\chi^2(n\,;\,\delta)$ unde δ este definit de relaţia

$$\delta^2 = (\mu - \mu_0)' \sum\nolimits_*^{-1} \mu - \mu_0) \tag{65}$$

În continuare vom presupune că matricele de covariaţie sînt necunoscute, rezultatele prezentate fiind o sistematizare a paragrafelor 5.3 şi 5.6 din cartea lui Anderson (1958).

TEOREMA 28. *Dacă* $\mathbf{X}$ *este vector aleator* $N(\mu, \Sigma)$, *unde* μ *şi* Σ *nu sînt cunoscute, atunci statistica*

$$N(\overline{\mathbf{X}} - \mu_0)' \mathbf{S}^{-1}(\overline{\mathbf{X}} - \mu_0) \tag{66}$$

este o variabilă aleatoare $T^2(n, N-1)$ *cînd* $\mu = \mu_0$ *iar cînd* $\mu \neq \mu_0$ *variabila (66) este o variabilă aleatoare* $T^2(n, N-1\,;\,\delta)$ *unde parametrul de necentricitate* δ *este definit de relaţia*

$$\delta^2 = N(\mu - \mu_0)' \sum^{-1} (\mu - \mu_0). \tag{67}$$

Demonstraţie. Dacă punem $Y = \sqrt{N}(\overline{\mathbf{X}} - \mu_0)$ sîntem în condiţiile definiţiei 7 şi teorema este demonstrată.

Cuantilele variabilei aleatoare (66) se pot deduce, pe baza teoremei 23 din cuantilele variabilei aleatoare F.

TEOREMA 29. *Dacă* $X^{(1)}$ *şi* $X^{(2)}$ *sînt respectiv vectori aleatori* $N(\mu^{(1)}, \Sigma)$, $N(\mu^{(2)}, \Sigma)$ *unde* $\mu^{(i)}$ *şi* Σ *sînt necunoscute atunci statistica*

$$\frac{N_1 N_2}{N_1 + N_2} (\overline{\mathbf{X}}^{(1)} - \overline{\mathbf{X}}^{(2)})' \mathbf{S}^{-1} (\overline{\mathbf{X}}^{(1)} - \overline{\mathbf{X}}^{(2)}) \tag{68}$$

unde

$$\mathbf{S} = \frac{1}{N_1 + N_2 - 2}\left[\sum_1^{N_1} (\mathbf{X}_k^{(1)} - \overline{\mathbf{X}}^{(1)})(\mathbf{X}_k^{(1)} - \overline{\mathbf{X}}^{(1)})' + \right.$$
$$\left. + \sum_1^{N_2} (\mathbf{X}_k^{(2)} - \overline{\mathbf{X}}^{(2)})(\mathbf{X}_k^{(2)} - \overline{\mathbf{X}}^{(2)})'\right] \tag{69}$$

este o variabilă $T(n, N_1 + N_2 - 2)$ *cînd* $\mu^{(1)} = \mu^{(2)}$, *iar cînd* $\mu^{(1)} \neq \mu^{(2)}$ *statistica (69) este o variabilă* $T(n, N_1 + N_2 - 2\,;\,\delta)$ *unde* δ *este definit de relaţia*

$$\delta^2 = \frac{N_1 N_2}{N_1 + N_2} (\mu^{(1)} - \mu^{(2)})' \Sigma^{-1} (\mu^{(1)} - \mu^{(2)}). \tag{70}$$

Demonstraţie. Deoarece $\mathbf{X}_\alpha^{(1)}$, $1 \leqslant \alpha \leqslant N_1$ şi $\mathbf{X}_\alpha^{(2)}$ $1 \leqslant \alpha \leqslant N_2$ sînt respectiv independente şi independente, rezultă că $\mathbf{X}_\alpha^{(1)} - \overline{\mathbf{X}}^{(1)}, 1 \leqslant \alpha \leqslant N_1$

Scanned with OKEN Scanner

și $\mathbf{X}_\alpha^{(2)} - \overline{\mathbf{X}}^{(2)}$, $1 \leqslant \alpha \leqslant N_2$ sînt de asemenea independente între ele, dar din cauza relațiilor

$$\sum_1^{N_1} (\mathbf{X}_\alpha^{(1)} - \overline{\mathbf{X}}^{(1)}) = 0, \quad \sum_1^{N_2} (\mathbf{X}_\alpha^{(2)} - \overline{\mathbf{X}}^{(2)}) = 0$$

rezultă că numai $N_1 + N_2 - 2$ sînt independente. Fiecare din cele $N_1 + N_2 - 2$ variabilele independente are repartiția $N(0, \Sigma)$. Deci matricea $(N_1 + N_2 - 2)\,\mathbf{S}$ este de forma $\sum_1^{N_1+N_2-2} \mathbf{Z}_\alpha \mathbf{Z}_\alpha'$ unde $\mathbf{Z}_\alpha$ este un vector $N(\mathbf{0}, \Sigma)$, $\alpha = 1, 2, \ldots, N_1 + N_2 - 2$. Dacă punem

$$\mathbf{Y} = \sqrt{\frac{N_1 N_2}{N_1 + N_2}} (\overline{\mathbf{X}}^{(1)} - \overline{\mathbf{X}}^{(2)}),$$

atunci rezultă că sîntem în condițiile definiției 7 și teorema este demonstrată.

Din teorema 23 rezultă că

$$\frac{N_1 N_2}{N_1 + N_2} (\overline{\mathbf{X}}^{(1)} - \overline{\mathbf{X}}^{(2)})' \mathbf{S}^{-1} (\overline{\mathbf{X}}^{(1)} - \overline{\mathbf{X}}^{(2)}) =$$

(71)

$$= \frac{(N_1 + N_2 - 2)\, n}{N_1 + N_2 - n - 1} F_{n,\, N_1+N_2-n-1}$$

TEOREMA 30. *Fie* $\mathbf{X}^{(i)}$ *doi vectori aleatori* $N(\mu^{(i)}, \Sigma_i)$, $i = 1, 2$ *cu* Σ_i *necunoscute și două selecții independente efectuate asupra lor de volume respectiv* N_i, $i = 1, 2$, *unde* $N_1 < N_2$. *Fie.*

$$\mathbf{Y}_\alpha = \mathbf{X}_\alpha^{(1)} - \sqrt{\frac{N_1}{N_2}} \mathbf{X}^{(2)} + \frac{1}{\sqrt{N_1 N_2}} \sum_1^{N_1} \mathbf{X}_\gamma^{(2)} - \frac{1}{N_2} \sum_1^{N_2} \mathbf{X}_\beta^{(2)}, \quad 1 \leqslant \alpha \leqslant N_1 \tag{72}$$

și

$$\mathbf{S} = \frac{1}{N_1 - 1} \sum_1^{N_1} (\mathbf{Y}_\alpha - \overline{\mathbf{Y}})(\mathbf{Y}_\alpha - \overline{\mathbf{Y}})'. \tag{73}$$

În aceste condiții statistica

$$T^2 = N_1 \overline{\mathbf{Y}}' \mathbf{S}^{-1} \mathbf{Y} \tag{74}$$

este o variabilă aleatoare T^2 $(n, N_1 - 1)$ *cînd* $\mu^{(1)} = \mu^{(2)}$, *iar cînd* $\mu^{(1)} \neq \mu^{(2)}$, (74) *este o variabilă aleatoare* T^2 $(n, N_1 - 1; \delta)$ *unde* δ *este dat de relația*

$$\delta^2 = N_1 (\mu^{(1)} - \mu^{(2)})\, \Sigma^{-1} (\mu^{(1)} - \mu^{(2)}) \tag{75}$$

Scanned with OKEN Scanner

iar

$$\Sigma = \Sigma_1 + \frac{N_1}{N_2}\Sigma_2. \tag{76}$$

Demonstrație. Din (72) obținem

$$M(\mathbf{Y}_\alpha) = \boldsymbol{\mu}^{(1)} - \sqrt{\frac{N_1}{N_2}}\boldsymbol{\mu}^{(2)} + \frac{N_1}{\sqrt{N_1 N_2}}\boldsymbol{\mu}^{(2)} - \frac{N_2}{N_1}\boldsymbol{\mu}^{(2)} = \boldsymbol{\mu}^{(1)} - \boldsymbol{\mu}^{(2)} \tag{77}$$

și

$$\operatorname{cov}(\mathbf{Y}_\alpha, \mathbf{Y}'_\beta) = M\left\{\left[(\mathbf{X}_\alpha^{(1)} - \boldsymbol{\mu}^{(1)}) - \sqrt{\frac{N_1}{N_2}}(\mathbf{X}_\alpha^{(2)} - \boldsymbol{\mu}^{(2)}) + \right.\right.$$

$$\left. + \frac{1}{\sqrt{N_1 N_2}}\sum_1^{N_1}(\mathbf{X}_\gamma^{(2)} - \boldsymbol{\mu}^{(2)}) - \frac{1}{N_2}\sum_1^{N_2}(\mathbf{X}_\gamma^{(2)} - \boldsymbol{\mu}^{(2)})\right]\left[(\mathbf{X}_\beta^{(1)} - \boldsymbol{\mu}^{(1)})' - \right.$$

$$\left.\left. - \sqrt{\frac{N_1}{N_2}}(\mathbf{X}^{(2)} - \boldsymbol{\mu}^{(2)})' + \frac{1}{\sqrt{N_1 N_2}}\sum_1^{N_1}(\mathbf{X}_\gamma^{(2)} - \boldsymbol{\mu}^{(2)})' - \frac{1}{N_2}\sum_1^{N_2}(\mathbf{X}_\gamma^{(2)} - \boldsymbol{\mu}^{(2)})'\right]\right\} =$$

$$= \delta_{\alpha\beta}\Sigma_1 + \frac{N_1}{N_2}\delta_{\alpha\beta}\Sigma_2 + \Sigma_2\left(-\frac{2}{N_2} + \frac{2}{N_2}\sqrt{\frac{N_1}{N_2}} + \frac{N_1}{N_1 N_2} - \frac{2N_1}{N_2\sqrt{N_1 N_2}} + \right.$$

$$\left. + \frac{N_2}{N_2^2}2\right) = \delta_{\alpha\beta}\left(\Sigma_1 + \frac{N_1}{N_2}\Sigma_2\right),$$

sau

$$\operatorname{cov}(\mathbf{Y}_\alpha, \mathbf{Y}'_\alpha) = \Sigma_1 + \frac{N_1}{N_2}\Sigma_2 = \Sigma.$$

De asemenea

$$\bar{\mathbf{Y}} = \frac{1}{N_1}\sum_1^{N_1}\mathbf{Y}_\alpha = \bar{\mathbf{X}}^{(1)} - \bar{\mathbf{X}}^{(2)} \tag{78}$$

și

$$(N_1 - 1)\mathbf{S} = \sum_1^{N_1}\left[\mathbf{X}_\alpha^{(1)} - \bar{\mathbf{X}}^{(1)} - \sqrt{\frac{N_1}{N_2}}(\mathbf{X}_\alpha^{(2)} - \frac{1}{N_1}\sum_1^{N_1}\mathbf{X}_\beta^{(2)})\right]\times$$

$$\times\left[\mathbf{X}_\alpha^{(1)} - \bar{\mathbf{X}}^{(1)} - \sqrt{\frac{N_1}{N_2}}(\mathbf{X}_\alpha^{(2)} - \frac{1}{N_1}\sum_1^{N_1}\mathbf{X}_\beta^{(2)})\right]'. \tag{79}$$

Dacă în (79) punem $\mathbf{U}_\alpha = \mathbf{X}^{(1)} - \sqrt{\frac{N_1}{N_2}}\mathbf{X}_\alpha^{(2)}$, $1 \leqslant \alpha \leqslant N$,

avem

$$(N_1 - 1)\mathbf{S} = \sum_1^{N_1}(\mathbf{U}_\alpha - \bar{\mathbf{U}})(\mathbf{U}_\alpha - \bar{\mathbf{U}})', \tag{80}$$

Scanned with OKEN Scanner

unde

$$\overline{\mathbf{U}} = \frac{1}{N_1} \sum_1^{N_1} \mathbf{U}_\alpha .$$

Urmează că $\mathbf{U}_\alpha - \overline{\mathbf{U}}$ este un vector $N(0, \Sigma)$, iar $\overline{\mathbf{Y}}$ este un vector $N\left(0, \frac{1}{N_1}\Sigma\right)$ și este independentă de $\mathbf{U}_\alpha - \overline{\mathbf{U}}$, $1 \leqslant \alpha \leqslant N_1$. Dacă în (74) punem $\sqrt{N}\,\overline{\mathbf{Y}} = \mathbf{Y}$ sîntem în condițiile definiției 7 și teorema este demonstrată.

TEOREMA 31. *Dacă* $\mathbf{X}^{(i)}$, $1 \leqslant i \leqslant r$ *sînt vectori aleatori* $N(\mu^{(i)}, \Sigma)$ *iar matricea* Σ *este necunoscută, atunci statistica*

$$\left(\sum_1^r \frac{\beta_i^2}{N_i}\right)^{-1} \left(\sum_1^r \beta_i \overline{\mathbf{X}}^{(i)} - \mu_0\right)' \mathbf{S}^{-1} \left(\sum_1^r \beta_i \overline{\mathbf{X}}^{(i)} - \mu_0\right) \tag{81}$$

unde

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\sum_1^r N_i - r} \sum_{i=1}^r \sum_{\alpha=1}^{N_i} (\mathbf{X}_\alpha^{(i)} - \overline{\mathbf{X}}^{(i)})(\mathbf{X}_\alpha^{(i)} - \overline{\mathbf{X}}^{(i)}), \tag{82}$$

este o variabilă $T^2(n, \Sigma N_i - n)$ *cînd* $\mu = \mu_0 = \sum_1^r \beta_i \mu^{(i)}$, *iar cînd* $\mu_0 \neq \mu$ *statistica (81) este o variabilă aleatoare* $T^2(n, \Sigma N_i - n;\ \delta)$ *unde* δ *este definit de relația*

$$\delta^2 = \left(\sum_1^r \frac{\beta_i^2}{N_i}\right)^{-1} \left(\sum_1^r \beta_i \mu^{(i)} - \mu_0\right)' \Sigma^{-1} \left(\sum_1^r \beta_i \mu^{(i)} - \mu_0\right). \tag{83}$$

Demonstrație. Vectorul aleator $\mathbf{Y} = \sum_1^r \beta_i \overline{\mathbf{X}}^{(i)} - \mu_0$ este un vector $N(\mu - \mu_0, \Sigma_*)$, unde

$$\mu = \sum_1^r \beta_i \mu^{(i)}, \quad \Sigma_* = \left(\sum_1^r \frac{\beta_i^2}{N_i}\right)\Sigma. \tag{84}$$

Dacă în (81) introducem Y, notăm

$$\mathbf{Z}_\alpha^{(i)} = \sqrt{\sum_1^r \frac{\beta_i^2}{N_i}}\,(\mathbf{X}_\alpha^{(i)} - \mathbf{X}^{(i)}), \quad 1 \leqslant i \leqslant r, \quad 1 \leqslant \alpha \leqslant N_i$$

și ținem seama că numai $\Sigma N_i - n$ din vectorii $\mathbf{Z}_\alpha^{(i)}$ sînt independenți, atunci sîntem în condițiile definiției 7 și deci teorema este demonstrată.

Scanned with OKEN Scanner

TEOREMA 32. *Fie* $\mathbf{X}_i$, $1 \leqslant i \leqslant r$ *vectori aleatori* $N(\mu^{(i)}, \Sigma_i)$, *fiecare de dimensiune* n, *cu* Σ_i *necunoscute și fie* r *selecții independente efectuate respectiv asupra lor, de volum* N_i, *unde* $N_1 = \min\limits_{1 \leqslant i \leqslant r} N_i$. *Fie*

$$\mathbf{Y}_\alpha = \beta_1 \mathbf{X}_\alpha^{(1)} + \sum_2^r \beta_i \sqrt{\frac{N_1}{N_i}} \left(\mathbf{X}_\alpha^{(1)} - \frac{1}{N_i} \sum_1^{N_1} \mathbf{X}_k^{(i)} + \right.$$

(85)

$$\left. + \frac{1}{\sqrt{N_1 N_i}} \sum_1^{N_i} \mathbf{X}_\gamma^{(i)} \right), \quad 1 \leqslant \alpha \leqslant N_1$$

și

$$\mathbf{S} = \frac{1}{N_1 - 1} \sum_1^{N_1} (\mathbf{Y}_\alpha - \bar{\mathbf{Y}})(\mathbf{Y}_\alpha - \bar{\mathbf{Y}})'. \tag{86}$$

În aceste condiții statistica

$$T^2 = N_1 (\bar{\mathbf{Y}} - \boldsymbol{\mu}_0)' \mathbf{S}^{-1} (\bar{\mathbf{Y}} - \boldsymbol{\mu}_0) \tag{87}$$

este o variabilă aleatoare $T^2(n, N_1 - 1)$ *cînd* $\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}_0$ *unde* $\boldsymbol{\mu}$ *este definit de* (84), *iar cînd* $\boldsymbol{\mu} \neq \boldsymbol{\mu}_0$; *statistica* (87) *este o variabilă aleatoare* $T^2(n, N_1 - 1; \delta)$ *unde* δ *este dat de relația*

$$\delta^2 = N_1 (\boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{\mu}_0)' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{\mu}_0). \tag{88}$$

Matricea $\boldsymbol{\Sigma}$ *din relația anterioară este dată de*

$$\boldsymbol{\Sigma} = \sum_1^r \frac{\beta_i^2 N_1}{N_i} \Sigma_i \tag{89}$$

unde β_i *sînt constante date.*

Demonstrație. Se observă că

$$M(\mathbf{Y}_\alpha) = \beta_1 \boldsymbol{\mu}^{(1)} + \sum_2^r \beta_i \sqrt{\frac{N_1}{N_i}} \left(\boldsymbol{\mu}^{(i)} - \frac{1}{N_1} N_1 \boldsymbol{\mu}^{(i)} + \right.$$

$$\left. + \frac{N_i}{\sqrt{N_1 N_i}} \boldsymbol{\mu}^{(i)} \right) = \sum_1^r \beta_i \boldsymbol{\mu}^{(i)} = \boldsymbol{\mu},$$

$$\operatorname{cov}(\mathbf{Y}_\alpha, \mathbf{Y}_\gamma') = \delta_{\alpha\gamma} \left(\sum_1^r \frac{\beta_i^2 N_1}{N_i} \Sigma_i \right) = \delta_{\alpha\gamma} \boldsymbol{\Sigma}$$

unde $\boldsymbol{\Sigma}$ este definită de (89). De asemenea

$$\bar{\mathbf{Y}} = \frac{1}{N_1} \sum_1^{N_1} \mathbf{Y}_\alpha = \sum_1^r \beta_i \bar{\mathbf{X}}^{(i)}, \bar{\mathbf{X}}^{(i)} = \frac{1}{N_i} \sum_1^{N_i} \mathbf{X}_k^{(i)}$$

de unde rezultă că $\bar{\mathbf{Y}}$ este un vector aleator $N\left(\boldsymbol{\mu}, \frac{1}{N_1} \boldsymbol{\Sigma}\right)$.

Scanned with OKEN Scanner

Dacă punem

$$\overline{\mathbf{U}}_\alpha = \sum_1^r \beta_i \sqrt{\frac{N_1}{N_i}}\, \mathbf{X}_\alpha^{(1)}, \qquad 1 \leqslant \alpha \leqslant N_1,$$

atunci (86) se poate scrie

$$(N-1)\,\mathbf{S} = \sum_1^{N_1} (\mathbf{U}_\alpha - \overline{\mathbf{U}})\,(\mathbf{U}_\alpha - \overline{\mathbf{U}})', \tag{90}$$

unde $\mathbf{U}_\alpha - \overline{\mathbf{U}}$ este un vector aleator $N(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Sigma})$.

Dacă introducem notația $\mathbf{Y} = \sqrt{N_1}\,(\overline{\mathbf{Y}} - \boldsymbol{\mu}_0)$ și ținem seama de (90), sîntem în condițiile definiției 7 și teorema este demonstrată.

Matricea $\mathbf{S}$ definită de (86) se exprimă sub forma

$$\mathbf{S} = \sum_1^r \frac{\beta_i^2 N_1}{N_i}\, \mathbf{S}_i \tag{91}$$

unde

$$\mathbf{S}_i = \frac{1}{N_i - 1} \sum_1^{N_i} (\mathbf{X}_\alpha^{(i)} - \overline{\mathbf{X}}^{(i)})(\mathbf{X}_\alpha^{(i)} - \overline{\mathbf{X}}^{(i)})'. \tag{92}$$

Scanned with OKEN Scanner

Capitolul IV

FORME PĂTRATICE ÎN VARIABILE NORMALE

§1. Introducere

Fie $\mathbf{X}' = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ un vector aleator n-dimensional $N(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$.

DEFINIȚIA 1. $Q(\mathbf{X})$ definită de

$$Q(\mathbf{X}) = Q(X_1, \ldots, X_n) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_i X_j \tag{1}$$

unde $\mathbf{A} = (a_{ij})_{1 \leqslant i,\, j \leqslant n}$ este o matrice simetrică poartă numele de formă pătratică.

Formele pătratice apar într-o serie de probleme de statistică în legătură cu variabile aleatoare repartizate normal. De exemplu, analiza dispersională se ocupă cu construcții de forme pătratice în variabilele aleatoare ce reprezintă observațiile (primare sau transformate).

Vom prezenta diferite metode pentru determinarea repartiției formei pătratice $Q(\mathbf{X})$. Aceste metode sînt bazate pe funcția caracteristică.

§2. Repartiția formei pătratice. Interpretarea geometrică

Fie $(Z_1, Z_2, \ldots, Z_n)$ vectorul aleator n-dimensional de densitate de repartiție

$$p\mathbf{Z}(\mathbf{z}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} |\boldsymbol{\Sigma}|^{\frac{1}{2}}} \exp\left(-\frac{1}{2} \mathbf{z}' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{z} \right) \tag{2}$$

și

$$Q(\mathbf{Z}) = \mathbf{Z}' \mathbf{A} \mathbf{Z} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} Z_i Z_j. \tag{1'}$$

Funcția de repartiție a formei pătratice $Q(\mathbf{Z})$ este

$$P[Q(\mathbf{Z}) < y] = \int_{\mathbf{Z}'\mathbf{A}\mathbf{Z} < y} p\mathbf{Z}(\mathbf{z})\, d\mathbf{z} \tag{3}$$

Scanned with OKEN Scanner

unde $dz = dz_1\, dz_2 \ldots dz_n$.

Deoarece Σ este pozitiv definită și simetrică, poate fi pusă sub forma

$$\Sigma = LL', \quad |\Sigma| = |L|^2, \tag{4}$$

unde L este o matrice triunghiulară inferioară nesingulară. Deoarece L este nesingulară putem face transformarea

$$z_{(1)} = L^{-1} z, \tag{5}$$

pentru care

$$z'_{(1)}\, z_{(1)} = z'\, (L^{-1})'\, L^{-1} z = z'\, \Sigma^{-1} z.$$

Ținînd seama în (3) de (2) și (5) găsim

$$P[Q(Z) < y] = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{z'_{(1)}\,(L'AL)\,z_{(1)} < y} \exp\left(-\frac{1}{2} z'_{(1)}\, z_{(1)}\right) dz_1. \tag{3'}$$

Matricea $L'AL$ este simetrică, astfel încît dacă Λ este matricea diagonală a valorilor proprii ale $L'AL$ și P este matricea vectorilor proprii asociată, atunci

$$P'L'ALP = \Lambda$$

Dacă considerăm transformarea liniară $W = Pz$ (1) (3′) devine

$$P[Q(Z) < y] = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{w'\Lambda w} \exp\left(-\frac{1}{2} w'w\right) dw. \tag{3''}$$

Am demonstrat

PROPOZIȚIA 1. *Repartiția formei pătratice Q este aceeași cu a*

$$Q(W) = W'\Lambda W = \sum_1^n \lambda_i W_i^2 \tag{6}$$

unde $W_1, \ldots, W_n$ sînt variabile aleatoare independente repartizate $N(0,1)$, iar numere

$$\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \ldots \geqslant \lambda_n$$

sînt valorile proprii ale matricei $L'AL$ (sau ΣA).

În cazul în care toate componentele vectorului μ sînt nule, notăm prin

$$F_n(y, \lambda) = F_n(y, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) = P\left[\sum_1^n \lambda_i W_i^2 < y\right] \tag{7}$$

funcția de repartiție a formei pătratice Q.

Scanned with OKEN Scanner

În cazul în care nu toate componentele vectorului μ sînt nule, notăm prin

$$F_n(y, \lambda, \omega) = F_n(y : y_1, \ldots, \lambda_n, \omega_1, \ldots, \omega_n) = \tag{8}$$
$$= P\left[\sum_1^n \lambda_i (W_i - \omega_i)^2 < y\right]$$

funcţia de repartiţie a formei pătratice

$$Q(\mathbf{W}) = \sum_1^n \lambda_i (W_i - \omega_i)^2 \tag{6'}$$

ω_i este aceeaşi funcţie de μ ca şi W_i de $\mathbf{Z}$.

Dacă $\lambda_n \geqslant 0$, atunci

$$\sum_1^n \lambda_i (W_i - \omega_i)^2 < y$$

reprezintă ecuaţia unui elipsoid cu centrul în punctul $(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n)$ şi de semiaxe $\sqrt{\frac{y}{\lambda_1}}, \sqrt{\frac{y}{\lambda_2}}, \ldots, \sqrt{\frac{y}{\lambda_n}}$, iar $F_n(y, \lambda, \omega)$ masa de probabilitate a repartiţiei normale din acest elipsoid.

Elipsoidul poate fi transformat într-o hipersferă, referitoare la variabilele

$$\mathbf{W}'_{(1)} = \mathbf{W}' \sqrt{\Lambda},$$

avînd dispersii diferite ($D^2(\mathbf{W}_{(1)i}) = \lambda_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$). Într-adevăr :

$$F_n(y;\ \mu,\ \omega) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{(\mathbf{w}-\mathbf{w})'\Lambda(\mathbf{w}-\mathbf{w})<y} \exp\left(-\frac{1}{2}\mathbf{w}'\,\mathbf{w}\right) d\mathbf{w} =$$

(9)

$$= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} \sqrt{\lambda_1, \ldots, \lambda_n}} \int_{(\mathbf{w}_{(1)}-\omega_{(1)})'\ (\mathbf{w}_{(1)}-\omega_{(1)})} \exp\left(-\frac{1}{2}\mathbf{w}'_{(1)}\,\Lambda^{-1}\,\mathbf{w}_{(1)}\right) d\mathbf{w}_{(1)}$$

unde $\omega'_{(1)} = \omega' \sqrt{\Lambda}$.

Pentru detaliu a se vedea Ruben 1960, 1962.

Densitatea de repartiţie corespunzătoare funcţiei de repartiţie $F_n(y;\ \lambda)$ este

$$p_n(y;\ \lambda) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} F_n(y;\ \lambda) \tag{10}$$

Scanned with OKEN Scanner

iar a funcției de repartiție $F_n(y;\ \lambda,\ \omega)$.

$$p_n(y;\ \lambda,\ \omega) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} F_n(y;\ \lambda,\ \omega). \tag{11}$$

Prin definiție $F_n(y;\ \lambda) = F_n(y;\ \lambda,\ 0)$ și $p_n(y;\ \lambda) = p_n(y;\ \lambda,\ 0)$

PROPOZIȚIA 2.

$$F_n(y,\ \lambda) = 2\sqrt{\frac{y}{\lambda_n}} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, \mathrm{e}^{-\frac{1}{2} y u^2/\lambda_n} F_{n-1}(y(1-u^2);\ \lambda)\, \mathrm{d}u. \tag{12}$$

Demonstrație. Din (9) urmează că

$$F_n(y:\lambda) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\sum \lambda_j w < y} \exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} w_j^2\right) \mathrm{d}w.$$

Intersecția hiperplanului $w_n = w$ cu elipsoidul n-dimensional $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j w_j^2 \leqslant y$ este un elipsoid $(n-1)$ dimensional, definit de

$$\sum_{j=1}^{n-1} \lambda_j w_j^2 \leqslant y - \lambda_n w^2. \tag{13}$$

Deci

$$F_n(y:\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\sqrt{y/\lambda_n}}^{\sqrt{y/\lambda_n}} \mathrm{e}^{-\frac{w^2}{2}} F_{n-1}(y - \lambda_n w^2;\ \lambda)\, \mathrm{d}w \tag{14}$$

Dacă în (14) facem transformarea $u = w\sqrt{\frac{\lambda_n}{y}}$ obținem (12).

§ 3. Funcția caracteristică și momente

TEOREMA 1. *Funcția caracteristică a formei pătratice*

$$Q(\mathbf{W}) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j (W_j - \omega_j)^2$$

este

$$\varphi_n(t;\ \lambda;\ \omega) = M(\exp \mathrm{i}\, t\, Q(\mathbf{W})) =$$

$$= \exp\left(-\frac{1}{2}\sum_1^n \omega_j^2\right) \exp\left\{\frac{1}{2}\sum_1^n \frac{\omega_j^2}{1 - 2\ \mathrm{it}\ \lambda_j}\right\} \prod_1^n (1 - 2\ \mathrm{it}\lambda_j)^{-\frac{1}{2}}. \tag{15}$$

Scanned with OKEN Scanner

TEOREMA 2. *Funcţia generatoare de cumulanţi a formei pătratice* (6) *este*

$$K_n(\theta;\ \lambda;\ \omega) = \ln\ M(e^{\theta Q(W)}) =$$

$$= -\frac{1}{2}\sum_1^n \omega_j^2 + \frac{1}{2}\sum_1^n \frac{\omega_j^2}{1-2\ \theta\lambda_j} - \frac{1}{2}\sum_1^n \ln\ (1-2\ \theta\lambda_j). \tag{16}$$

Notînd prin $k_t\ (Q;\ \lambda;\ \omega)$ cumulantul de ordinul s al formei pătratice $Q\ (\mathbf{W}) = \sum_1^n \lambda_j\ (W_j - \omega_j)^2$ avem :

$$K_n(\theta;\ \lambda;\ \omega) = \sum_1^n k_s\ (Q;\ \lambda;\ \omega)\frac{\theta^s}{s!}, \tag{17}$$

Comparînd coeficienţii în (16) şi (17) avem

$$k_s(Q;\ \lambda,\ \omega) = 2^{s-1}\ (s-1)!\ \sum_1^n\ (s\ \omega_j^2 + 1)\ \lambda_j^s. \tag{18}$$

TEOREMA 11. *Funcţia caracteristică a formei pătratice* $Q(\mathbf{W}) = \sum_1^n \lambda_i\ W_i^2$ *este*

$$\varphi_n\ (t;\ \lambda) = \prod_1^n\ (1-2\ it\ \lambda_j)^{-\frac{1}{2}}. \tag{15'}$$

Grenander, Pollak şi Slepian (1952) obţin ecuaţii integrale pentru $p_n\ (y;\ \lambda)$ şi $F_n\ (y;\ \lambda)$.

Derivînd logaritmic (15') obţinem

$$-\ \varphi_n'(y;\ \lambda) = \varphi_n\ (y;\ \lambda)\ \sum_1^n \frac{\lambda_j}{1-2\ it\ \lambda_j}. \tag{19}$$

Aplicînd transformarea Fourier inversă

$$yp_n(y;\ \lambda) = \int_0^y p_n\ (y-x)\ h(x)\ \ \mathrm{d}x \tag{20}$$

unde

$$h(x) = \frac{1}{2}\sum_1^n \mathrm{e}^{-\frac{x}{2\lambda_j}}$$

sau, echivalent

$$yF_n\ (y;\ \lambda) = \int_0^y F_n\ (y-x;\ \lambda)\ \ H(x)\ \mathrm{d}x \tag{21}$$

Scanned with OKEN Scanner

unde

$$H(x) = 1 + h(x)$$

obţinem ecuaţii integrale care pot fi folosite ca bază ale metodelor numerice pentru calcularea funcţiilor $p_n(y:\lambda)$ şi $F_n(y:\lambda)$.

Prin urmare am demonstrat

TEOREMA 3. *Ecuaţiile integrale pentru* $p_n(y;\lambda)$ *şi* $F_n(y:\lambda)$ *sînt date de* (20) *şi respectiv* (21).

TEOREMA 4. *Cumulantul de ordinul* s, *al formei patratice* (6) *este*

$$k_s(Q;\lambda) = k_s(Q:\lambda;0) = 2^{s-1}(s-1)!\sum_1^n \lambda_j^s. \tag{22}$$

Observaţie. Repartiţia formei pătratice $\mathbf{Z'AZ}$ este aceeaşi cu a formei pătratice $\mathbf{W'\Lambda W}$ unde $\mathbf{\Lambda}$ este matricea diagonală a valorilor proprii ale $\mathbf{\Sigma A}$.

Avem

$$\sum_1^n \lambda_j^s = \mathrm{Ur}\,(\mathbf{\Sigma A})^2 \tag{23}$$

şi (22) se scrie

$$k_s(Q:\lambda) = 2^{s-1}(s-1)!\ \mathrm{Ur}\,(\mathbf{\Sigma A})^2 \tag{24}$$

Observaţii i) Dacă $\lambda_j = 1$ pentru $j = 1,2,\ldots,n$ atunci $Q(\mathbf{W}) = \sum_1^n (W_j - \omega_j^2)$ are o repartiţie $\chi^2\ (n;\sum_1^n \omega_j^2)$.

ii) Dacă valorile proprii nu sînt toate distincte însă valorile $\lambda_1', \lambda_2', \ldots, \lambda_m'$ sînt de multiplicitate $n_1, n_2, \ldots,$ respectiv n_m, atunci

$$\mathrm{Q}\,(\mathbf{W}) = \sum_{r=1}^m \lambda_r'\,\chi^2\,(n_r,\ \Sigma\,\omega_j^2) \tag{25}$$

sumarea făcîndu-se după toţi j pentru care $\lambda_j = \lambda_r'$.

§4. Forme pozitiv definite în cazul centrat

4.1. Punerea problemei

În cazul în care toate valorile proprii sînt de multiplicitate pară, n trebuie să fie par şi cea mai generală situaţie este aceea în care există $n/2$ valori proprii distincte

$$\beta_1,\ \beta_2,\ \ldots,\ \beta_k \qquad k = \frac{n}{2}$$

Scanned with OKEN Scanner

fiecare de multiplicitate 2. În acest caz funcţia caracteristică a formei $Q(\mathbf{W})$ este

$$\varphi_n(t, \lambda) = \prod_1^k (1-2\ it\ \beta_j)^{-1} \tag{26}$$

Presupunînd pentru moment că

$$\beta_1 > \beta_2 > \ldots > \beta_n > 0$$

(adică $\mathbf{A}$ este pozitiv definită şi toate multiplicităţile sînt doi),

$$\varphi_n(t, \lambda) = \sum_1^k \frac{b_j}{1-2\ it\ \beta_j} \tag{27}$$

unde

$$b_j = \beta_j^{k-1} \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq j}} \frac{1}{\beta_j - \beta_l}$$

conduce la

$$p_n(y; \lambda) = \frac{1}{2} \sum_1^k \frac{b_j}{\beta_j} \exp\left(-\frac{1}{2}\frac{y}{\beta_j}\right), \quad y > 0. \tag{28}$$

Această formulă a fost dată de Robbins, 1948.

Observaţie. Restricţia conform căreia valorile proprii sînt distincte nu este esenţială deoarece aceasta s-a folosit numai în deducerea lui (27).

De exemplu, dacă

$$\beta_1 = \beta_2 = \ldots = \beta_r = \beta, \tag{29}$$

atunci primii r termeni ai membrului drept al relaţiei (27) sînt de forma

$$\sum_1^r \frac{B_j}{(1-2\ it\ \beta)^j} \tag{30}$$

şi B_j sînt constante ce nu depinde de t.

În cele ce urmează, plecînd de la funcţia caracteristică $\varphi_n(t; \lambda)$ vom determina diferite dezvoltări pentru $p_n(y; \lambda)$ şi $F_n(y; \lambda)$, în presupunerile

— $\mathbf{A}$ şi deci şi $Q(\mathbf{W})$ sînt pozitiv definite

— toţi ω sînt zero, însă valorile proprii ale matricei $\mathbf{\Sigma A}$ nu au multiplicitatea specificată.

Fără a micşora generalitatea vom presupune că rădăcinile $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ ale matricei $\mathbf{\Sigma A}$ sînt astfel încît

$$\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \ldots \geqslant \lambda_n > 0,$$

Scanned with OKEN Scanner

caz în care $Q(\mathbf{W}) < y$ reprezintă ecuaţia unui elipsoid.

Ţinînd seama de (15′), în presupunerile de faţă

$$\varphi_n(t,\ \lambda) = \prod_1^n (1-2\,it\,\lambda_j)^{-1/2}$$

Pentru $n > 2$, $\varphi_n(t,\ \lambda)$ este integrabilă, astfel încît pentru $n > 2$

$$p_n(y,\ \lambda) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-itv}\ \varphi_n(t,\ \lambda)\ dt \tag{31}$$

Pentru $n = 2$, aceasta poate fi interpretată ca valoarea principală, Cauchy, adică

$$p_2(y,\ \lambda) = \lim \frac{1}{2\pi}\int e^{itv}\ \varphi_2\ (t,\ \lambda)\ dt \tag{32}$$

$\varphi_n(t,\ \lambda)\, e^{-itv}$ este o funcţie analitică de t exceptînd punctele de ramificaţie $-i/2\lambda_j$, $j = 1, 2, \ldots, n$.

Grad şi Solomon (1955) au arătat că

$$p_n(y,\ \lambda) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-itv}\ \varphi_n(y,\ \lambda)\ dt = \frac{1}{2\pi}\int_C e^{-itv}\ \varphi_n(t,\ \lambda)\ dt \tag{33}$$

unde C este conturul arătat în figura 1 (pentru $n = 5$).

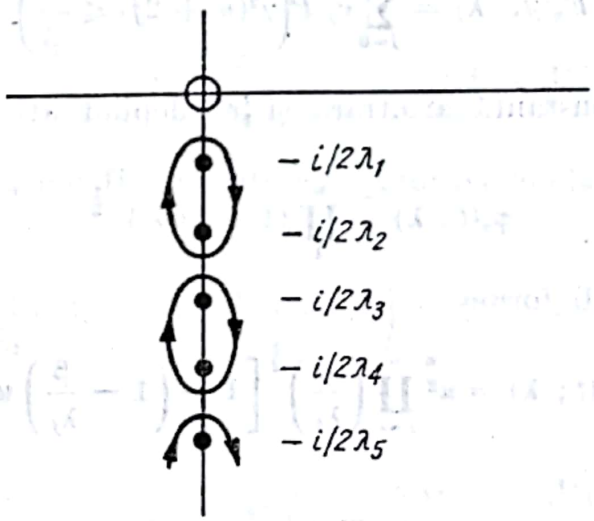


Fig. 1

Calculînd această ultimă integrală, obţinem

$$p_{2m}(y,\ \lambda) = \frac{1}{\pi}\sum_{j=1}^{m}(-1)^{j-1}\int_{-(2\lambda_{2j})^{-1}}^{-(2\lambda_{2j-1})^{-1}} e^{v\tau}\,|\varphi_{2m}(i\tau\,;\ \lambda)|\ d\tau\,; \tag{34}$$

$$p_{2m+1}(y,\ \lambda) = \frac{1}{\pi}\sum_{j=1}^{m}(-1)^{j-1}\int_{-(2\lambda_{2j})^{-1}}^{-(2\lambda_{2j-1})^{-1}} e^{v\tau}\,|\,\varphi_{2m+1}(i\tau,\ \lambda)|\,d\tau + \tag{35}$$

$$+\frac{(-1)^m}{\pi}\int_{-\infty}^{-(2\lambda_{2m+1})^{-1}} e^{v\tau}\,|\varphi_{2m+1}\ (i\tau,\ \lambda)|\,d\tau.$$

Scanned with OKEN Scanner

Punînd $\theta = -\tau$ obţinem

$$\varphi_n(-i\theta;\ \lambda) = M(e^{\theta Q(\mathbf{W})}) = G_n(\theta,\ \lambda), \tag{36}$$

care este funcţia generatoare de momente a formei $Q(\mathbf{W})$.
Făcînd această transformare în (34) şi (35) găsim

$$p_{2m}(y,\ \lambda) = \frac{1}{\pi}\sum_{j=1}^{m}(-1)^{j-1}\int_{(2\lambda_{2j-1})^{-1}}^{(2\lambda_{2j})^{-1}} e^{-y\theta}|G_{2m}(\theta;\ \lambda)|\,d\theta \tag{37}$$

$$p_{2m+1}(y,\ \lambda) = \frac{1}{\pi}\sum_{j=1}^{m}(-1)^{j-1}\int_{(2\lambda_{2j-1})^{-1}}^{(2\lambda_{2j})^{-1}} e^{-y\theta}|G_{2m+1}(\theta,\ \lambda)|\,d\theta + \tag{38}$$

$$+\frac{(-1)^m}{\pi}\int_{(2\lambda_{2m+1})^{-1}}^{\infty} e^{-y\theta}|G_{2m+1}(\theta,\ \lambda)|\,d\theta$$

4.2. Dezvoltări ca funcţii liniare de repartiţii χ^2

Dezvoltările vor fi de următoarea formă

$$F_n(y,\ \lambda) = \sum_{j=0}^{\infty} e_j\, P\left(\chi^2(n+2j) \leqslant \frac{y}{\beta}\right) \tag{39}$$

unde β este o constantă arbitrară şi e_j depind atît de β cît şi de $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$.

$$\varphi_n(t;\ \lambda) = \prod_{1}^{n}(1 - 2it\lambda_j)^{-\frac{1}{2}} \tag{15'}$$

se poate pune sub forma

$$\varphi_n(t;\ \lambda) = u^{\frac{n}{2}}\prod_{j=1}^{n}\left(\frac{\beta}{\lambda_j}\right)^{\frac{1}{2}}\left[1 - \left(1 - \frac{\beta}{\lambda_j}\right)u\right]^{-\frac{1}{2}} \tag{40}$$

unde $u = (i - 2it)^{-1}$.

Pentru $|u| < \min\left|1 - \frac{\beta}{\lambda_j}\right|^{-1}$ produsul din (40) poate fi dezvoltat în serie de puteri în u.

$$\prod_{j=1}^{n}\left(\frac{\beta}{\lambda_j}\right)^{\frac{1}{2}}\left[1 - \left(1 - \frac{\beta}{\lambda_j}\right)u\right]^{-\frac{1}{2}} = \sum_{j=0}^{\infty} e_j u^j \tag{41}$$

Deci

$$\varphi_n(t,\ \lambda) = \sum_{j=1}^{\infty} e_j(1 - 2it\beta)^{-\frac{1}{2}(n+2j)} \tag{42}$$

Scanned with OKEN Scanner

Astfel dacă reprezentarea cerută există, valorile lui e_j sînt determinate din (41).

TEOREMA 5. (*Ruben* (1963)) *Seria din* (39) *converge uniform pe orice interval finit al lui* y.

Pentru a determina pe e_j observăm că

$$\prod_{j=1}^{n}\left[1-\left(1-\frac{\beta}{\lambda_j}\right)u\right]^{-\frac{1}{2}} \tag{43}$$

este funcţia generatoare de momente cu argument u pentru

$$Q(\mathbf{W})=\frac{1}{2}\sum_{1}^{n}\left(1-\frac{\beta}{\lambda_j}\right)W_j^2.$$

Deci

$$e_r=\left(\frac{\beta^{\frac{n}{2}}}{\prod_{j=1}^{n}\lambda_j^{\frac{1}{2}}}\right)\frac{\mu_r'\left(Q;\,1-\frac{\beta}{\lambda_1},\,1-\frac{\beta}{\lambda_2},\ldots,1-\frac{\beta}{\lambda_n}\right)}{2^r\,r!} \tag{44}$$

unde

$$\mu_r'\left(Q,\,1-\frac{\beta}{\lambda_1},\quad 1-\frac{\beta}{\lambda_2},\ldots,1-\frac{\beta}{\lambda_n}\right)=M\{[Q(\mathbf{W})]^r\} \tag{44'}$$

Cantităţile μ_r' pot fi calculate cu ajutorul cumulanţilor corespunzători din (22)

$$\mathcal{K}_n\left(Q,\,1-\frac{\beta}{\lambda_1},\,1-\frac{\beta}{\lambda_2},\ldots,1-\frac{\beta}{\lambda_n}\right)=2^{r-1}(r-1)!\sum_{j=1}^{n}\left(1-\frac{\beta}{\lambda_j}\right)^r \tag{45}$$

Punînd

$$H_r=\sum_{1}^{n}\left(1-\frac{\beta}{\lambda_j}\right)^r \tag{46}$$

(45) devine

$$\mathcal{K}_r\left(Q,\,1-\frac{\beta}{\lambda_1},\,1-\frac{\beta}{\lambda_2},\ldots,1-\frac{\beta}{\lambda_n}\right)=2^{r-1}(r-1)!\,H_r. \tag{45'}$$

Folosind formula

$$\mu_r'=\sum_{j=0}^{r-1}C_{r-1}^{j}\mathcal{K}_{r-j}\mu_j'$$

Scanned with OKEN Scanner

obținem

$$e_0 = \prod_1^n \left(\frac{\beta}{\lambda_j}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{47}$$

$$e_r = \frac{1}{2r} \sum_{j=0}^{r-1} H_{r-j} e_j \quad (r \geqslant 1). \tag{48}$$

Observație. Valorile e_j se mai pot calcula, fără evaluarea explicită, a valorilor proprii $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, cu ajutorul cantităților

$$H_r = \mathrm{Ur}(I - \beta \mathbf{A}^{-1}\mathbf{\Sigma}^{-1})^r. \tag{46'}$$

Robbins (1948) se ocupă de (39) luînd $\beta = \sqrt[n]{\lambda_1, \ldots, \lambda_n}$.
Robbins și Pitman (1949) se ocupă de (39) luînd $\beta = \min_j \lambda_j$.

Dacă dorim ca $e_j = 0$, atunci H_1 trebuie să fie zero, și astfel β trebuie să fie egal cu media armonică a valorilor $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$

$$\beta = \frac{1}{\left(\sum_1^n \lambda_j\right) \Big/ n}.$$

Ruben (1963) a studiat problema determinării acelor valori ale lui β pentru care (39) este o mixtură.

TEOREMA 6. *Pentru* $\beta > \dfrac{1}{\left(\sum_1^n \lambda_i\right) \Big/ n}$, *(39) nu este o mixtură.*

Pentru $0 < \beta < \min_j \lambda_j$ *(39) este o mixtură.*

Observație. Chiar cînd (39) nu este o mixtură, este posibil să găsim o margine superioară a erorii făcute folosind un număr finit N de termeni din (39) pentru a aproxima $F_n(y\,;\,\lambda)$.

TEOREMA 7 (Ruben (1960)). *Dacă*

$$M = \max_j \left|1 - \frac{\beta}{\lambda_j}\right| < 1 \tag{49}$$

atunci

$$\left|\sum_{j=N}^{\infty} e_j P(\chi^2(n+2j) \leqslant \frac{y}{\beta}\right| \leqslant$$

$$\leqslant e_0 \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}+N\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \cdot \frac{M^N}{N!}(1-M)^{-\left(\frac{n}{2}+N\right)} P\left(\chi^2(n+2N) \leqslant (1-M)\frac{y}{\beta}\right). \tag{50}$$

Scanned with OKEN Scanner

Observații. i) Pentru $\beta \leqslant \lambda_n$ (astfel încît aceasta este sigur o mixtură) marginea este cea mai mică cînd $\beta = \lambda_n$.

ii) Pentru repartiții (care nu sînt mixturi) pentru care $\beta \geqslant \lambda_1$, cea mai mică margine se obține cînd $\beta = \lambda_1$.

iii) Totuși, $\beta = \dfrac{2\lambda_1\lambda_n}{\lambda_1 + \lambda_n}$ dă valori mult mai mici decît $\beta = \lambda_1$ sau $\beta = \lambda_n$.

4.3. Dezvoltarea în serie Laguerre

Dacă $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = \lambda$, atunci $Q(\mathbf{W}) = \lambda \sum_1^n W_j^2$ este repartizată ca $\lambda\chi^2(n)$.

Dacă rapoartele $\lambda_1 : \lambda_2 : \ldots : \lambda_n$ nu au valori depărtate de 1, este natural să se folosească dezvoltări pentru $p_n(y\,;\,\lambda)$ și $F(y\,;\,\lambda)$ cu primul termen corespunzînd unui multiplu de o repartiție χ^2.

Arătăm cum pot fi construite astfel de dezvoltări exprimînd raportul

$$p_n(y\,;\ \lambda_1,\ \lambda_2, \ldots, \lambda_n)/p_n(y\,;\ \beta,\ \beta, \ldots, \beta)$$

ca o serie de polinoame Laguerre asociate numitorului, unde β este o constantă care poate fi aleasă arbitrar.

Observație $p_n(y\,;\,\beta, \beta, \ldots, \beta) = \beta p_n\left(\dfrac{y}{\beta}, \mathbf{1}\right)$ unde $\mathbf{1} = (1,1,\ldots,1)$, iar $p_n(y, 1)$ este densitatea de repartiție corespunzătoare unei variabile aleatoare repartizate $\chi^2(n)$.

Condițiile pentru convergență pot fi obținute din formulele date de Gurland (1953); vom exprima coeficienții într-o formă diferită de cea a lui Gurland.

Dezvoltarea va fi în termeni de polinoame Laguerre generalizate asociate cu funcția de pondere.

$$y^\gamma e^{-y}$$

definite prin ecuația

$$L_r^{(\gamma)}(y) = \frac{1}{r!}\, y^{-\gamma} e^{y} \frac{\mathrm{d}^r}{\mathrm{d}y^r}\,(y^{r+\gamma} e^{-y}) = \tag{51}$$

$$= \sum_{j=1}^{r} \frac{(-y)^j}{j!\,(r-j)!} \cdot \frac{\Gamma(r+\gamma+1)}{\Gamma(j+\gamma+1)} \quad \text{pentru} \quad \gamma > -1.$$

Aceste polinoame satisfac condițiile de ortogonalitate

$$\int_0^\infty y^\gamma e^{-y} L_r^{(\gamma)}(y)\, L_{r'}^{(\gamma)}(y)\,\mathrm{d}y = \begin{cases} 0 & r \neq r' \\ \dfrac{\Gamma(r+\gamma+1)}{r!} & r = r' \end{cases} \tag{52}$$

Scanned with OKEN Scanner

$\varphi_n(t\,;\ \mu)$ se poate pune sub forma

$$(53)\quad \varphi_n(t\,;\ \lambda) = \prod_1^n (1-2\,it\,\lambda_j)^{-\frac{1}{2}} = (1-2it\,\beta)^{-\frac{n}{2}} \prod_{j=1}^n \left[1 - \frac{2it(\beta-\lambda_j)}{1-2it\beta}\right]^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} c_j (1-2\,it\beta)^{-\frac{1}{2}(n+2j)} (-2it)^j.$$

Coeficienţii c_j sînt obţinuţi din identitatea în s

$$(54)\qquad \prod_{j=1}^n [1-(\beta-\gamma_j)s]^{-\frac{1}{2}} \equiv \sum_{j=0}^n c_j s^j$$

Dezvoltarea (53) este adevărată şi seria este uniform convergentă pentru toţi t pentru care

$$(55)\qquad \left|\frac{2it(\beta-\lambda_j)}{1-2it\beta}\right| < 1$$

pentru toţi λ_j.

Aceasta este adevărată pentru toate numerele reale t dacă

$$(56)\qquad \beta > \frac{1}{2} \max_j \lambda_j = \frac{1}{2}\lambda_1.$$

În această situaţie, putem aplica formula de inversiune a lui Fourier la (53); găsim

$$(57)\qquad p_n(y:\lambda) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ity}\left[\sum_{j=0}^{\infty} c_j (1-2it\beta)^{-\frac{1}{2}(n+2j)} (-2it)^j\right] dt$$

şi cum (53) este absolut uniform convergentă

$$(57')\qquad p_n(y\,;\ \lambda) = \frac{1}{\beta} p_n\left(\frac{y}{\beta},\ 1\right) \sum_{j=0}^{\infty} \frac{c_j \beta^{-j} j!\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+j\right)} L_j^{\left(\frac{n}{2}-1\right)}\left(\frac{y}{2\beta}\right).$$

Punînd

$$b_j = c_j \beta^{-j} \frac{j!\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+j\right)},$$

Scanned with OKEN Scanner

(57′) se serie

$$p_n(y,\ \lambda) = \frac{1}{\beta}\, p_n\left(\frac{y}{\beta},\ 1\right) \sum_{j=0}^{\infty} b_j L_j^{\left(\frac{n}{2}-1\right)}\left(\frac{y}{2\beta}\right). \tag{57''}$$

Pentru a determina pe c_j, deci şi pe b_j, procedăm ca în 4.2. Formula analogă formulei (44) este

$$\prod_1^n [1-(\beta-\lambda_j)s]^{\frac{1}{2}} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\mu_j'(Q:\beta-\lambda_1,\ldots,\beta-\lambda_n)}{2^j\, j!}\, s^j \tag{58}$$

unde

$$\mu_j'(Q:\beta-\lambda_1,\ldots,\beta-\lambda_n) = M\left[\left\{\sum_{j=1}^{n}(\beta-\lambda_j)\, W_j^2\right\}^j\right].$$

Egalînd coeficienţii în (54) şi (58) obţinem

$$c_r = \frac{\mu_r'(Q,\ \beta-\lambda_1,\ldots,\beta-\lambda_n)}{2^r\, r!}, \qquad \beta > \frac{1}{2}\lambda_1. \tag{59}$$

Folosind relaţia dintre momentele faţă de zero şi cumulanţi ca în 4.2. obţinem formulele

$$c_0 = 1$$

$$c_r = \frac{1}{2r}\sum_{j=0}^{r-1} S_{r-j}c_j \quad r \geqslant 1 \tag{60}$$

unde

$$S_r = \sum_{j=1}^{n}(\beta-\lambda_j)^r \tag{61}$$

Observaţie. Deoarece

$$S_r = \mathrm{Ur}(\beta\mathbf{I} - \Sigma\mathbf{A})^r \tag{62}$$

cantităţile S_r pot fi evaluate fără calcularea valorilor proprii.

În cazul în care

$$\mathcal{H}_1(Q\,;\ \beta-\lambda_1,\ldots,\beta-\lambda_n) = \mu_1'(Q:\beta-\lambda_1,\ldots,\beta-\lambda_n) = 0$$

astfel încît $\mu_r' = \mu_r$ calculele se simplifică.

Pentru ca egalitatea anterioară să aibe loc facem

$$\sum_1^n(\beta-\lambda_j) = 0,$$

adică

$$\beta = \frac{1}{n}\sum_1^n \lambda_j. \tag{63}$$

Scanned with OKEN Scanner

Această simplificare este posibilă numai dacă

$$\frac{1}{n}\sum_{1}^{n}\lambda_j > \frac{1}{2}\lambda_1 \tag{64}$$

(63) este o alegere naturală pentru β.

Dacă toți λ sînt egali, atunci din (63)

$$\beta - \lambda_j = 0$$

pentru toți j și dezvoltarea în serie se reduce la un singur termen (un χ^2) care în acest caz corespunde la repartiția exactă.

Folosind relația

$$\frac{1}{2\beta}\int_0^v \left(\frac{x}{2\beta}\right)^{\frac{n}{2}-1} \exp\left(-\frac{x}{2\beta}\right) L_j^{\left(\frac{n}{2}-1\right)}\left(\frac{x}{2\beta}\right) dx = \tag{65}$$

$$= \frac{1}{j}\left(\frac{y}{2\beta}\right)^{\frac{n}{2}} \exp\left(-\frac{y}{2\beta}\right) L_{j-1}^{\left(\frac{n}{2}\right)}\left(\frac{y}{2\beta}\right), \quad j \geqslant 1,$$

Gurland (1953) obține pentru $F_n(y, \boldsymbol{\lambda})$ următoarea dezvoltare

$$F_n(y : \boldsymbol{\lambda}) = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\int_0^{v/\beta} x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}} dx + \tag{66}$$

$$+ \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(j-1)!\, C_j}{\beta^j \Gamma\left(\frac{n}{2}+j\right)} \left(\frac{y}{2\beta}\right)^{\frac{n}{2}} \exp\left(-\frac{y}{2\beta}\right) L_{j-1}^{\left(\frac{n}{2}\right)}\left(\frac{y}{2\beta}\right), \quad y > 0$$

și arată că (57′) și (66) sînt uniform convergente pentru toți $y \geqslant 0$ dacă $\lambda_1 \leqslant 3\lambda_n$.

4.4. Dezvoltarea în serie Mac Laurin

$F_n(y : \lambda)$ și $p_n(y : \boldsymbol{\lambda})$ pot fi dezvoltate (fiecare) în serie de puteri ale lui y.

Teorema 8. (Robbins, 1948). *Au loc dezvoltările*

$$p_n(y ; \boldsymbol{\lambda}) = \frac{1}{\left(\prod_1^n \lambda_j\right)^{1/2}} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j \mu_j'\left(Q, \frac{1}{\lambda_1}, \ldots, \frac{1}{\lambda_n}\right)}{j!\, 2^{j+1}\Gamma\left(\frac{n}{2}+j\right)} \left(\frac{y}{2}\right)^{\frac{n}{2}+j-1} \tag{67}$$

Scanned with OKEN Scanner

şi

$$F_n(y;\lambda)=\frac{1}{\left(\prod_1^n \lambda_j\right)^{1/2}}\left(\frac{y}{2}\right)^{\frac{n}{2}}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{A_j}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+j+1\right)}\left(-\frac{y}{2}\right)^j \tag{68}$$

unde

$$A_j=\mu_j'\left(Q,\frac{1}{\lambda_1},\ldots,\frac{1}{\lambda_n}\right)\Big/(2^j\,j!). \tag{69}$$

Demonstraţie. Dacă Re $\tau>\max_j\left|\frac{1}{2\lambda_j}\right|$, atunci

$$\int_0^{\infty}e^{-\tau y}p_n(y;\ \lambda)dy=\prod_1^n(1+2\tau\lambda_j)^{-\frac{1}{2}}= \tag{70}$$

$$=\prod_1^n(2\ \tau\lambda_j)^{-\frac{1}{2}}\prod_1^n(1+(2\tau\lambda_j)^{-1})^{-\frac{1}{2}}.$$

Ca şi în 4.2 şi 4.3, identificînd produsul de mai sus cu funcţia generatoare de momente, găsim

$$\int_0^{\infty}e^{-\tau y}p_n(y:\boldsymbol{\lambda})\,dy=\frac{1}{\left(\prod_1^n\lambda_j\right)^{1/2}}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^j\mu_j'\left(Q,\frac{1}{\lambda_1},\ldots,\frac{1}{\lambda_n}\right)}{j!\,2^{\frac{1}{2}(n+4j)}\,\tau^{\frac{1}{2}(n+2j)}}= \tag{71}$$

$$=\frac{1}{\left(\prod_1^n\lambda_j\right)^{1/2}}\sum_0^{\infty}\frac{(-1)^j\mu_j'\left(Q;\ \frac{1}{\lambda_1},\ldots,\frac{1}{\lambda_n}\right)}{j!\,2^{\frac{1}{2}(n+4j)}}\int_0^{\infty}\frac{e^{-\tau y}y^{\frac{1}{2}(n+2j)-1}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+j\right)}dy=$$

$$=\int_0^{\infty}e^{-\tau y}\left[\frac{1}{\left(\prod_1^n\lambda_j\right)^{1/2}}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^j\mu_j'\left(Q,\frac{1}{\lambda_1},\ldots,\frac{1}{\lambda_n}\right)}{j!\,2^{\frac{1}{2}n+2j}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}+j\right)}y^{\frac{n}{2}+j-1}\right]dy.$$

Din teorema de unicitate pentru transformări Laplace rezultă (67) şi cum seria din (67) converge uniform în orice interval mărginit pentru y, obţinem (68).

Observaţie. Pachares (1955) obţine (68) prin calcul direct.

Pentru coeficienţii A_j au loc următoarele relaţii de recurenţă.

$$A_0=1$$

$$A_r=\frac{1}{2r}\sum_{j=0}^{r-1}\Sigma_{r-j}A_j,\qquad r\geqslant 1 \tag{72}$$

Scanned with OKEN Scanner

unde

$$\Sigma_r = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{\lambda_j^r} = \mathrm{Ur}(\Sigma\mathbf{A})^{-r}.$$

PROPOZIȚIA 3. (74) $A_r \leqslant \dfrac{\Gamma\left(\dfrac{n}{2}+r\right)}{r!\,\Gamma\left(\dfrac{n}{2}\right)\lambda_n^r}.$

Demonstrație. Deoarece

(75) $$\lambda_n = \min_j \lambda_j$$

urmează că

(76) $$\sum_1^n \frac{1}{\lambda_n} \cdot W_j^2 \leqslant \frac{1}{\lambda_n} \sum_1^n W_j^2$$

astfel că

(77) $$\mu_r'\left(Q; \frac{1}{\lambda_1}, \ldots, \frac{1}{\lambda_n}\right) \leqslant \frac{1}{\lambda_n^r}\,\mu_r'(Q:1,\ldots,1) = \left(\frac{2}{\lambda_n}\right)^r \frac{\Gamma\left(\dfrac{n}{2}+r\right)}{\Gamma\left(\dfrac{n}{2}\right)},$$

ceea ce demonstrează (74).

PROPOZIȚIA 4. *Are loc inegalitatea*

(78) $$p_n(y:\lambda) \leqslant \frac{1}{2\Gamma\left(\dfrac{n}{2}\right)} \cdot \frac{1}{\left(\prod_1^n \lambda_j\right)^{1/2}} \cdot \left(\frac{y}{2}\right)^{\frac{n}{2}-1} \cdot \exp\left(\frac{y}{2\lambda_n}\right).$$

Rezultă din propoziția 3.

4.5. Probabilitatea conținută de o elipsă

$F_2(y; \lambda_1, \lambda_2)$ reprezintă probabilitatea ca punctul (W_1, W_2) să cadă în interiorul elipsei

(79) $$\lambda_1 W_1^2 + \lambda_2 W_2^2 = y,$$

în cazul în care W_1, W_2 sînt variabile aleatoare independente repartizate $N(0,1)$.

TEOREMA 9. (Ruben, 1963; Grubbs, 1964)

(80) $$F_2(y:\lambda_1,\lambda_2) = P\left[\chi^2(2, r^2) < R^2\right] - P\left(\chi^2(2, R^2) \leqslant r^2\right]$$

unde (*cu presupunerea* $\lambda_1 \geqslant \lambda_2$)

(81) $$R = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{y}{\lambda_1}\right)^{1/2} + \left(\frac{y}{\lambda_2}\right)^{1/2}\right], \quad r = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{y}{\lambda_2}\right)^{1/2} - \left(\frac{y}{\lambda_1}\right)^{1/2}\right]$$

Scanned with OKEN Scanner

Demonstrație. Elipsa (79) are semiaxele $\left(\frac{y}{\lambda_2}\right)^{1/2} = R+r$ și $\left(\frac{y}{\lambda_1}\right)^{1/2} = R-r$. (80) arată că probabilitățile de cădere în interiorul elipsei E și în domeniul D definit de cercul de rază R din care am scăzut cercul de rază r sînt egale.

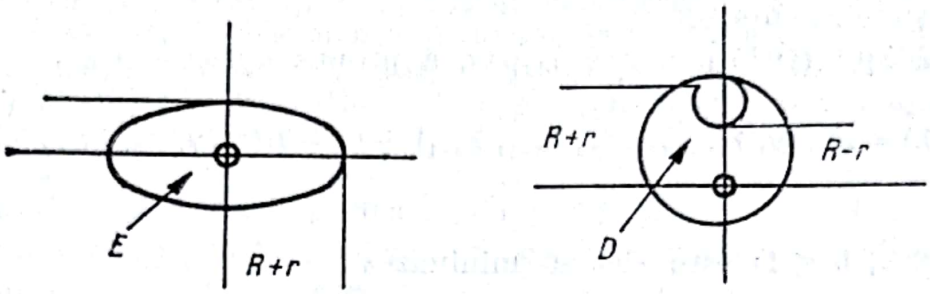


Fig. 2

Lungimea arcului cercului cu centrul în origine și de rază ρ care cade în E este egal cu lungimea care cade în A. Astfel, dacă $\rho < R-r$, lungimea este $2\pi\rho$ și dacă $R + r < \rho$, lungimea este zero. Deci

$$\frac{1}{2\pi}\iint_E \exp\left[-\frac{1}{2}(W_1^2 + W_2^2)\right] dW_1 dW_2 =$$

(82)

$$= \frac{1}{2\pi}\iint_D \exp\left[-\frac{1}{2}(W_1^2+W_2^2)\right] dW_1\, dW_2.$$

4.6. Aproximații

Dacă valorile proprii sînt mărginite, atunci, ținînd seama de teorema limită centrală, $F_n(y\,;\,\lambda)$ standardizată pentru $n\to\infty$ are o repartiție normală.

O aproximație mai bună este $Q(\mathbf{W})$ repartizat aproximativ ca $\beta\chi^2(\nu)$ cu β și n aleși astfel încît primele sale două momente să fie în concordanță cu acelea ale funcției $F_n(y\,:\boldsymbol{\lambda})$.

O altă aproximație se bazează pe faptul că atunci cînd

$$\lambda_1 = \lambda_2 \geqslant \lambda_3 = \lambda_4 \geqslant \ldots \geqslant \lambda_{n-1} = \lambda_n \quad (n \text{ par})$$

$F(y\,;\,\lambda)$ poate fi exprimat ca o sumă finită de funcții elementare.

În general (pentru n par)

$$\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \ldots \geqslant \lambda_n$$

și

$$\sum_{j=1}^{n/2} \lambda_{2j-1}(W_{2j-1}^2 + W_{2j}^2) \geqslant \sum_{j=1}^{n} \lambda_j W_j^2 \geqslant \sum_{j=1}^{n/2} \lambda_{2j}(W_{2j-1}^2 + W_{2j}^2). \tag{83}$$

Urmează că

$$F_n(y\,;\,\lambda_1,\,\lambda_1,\,\lambda_3,\,\lambda_3,\,\ldots,\,\lambda_{n-1},\,\lambda_{n-1}) \leqslant F_n(y\,;\,\lambda) \leqslant$$

(84)

$$\leqslant F_n(y,\,\lambda_2,\,\lambda_2,\,\lambda_4,\,\lambda_4,\,\ldots,\,\lambda_n,\,\lambda_n).$$

Soest (1968) evaluează termenii extremi din (84) prin sume finite de funcţii elementare.

Siddiqui (1965), pentru n par, a propus aproximaţia

$$\tilde{F}_n(y:\boldsymbol{\lambda}) = \theta F_n(y,\,\lambda_1,\,\lambda_1,\,\ldots,\,\lambda_{n-1},\,\lambda_{n-1}) + (1-\theta)F_n(y,\,\lambda_2,\,\lambda_2,\ldots,\lambda_n,\,\lambda_n) \tag{85}$$

unde $\theta(0 \leqslant \theta \leqslant 1)$ este ales să minimizeze

$$\int_0^\infty |\tilde{F}_n(y\,;\,\boldsymbol{\lambda}) - F_n(y\,;\,\lambda)|^2\,dy. \tag{86}$$

Okamoto (1960) a arătat că

$$F_n(y\,;\,\lambda) \leqslant F_n\left(\frac{y}{G(\lambda)}\,;\,1\right) \tag{87}$$

unde $G(\lambda) = \left(\prod_1^n \lambda_j\right)^{1/n}$.

Siotani (1964) arată că această margine superioară dă o aproximaţie bună, pentru valori ale funcţiei $F_n(y\,;\,\lambda) \leqslant 0{,}5$ şi cînd valorile proprii nu diferă mult unele de altele.

4.7. Repartiţia limită

Fie $Z_1,\,Z_2,\ldots,Z_n$ variabile aleatoare independente repartizate $N(0,1)$ şi

$$Q_{(n)}(\mathbf{Z}) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} Z_i Z_j.$$

TEOREMA 10 (Varberg (1966)). *Dacă*

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}^2$$

este finită, atunci

$$P\left[\lim_{n\to\infty} Q_{(n)}(\mathbf{Z}) \geqslant z\right] =$$

(88)

$$= \frac{\prod_{r=2}^\infty \left(1 - \frac{\sigma_r}{\sigma_1}\right)^{-\frac{n_r}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n_1}{2}\right)} \left(\frac{z}{2\sigma_1}\right)^{\frac{n_1}{2}-1} \left[\exp\left(-\frac{z}{2\sigma_1}\right)\right][1+\varepsilon(z)],$$

Scanned with OKEN Scanner

unde

$$-\lim_{z\to\infty}\varepsilon(z)=0$$

— $\sigma_1, \sigma_2, \ldots$ sînt valorile proprii distincte ale unei anumite matrici infinite (o matrice cu a_{ij} în linia i și coloana j)

— $n_1, n_2 \ldots$ ordinele de multiplicitate ale valorilor proprii.

În cazul în care $Z_1, Z_2, \ldots, Z_n$ nu sînt necesar variabile repartizate $N(0,1)$, însă sînt independente și de medie zero are loc

TEOREMA 11 (Whittle, 1964). *Următoarea mulțime de condiții*

i) $M|Z_j|^{4+2\delta}$ *este finită și* $M|Z_j|^{4+2\delta}/[D^2(Z_j)]^{2+\delta}$ *este uniform mărginit pentru* δ, $0<\delta<1$.

ii) $\beta_2(Z_j)\geqslant 1+d$ *pentru* $d>0$ *și toți* j.

iii) *Întregii* $j=1,2,\ldots,n$ *pot fi grupați într-un număr finit de mulțimi* $g_1, g_2, \ldots, g_r$ *astfel încît*

$$\text{a)}\quad \lim_{n\to\infty}\frac{\|\mathbf{A}\|^2-\sum_1^r\|\mathbf{A}_j\|^2}{\|\mathbf{A}\|^2}=0,\qquad \lim_{n\to\infty}\frac{\sum_1^r\|A_j\|^2}{\|\mathbf{A}\|^2}=1$$

și

$$\lim_{r\to\infty}\sum_{j=1}^{r}\left[\frac{\|\mathbf{A}_j\|}{\|\mathbf{A}\|}\right]^{2+\delta}=0$$

unde $\|\mathbf{A}_j\|$, $\|\mathbf{A}\|=(\sum\sum a_{il}^2\,D^2(Z_i)\,D^2(Z_l))^{1/2}$, sumările făcîndu-se după i și l în g_j și respectiv după toți i și l,
este suficientă pentru ca repartiția limită a lui $Q_{(n)}(\mathbf{Z})$ să fie normală.

§5. Forme pozitiv definite în cazul necentrat

5.1. Dezvoltări ca funcții liniare de repartiții χ^2

TEOREMA 12 (Ruben (1962)). $F_n(y;\lambda:\omega)$ *admite următoarea dezvoltare*

$$F_n(y;\lambda;\omega)=\sum_{j=0}^{\infty}e_j'\,P\left[\chi^2(n+2j)<\frac{y}{\beta}\right] \tag{89}$$

unde

$$\begin{cases} e_0'=\left[\exp\left(-\frac{1}{2}\sum_1^n\omega_j^2\right)\right]\prod_{j=1}^{n}\left(\frac{\beta}{\lambda_j}\right)^{1/2} \\ e_r'=\left[\frac{1}{2r}\sum_{j=0}^{r-1}G_{r-j}e_j' \quad (r\geqslant 1)\right. \end{cases} \tag{90}$$

și

$$G_r=\sum_{j=1}^{n}\left(1-\frac{\beta}{\lambda_j}\right)^r+r\beta\sum_{j=1}^{n}\frac{\omega_j^2}{\lambda_j}\left(1-\frac{\beta}{\lambda_j}\right)^{r-1}. \tag{91}$$

Scanned with OKEN Scanner

Seria (89) este uniform convergentă în orice interval finit al valorilor lui y.

Demonstrație. (15) se mai poate pune sub forma

$$\varphi_n(t;\boldsymbol{\lambda};\boldsymbol{\omega}) = \exp\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{it\lambda_j\omega_j^2}{1-2it\lambda_j}\right)\sum_{j=1}^{n}(1-2it\lambda_j)^{-\frac{1}{2}}. \tag{92}$$

Dezvoltăm (92) în serie de puteri ale lui $(1-2it\beta)^{-1}$. Dacă în (92) facem $\theta = (1-2it\beta)^{-1}$, obținem

$$\varphi_n\left(\frac{\theta-1}{2i\beta\theta};\boldsymbol{\lambda};\boldsymbol{\omega}\right) = \exp\left[-\frac{1-\theta}{2}\sum_{j=1}^{n}\frac{\omega_j^2}{1-\theta\left(1-\frac{\beta}{\lambda_j}\right)}\right]\times$$

$$\times\prod_{j=1}^{n}\left(\frac{\beta\theta}{\lambda_j}\right)^{1/2}\left\{1-\left(1-\frac{\beta}{\lambda_j}\right)\theta\right\}^{-1/2} = \theta^{\frac{n}{2}}\sum_{j=0}^{\infty}e_j'\theta^j, \tag{93}$$

cu condiția ca membrul drept să poată fi dezvoltat ca serie de puteri în θ. Deoarece

$$|\theta| < \min_j\left|1-\frac{\beta}{\lambda_j}\right|^{-1} \tag{94}$$

pentru toți t reali, membrul drept poate fi dezvoltat.

Inversînd (93) obținem (89).

(93) se mai scrie

$$\ln\varphi_n\left(\frac{\theta-1}{2i\beta\theta};\lambda:\omega\right) = -\frac{1-\theta}{2}\sum_{j=1}^{n}\frac{\omega_j^2}{1-\left(1-\frac{\beta}{\lambda_j}\right)\theta} +$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\ln\frac{\beta}{\lambda_j} - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\ln\left[1-\left(1-\frac{\beta}{\lambda_j}\right)\theta\right] = \sum_{j=0}^{\infty}G_j\theta^j, \tag{95}$$

expresie din care obținem (90).

TEOREMA 13 (Ruben (1962)). *Dacă seria* (89) *este trunchiată la termenul N, atunci*

$$\left|\sum_{j=N}^{\infty}e_j'P(\chi^2(n+2j)\leqslant\frac{y}{\beta}\right|\leqslant$$

$$\leqslant e_0'\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}+N\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\cdot\frac{M^N}{N!}(1-M)^{-\frac{1}{2}(n+2N)}P\left[\left[\chi^2(n+2N)\leqslant(1-M)\frac{y}{\beta}\right]\right. \tag{96}$$

Scanned with OKEN Scanner

unde

$$M = \frac{1}{2}\beta \sum_{j=1}^{n} \frac{\omega_j^2}{\lambda_j} + \max_j \left| 1 - \frac{\beta}{\lambda_j} \right|, \text{ cu condiția } M < 1. \tag{97}$$

5.2. Dezvoltări ca funcții liniare de repartiții χ^2 necentrate

Punem $\varphi_n(t;\ \boldsymbol{\lambda} : \boldsymbol{\omega})$ sub forma

$$\varphi_n(t;\boldsymbol{\lambda};\boldsymbol{\omega}) = \exp\left(\frac{it\beta \sum_1^n \omega_j^2}{1-2it\beta} \right) \times$$

$$\times \exp\left[\frac{it}{1-2it\beta} \sum_{j=1}^{n} \frac{\omega_j^2(\lambda_j - \beta)}{1-2it\lambda_j} \right] \prod_{j=1}^{n} (1-2it\lambda_j)^{-\frac{1}{2}} = \tag{98}$$

$$= \exp\left(\frac{it\beta \sum_1^n \omega_j^2}{1-2it\beta} \right) \sum_{j=0}^{\infty} e_j''(1-2it\beta)^{-\frac{1}{2}(n+2j)}$$

unde e_j'' sînt definite prin identitatea.

$$\theta^{\frac{n}{2}} \sum_{j=0}^{\infty} e_j'' \theta^j \equiv \exp\left[-\frac{\theta(1-\theta)}{2} \sum_{j=1}^{n} \frac{\omega_j^2\left(1-\frac{\beta}{\lambda_j}\right)}{1-\left(1-\frac{\beta}{\lambda_j}\right)\theta} \right] \times$$

$$\times \prod_{j=1}^{n} \left(\frac{\beta\theta}{\lambda_j}\right)^{\frac{1}{2}} \left[1-\theta\left(1-\frac{\beta}{\lambda_j}\right) \right]^{-\frac{1}{2}}. \tag{99}$$

Punînd

$$h_1 = \sum_{j=1}^{n} (1-\omega_j^2)\left(1-\frac{\beta}{\lambda_j}\right) \tag{100}$$

$$h_r = G_r \ (r \geqslant 2) \tag{101}$$

obținem

$$e_0'' = \prod_{j=1}^{n} \left(\frac{\beta}{\lambda_j}\right)^{1/2}$$

$$e_r'' = \frac{1}{2r} \sum_{j=0}^{r-1} h_{r-j} e_j'' \quad (r \geqslant 1) \tag{102}$$

Inversînd (98) obținem

$$F_n(y;\boldsymbol{\lambda};\boldsymbol{\omega}) = \sum_{j=0}^{\infty} e_j'' P\left[\chi^2\left(n+2j, \sum_{j=1}^{n} \omega_j^2\right) \leqslant \frac{y}{\beta} \right] \tag{103}$$

Scanned with OKEN Scanner

Ruben (1962) dă formulele (102) şi (103) şi arată că seria (103) este uniform convergentă pe orice interval finit de valori ale lui y.

TEOREMA 14. (Ruben (1962)). *Dacă seria* (103) *este trunchiată la termenul* N, *atunci*

$$\left| \sum_{j=N}^{\infty} e_j'' P\left[\chi^2(n+2j, \sum_{j=1}^{n} \omega_j^2) \leqslant \frac{y}{\beta} \right] \right| \leqslant$$

(104)

$$\leqslant e_0'' \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}+N\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \frac{M'^N}{N!} (1-M')^{-\frac{1}{2}(n+2N)} \times$$

$$\times P\left[\chi^2(n+2N, \sum_{j=1}^{n} \omega_j^2) \leqslant (1-M') \frac{y}{\beta} \right],$$

unde $M' = M + \frac{1}{2} \sum_{1}^{n} \omega_j^2$, *cu condiţia ca* $M' < 1$ *şi* M *este definit în* (97).

5.3. Dezvoltare în serie Laguerre

Dacă în (92) punem $\theta' = -2it\beta\,(1-2it\beta)^{-1}$, obţinem

$$\varphi_n(t;\lambda;\omega) = (1-2it\beta)^{-\frac{n}{2}} \sum_{j=0}^{\infty} c_j' \beta^{-j} \theta'^j \tag{105}$$

$\left(\text{cu condiţia } |\theta'| < \min \left|1-\frac{\lambda_j}{\beta}\right|^{-1}\right)$, unde

$$\sum_{j=0}^{\infty} c_j' \beta^{-1} \theta'^j \equiv$$

$$\equiv \exp\left[-\frac{\theta'}{2\beta} \sum_{j=1}^{n} \frac{\lambda_j \omega_j^2}{1-\left(1-\frac{\lambda_j}{\beta}\right)\theta'} \right] \prod_{j=1}^{n} \left\{ 1-\left(1-\frac{\lambda_j}{\beta}\right)\theta' \right\}^{-\frac{1}{2}}$$

c_j' pot fi calculaţi cu ajutorul formulelor

$$c_0' = 1$$

(106)

$$c_r' = \frac{1}{2r} \sum_{j=0}^{r-1} S_{r-j}' c_j' \qquad (r \geqslant 1)$$

unde

$$S_r' = -\frac{r}{\beta} \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \omega_j^2 \left(1-\frac{\lambda_j}{\beta}\right)^{r-1} + \sum_{j=1}^{n} \left(1-\frac{\lambda_j}{\beta}\right)^r. \tag{107}$$

Scanned with OKEN Scanner

Inversînd (105) obținem

$$(108)\quad p_n(y:\lambda,\omega)=\frac{1}{\beta}\,p_n\left(\frac{y}{\beta};1\right)\sum_{j=0}^{\infty}c_j'\beta^{-1}\frac{j!\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+j\right)}L_j^{\left(\frac{1}{2}n-1\right)}\left(\frac{y}{2\beta}\right),\ (y\geqslant 0).$$

Integrînd (108) obținem

$$(109)\quad \begin{aligned}F_n(y:\lambda;\omega)&=P\left[\chi^2(n)\leqslant\frac{y}{\beta}\right]+\\&+\left(\frac{y}{2\beta}\right)^{\frac{n}{2}}e^{-\frac{y}{2\beta}}\sum_{j=1}^{\infty}c_j'\frac{(j-1)!}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+j\right)}L_{j-1}^{\left(\frac{n}{2}\right)}\left(\frac{y}{2\beta}\right).\end{aligned}$$

Aceste serii sînt uniform convergente pentru toți $y\geqslant 0$, cu condiția $\beta>\frac{1}{2}\lambda_1$.

Teorema 15. (Kotz, Johnson, Boyd (1967)). *Dacă seria din (109) este trunchiată la termenul N, atunci*

$$(110)\quad \begin{aligned}&\left|\sum_{j=N+1}^{\infty}c_j'\frac{(j-1)!}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+j\right)}L_{j-1}^{\left(\frac{n}{2}\right)}\left(\frac{y}{2\beta}\right)\right|\leqslant\\&\leqslant R^{N+2}(1-R)^{-(n+1)}\exp\left[\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\omega_j^2/R^3\right]e^{\frac{y}{2\beta}}\end{aligned}$$

pentru orice R, $0<R<1$.

5.4. Dezvoltare în serie Mac Laurin

Ca și în cazul centrat, găsim

$$(111)\quad \int_0^{\infty}e^{-\tau y}\,p_n(y;\lambda:\omega)\,dy=\tau^{-\frac{n}{2}}\sum_{j=0}^{\infty}A_j'(-\tau)^j\quad\left(\mathrm{Re}\ \tau>\frac{1}{2\lambda_n}\right)$$

A_j' sînt determinate de ecuațiile

$$(112)\quad \begin{cases}A_0'=\prod_{j=1}^{n}\frac{1}{(2\lambda_j)^{1/2}}\exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\omega_j^2\right)\\ A_r'=\sum_{j=0}^{r-1}V_{r-j}'\,A_j'\ (r\geqslant 1),\end{cases}$$

Scanned with OKEN Scanner

unde

$$V_r' = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{(2\lambda_j)^r} \quad (1 - r\omega_j^2)$$

Luînd

$$\mathrm{Re}\,\tau \geqslant \frac{1}{2\lambda_n}\left(n + \sum_{1}^{n} \omega_j^2\right),$$

găsim

$$p_n(y\,;\,\lambda\,;\,\omega) = y^{\frac{n}{2}-1} \sum_{j=0}^{\infty} A_j' \frac{(-y)^j}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+j\right)}. \tag{113}$$

Seria este uniform absolut convergentă pe orice interval finit de valori pentru y.

Integrînd termen cu termen, obţinem

$$F_n(y\,;\,\lambda : \omega) = y^{\frac{n}{2}} \sum_{j=0}^{\infty} A_j' \frac{(-y)^j}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+j+1\right)} \tag{114}$$

Observaţii. i) Exceptînd valorile foarte mici ale lui y, seria (89) este de preferat faţă de seria (114).

ii) Kotz, Johnson, Boyd (1967) obţin margini superioare pentru eroarea rezultată din truncherea seriei (114) la primii N termeni.

§6. Forme pătratice indefinite

În cazul centrat, Gurland (1955), obţine o dezvoltare în termeni de polinoame Laguerre; metoda folosită de Gurland este extinsă în cazul necentrat de Shah (1963). Deoarece funcţia de pondere pentru polinoamele Laguerre se anulează pentru valori negative ale argumentului, în timp ce în general

$$p_n(y\,;\,\lambda,\,\omega) > 0,\; F_n(y\,;\,\lambda,\,\omega) > 0$$

pentru toate valorile lui y pozitive sau negative, aceste dezvoltări nu au aplicaţii nici teoretice, nici practice (Gurland (1955)).

Presupunem că primele m valori proprii sînt pozitive şi cele rămase negative astfel încît

$$Q(\mathbf{W}) = Q_1(\mathbf{W}) - Q_2(\mathbf{W}), \tag{115}$$

unde

$$Q_1(\mathbf{W}) = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j (W_j - \omega_j)^2 \tag{116}$$

$$Q_2(\mathbf{W}) = \sum_{j=m+1}^{n} (-\lambda_j)\,(W_j - \omega_j)^2, \tag{117}$$

Scanned with OKEN Scanner

Q_1 și Q_2 sînt forme pătratice pozitiv definite independente și fiecare din ele poate fi studiată separat prin modelele din 4 și 5.

Metoda lui Grad și Solomon (1955) poate fi extinsă la formele patratice indefinite.

Funcția caracteristică pentru $Q(W)$ cu $\omega = 0$ este

$$\varphi_n(t;\boldsymbol{\lambda}) = \prod_{j=1}^{m} (1 - \mathrm{i}\,\lambda_j t)^{-\frac{1}{2}} \prod_{j=m+1}^{n} [1 + \mathrm{i}(-\lambda_j)t]^{-\frac{1}{2}}. \tag{118}$$

Teorema lui Jordan, conduce la

$$p_n(y:\boldsymbol{\lambda}) = \lim_{R\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-R}^{R} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}tv}\, \varphi_n(t:\boldsymbol{\lambda})\, \mathrm{d}t, \tag{119}$$

sau făcind calculul

$$p_n(y:\boldsymbol{\lambda}) = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi} \Sigma\, (-1)^{j-1} \displaystyle\int_{(2\lambda_{2j})^{-1}}^{(2\lambda_{2j})^{-1}} \mathrm{e}^{-v\theta} |\varphi_n(-\mathrm{i}\theta;\boldsymbol{\lambda})|\,\mathrm{d}\theta \quad \text{pentru } y>0 \\ \dfrac{1}{\pi} \Sigma\, (-1)^{j-1} \displaystyle\int_{(-2\lambda_{n-2j})^{-1}}^{(-2\lambda_{n-2j-1})^{-1}} \mathrm{e}^{v\theta} |\varphi_n(\mathrm{i}\theta;\boldsymbol{\lambda})|\,\mathrm{d}\theta \quad \text{pentru } y<0 \end{cases} \tag{120}$$

Pentru $y>0$ sumarea se face după $2 \leqslant 2j \leqslant m$

$y<0$ sumarea se face după $0 \leqslant 2j \leqslant (n-m-2)$.

Integrînd (120) se obține

$$F_n(y:\boldsymbol{\lambda}) = \begin{cases} 1 - \dfrac{1}{\pi} \Sigma\, (-1)^{j-1} \displaystyle\int_{(2\lambda_{2j-1})^{-1}}^{(2\lambda_{2j})^{-1}} \frac{1}{\theta} \mathrm{e}^{-v\theta} |\varphi_n(-\mathrm{i}\theta;\boldsymbol{\lambda})|\,\mathrm{d}\theta,\ y>0 \\ \dfrac{1}{\pi} \Sigma\, (-1)^{j-1} \displaystyle\int_{(-2\lambda_{n-2j})^{-1}}^{(-2\lambda_{n-2j-1})^{-1}} \frac{1}{\theta} \mathrm{e}^{v\theta} |\varphi_n(\mathrm{i}\theta;\boldsymbol{\lambda})|\,\mathrm{d}\theta,\ y<0 \end{cases} \tag{121}$$

§7. Independența a două forme pătratice

Teorema 16 (Cochran (1934)). *Condiția necesară și suficientă pentru ca formele pătratice* $\mathbf{X}'\mathbf{AX}$ *și* $\mathbf{X}'\mathbf{BX}$ *să fie independente este ca*

$$|\mathbf{I} - 2\mathrm{i}t_1\mathbf{A}|\,|\mathbf{I} - 2\mathrm{i}t_2\mathbf{B}| = |\mathbf{I} - 2\mathrm{i}t_1\mathbf{A} - 2\mathrm{i}t_2\mathbf{B}|, \tag{122}$$

unde t_1 *și* t_2 *sînt argumentele funcțiilor caracteristice* $\varphi(t_1)$, $\varphi(t_2)$ *ale formelor* $\mathbf{X}'\mathbf{AX}$, $\mathbf{X}'\mathbf{BX}$, $\mathbf{I}$ *fiind matricea unitate.*

Demonstrație. Funcția caracteristică a formei pătratice $\mathbf{X}'\mathbf{AX}$ este

$$\varphi(t_1) = M(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t_1\mathbf{X}'\mathbf{AX}}) = \int \mathrm{e}^{\mathrm{i}t_1\mathbf{X}'\mathbf{AX}}\, \mathrm{d}F(\mathbf{X})$$

Scanned with OKEN Scanner

unde

$$dF(\mathbf{X}) = e^{-\frac{1}{2}\mathbf{X}'\mathbf{I}\mathbf{X}} \frac{d\mathbf{X}}{(2\pi)^{p/2}}.$$

Deci

$$\varphi(t_1) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{p}{2}}} \int e^{-\frac{1}{2}\mathbf{X}'(1-2it_1\mathbf{A})\mathbf{X}} d\mathbf{X} = |\mathbf{I} - 2it_1\mathbf{A}|^{-\frac{1}{2}}$$

deoarece $\varphi(t_1)$ reprezintă funcţia caracteristică a unei repartiţii normale n dimensionale de matrice de covariante $\mathbf{\Sigma} = (\mathbf{I}-2it_1\mathbf{A})^{-1}$.

Analog, obţinem

$$\varphi(t_1\, t_2) = M(e^{it_1\mathbf{X}'\mathbf{A}\mathbf{X} + it_2\mathbf{X}'\mathbf{B}\mathbf{X}}) = |\mathbf{I} - 2it_1\mathbf{A} - 2it_2\mathbf{B}|^{-\frac{1}{2}}.$$

Condiţia lui Cochran este evidentă, deoarece avem independenţă dacă $\varphi(t_1, t_2) = \varphi(t_1)\,\varphi(t_2)$, aceasta fiind de altfel necesară şi suficientă. Condiţia

$$|\lambda\mathbf{I} - 2it_1\mathbf{A}|\ |\lambda\mathbf{I} - 2it_2\mathbf{B}| = \lambda^p|\lambda\mathbf{I} - 2it_1\mathbf{A} - 2it_2\mathbf{B}|,$$

este de altfel echivalentă cu condiţia lui Cochran.

O formă alternativă pentru (112) este

$$\text{Ur}(t_1\mathbf{A})^s + \text{Ur}(t_2\mathbf{B})^s = \text{Ur}(t_1\mathbf{A} + t_2\mathbf{B})^s \tag{122'}$$

pentru $s=1, 2, \ldots$, şi toţi t_1 şi t_2 reali (Lancaster, 1954).

TEOREMA 17. (Matérn (1949)). *Dacă* $\mathbf{A}$ *şi* $\mathbf{B}$ *sînt semipozitiv definite, atunci* $\mathbf{X}'\mathbf{A}\mathbf{X}$ *şi* $\mathbf{X}'\mathbf{B}\mathbf{X}$ *sînt independente dacă sînt necorelate.*

TEOREMA 18. (Craig (1943)). *Condiţia necesară şi suficientă pentru ca formele pătratice* $\mathbf{X}'\mathbf{A}\mathbf{X}$ şi $\mathbf{X}'\mathbf{B}\mathbf{X}$ *să fie independente este că* $\mathbf{A}\mathbf{B}=0$.

Demonstraţie. A doua funcţie caracteristică a vectorului ($\mathbf{X}'\mathbf{A}\mathbf{X}$, $\mathbf{X}'\mathbf{B}\mathbf{X}$) se scrie

$$\psi(t_1, t_2) = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{2^{s-1}}{s} \text{Ur}(it_1\mathbf{A} + it_2\mathbf{B})^s$$

O condiţie necesară şi suficientă pentru independenţă este ca cumulanţii $\mathfrak{K}_{ij}$ să fie nuli, deci ca coeficientul lui $(it_1)^i\,(it_2)^j$ din dezoltarea lui $\psi(t_1, t_2)$ să fie nul, oricare ar fi i şi $j \geqslant 1$.

Aceasta implică

$$\text{Ur}(\mathbf{A}^i\,\mathbf{B}^j\,\mathbf{A}^k\,\mathbf{B}^l \ldots) = 0, \text{ oricare ar fi } i, l, k, l, \ldots \geqslant 1.$$

Punînd

$$i=j=2 \text{ şi } k=l=\ldots=0, \text{ obţinem}$$

$$\text{Ur}(\mathbf{A}^2\mathbf{B}^2) = \text{Ur}((\mathbf{A}\mathbf{B})'\,(\mathbf{A}\mathbf{B})) = 0$$

Scanned with OKEN Scanner

deoarece **A** şi **B** sînt simetrice şi

$$\mathrm{Ur}\,(\mathbf{M}\cdot\mathbf{N}) = \mathrm{Ur}\,(\mathbf{N}\cdot\mathbf{M})$$

oricare ar fi matricile **M** şi **N** pătratice.

Avem

$$\mathbf{AB} = (d_{ij}) \text{ şi deci } \mathrm{Ur}\,((\mathbf{AB})'(\mathbf{AB})) = \sum_{i,j} d_{ij}^2 = 0$$

Deoarece matricile sînt reale $d_{ij} = 0$. Deci $\mathbf{AB} = 0$.

Presupunem că $\mathbf{AB} = 0$. Putem scrie

$$\mathrm{Ur}(\mathbf{A}^i\mathbf{B}^j\mathbf{A}^k\mathbf{B}^l\ldots) = \mathrm{Ur}\,((\mathbf{AB})\ldots)$$

deoarece produsul de matrici este comutativ sub semnul urmă. Deci

$$\mathrm{Ur}(\mathbf{A}^i\mathbf{B}^j\mathbf{A}^k\mathbf{B}^l\ldots) = 0$$

Observaţie. Forma pătratică $Q = \mathbf{X}'\mathbf{AX}$ şi forma liniară $L = \mathbf{B}'\mathbf{X}$, **B** fiind o matrice coloană sînt independente dacă şi numai dacă Q şi $L^2 = (\mathbf{B}'\mathbf{X})'\,(\mathbf{B}'\mathbf{X})$ sînt independente.

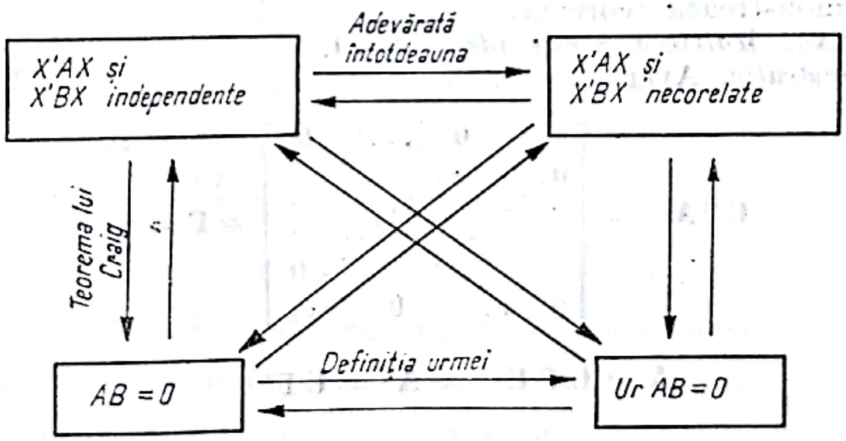
În acest caz condiţia lui Craig este $\mathbf{AB}'\mathbf{B} = 0$.

Putem să scriem

$$\mathbf{ABB}' = 0 = \mathbf{ABB}'\mathbf{B} = \mathbf{AB}(\mathbf{B}'\mathbf{B})$$

şi cum $\mathbf{B}'\mathbf{B}$ este un scalar nenul, avem $\mathbf{AB} = 0$. Aceasta stabileşte necesitatea acestei condiţii.

Hultquist (1966) dă următoarea diagramă:



§8. Condiţii ca o formă pătratică să fie repartizată χ^2

TEOREMA 19. *Forma pătratică* $\mathbf{X}'\mathbf{AX}$ *unde* **X** *este un vector normal* $N(\mathbf{0},\mathbf{I})$ *de componente independente, este repartizată* $\chi^2(r)$ *dacă şi numai dacă cele r valori proprii nenule ale matricii* **A** *(pătratică şi simetrică) sînt egal cu 1.*

Scanned with OKEN Scanner

Demonstrație. Considerăm transformarea $\mathbf{Y} = \mathbf{CX}$, $\mathbf{C}$ ortogonală, ceea ce conduce la

$$\mathbf{X'AX} = \sum_{i=1}^{r} a_i Y_i^2$$

unde a_i sînt valorile proprii nenule ale matricei $\mathbf{A}$, deci în număr de $r \leqslant p$ (p numărul de componente ale vectorului $\mathbf{X}$).

A doua funcție caracteristică pentru $a_i Y_i^2$ este

$$\psi_i(t) = -\frac{1}{2} \operatorname{Ln}(1 - 2a_i it).$$

Se observă că $\psi_i(t)$ este funcția generatoare de cumutanți a unui multiplu de o variabilă $\chi^2(1)$.

Deci pentru $\mathbf{X'AX}$, funcția generatoare de cumutanți este

$$\psi(t) = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{r} \operatorname{Ln}(1 - 2a_i it).$$

Dezvoltînd $\psi(t)$ obținem

$$\mathfrak{K}_n = 2^{n-1}(n-1)! \sum_{i=1}^{r} a_i^n.$$

Însă cumutanții unei variabile repartizate χ^2 (r) sînt

$$\mathfrak{K}_n = 2^{n-1}(n-1)!\, r,$$

ceea ce demonstrează teorema.

COROLAR. *Matricea* $\mathbf{A}$ *este idempotentă.*

Demonstrație. Avem

$$\mathbf{C}^{-1}\mathbf{AC} = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & & \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_r \end{bmatrix} = \mathbf{\Gamma} \Rightarrow$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{C}\,\mathbf{\Gamma}\,\mathbf{C}^{-1} \Rightarrow \mathbf{A}^n = \mathbf{C}\,\mathbf{\Gamma}^n\,\mathbf{C}^{-1}$$

$\mathbf{A}^n = \mathbf{C}\,\mathbf{\Gamma}\,\mathbf{C}^{-1} = \mathbf{A}$ deoarece $\mathbf{\Gamma}^n = \mathbf{\Gamma}$ dacă $a_i = 1$ sau 0.

Deci

$$\psi_{\mathbf{X'AX}}(t) = (it)\,\mathrm{Ur}\mathbf{A} + \sum_{j=2}^{\infty} \frac{(it)^j}{j!} 2^{j-1}(j-1)!\,\mathrm{Ur}\mathbf{A}^j.$$

$$\psi_{\mathbf{X'AX}}(t) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(it)^j}{j!} 2^{j-1}\mathrm{Ur}\mathbf{A}^j.$$

Scanned with OKEN Scanner

TEOREMA 20. (Cochran (1934)). *Dacă* $X_1, X_2, \ldots, X_n$ *este o selecție asupra unei variabile aleatoare* $N(0,1)$ *și dacă*

$$\sum_1^n X_j^2 \equiv \sum_1^k Q_i,$$

unde Q_i *este o formă pătratică nenegativă în* $X_1, X_2, \ldots, X_n$ *a cărei matrice are rangul* n_i, *atunci condiția necesară și suficientă pentru ca formele pătratice* Q_i *să fie independente și repartizate*

$$\chi^2(r_i),\ i=1, 2, \ldots, k \text{ este ca } \sum_1^k n_i = n.$$

Demonstrație. Necesitatea. Presupunem că formele pătratice Q_i sînt independente și repartizate $\chi^2(n_i)$, $1 \leqslant i \leqslant k$ și arătăm că aceasta implică $\sum_1^k n_i = n$. Ținînd seama de proprietatea de aditivitate a repartiției χ^2, urmează că $Q_1 + Q_2 + \ldots + Q_k$ urmează o repartiție $\chi^2(n_1+n_2+\ldots+n_k)$.

Însă $Q_1 + Q_2 + \ldots + Q_k \equiv \sum_1^n X_j^2$ și deoarece $X_1, X_2, \ldots, X_n$ este o selecție asupra unei variabile $N(0,1)$ din teorema I.6 urmează că $\sum_1^n X_j^2$ este repartizată $\chi^2(n)$. Deci $\sum_1^k n_i = n$.

Suficiența. Presupunem că $\sum_1^k n_i = n$ și arătăm că există o transformare liniară nesingulară

$$X_i = \sum_{j=1}^n b_{ij} Y_j \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

care transformă $Q_1, Q_2, \ldots, Q_k$ după cum urmează

$$Q_1 = Y_1^2 + \ldots + Y_{n_1}^2$$
$$Q_2 = Y_{n_1+1}^2 + \ldots + Y_{n_1+n_2}^2$$
$$\vdots$$
$$Q_k^2 = Y_{n_1+n_2+\ldots+n_{k-1}+1}^2 + \ldots + Y_{n_1+n_2+\ldots+n_k}^2$$

unde $\sum_1^k n_j = 1$ și unde $Y_1, \ldots, Y_n$ sînt variabile aleatoare independente repartizate $N(0, 1)$. Astfel $Q_1, Q_2, \ldots, Q_k$ fiind sume de pătrate de variabile aleatoare repartizate $N(0, 1)$, vor fi independente și repartizate χ^2 cu $n_1, n_2, \ldots,$ respectiv n_k grade de libertate.

Deoarece Q_1 este o formă pătratică nenegativă cu matricea de rang n_1, există n_1 combinații liniare de $X_1, X_2, \ldots, X_n$, independente pe care putem să le notăm $Y_1, Y_2, \ldots, Y_{n_1}$

$$Y_{i_1} = \sum_{j=1}^n b^{i_1 j} X_j, \qquad i_1 = 1, 2, \ldots, n_1$$

Scanned with OKEN Scanner

astfel ca

$$Q_1 = Y_1^2 + \ldots + Y_{n_1}^2.$$

Analog pentru $Q_2, \ldots, Q_k$ avem următoarele mulțimi de $n_2, n_3, \ldots, n_k$ combinații liniare de $X_1, X_2, \ldots, X_n$,

$$Y_{i_2} = \sum_{j=1}^{n} b^{i_2 j} X_j, \qquad i_2 = n_1 + 1, \ldots, n_1 + n_2$$

$$Y_{i_k} = \sum_{j=1}^{n} b^{i_k j} X_j, \qquad i_k = \sum_{1}^{k-1} n_j + 1, \ldots, \sum_{1}^{k} n_j.$$

Vom arăta că nu poate exista o dependență liniară între Y-cii asociați unei singure forme patratice Q. Trebuie arătat că nu există dependențe lineare între Y-cii asociați la două sau la mai multe forme pătratice Q. În acest caz ar fi posibil să exprimăm Y-cii asociați unei forme Q, Q^*, ca o combinație liniară omogenă a Y-lor dintr-una sau mai multe forme pătratice diferite de Q^*.

Aceasta înseamnă că $\sum_{1}^{k} Q_i$ poate fi exprimată ca o formă patratică nenegativă în cel mult $n-1$ Y-ci. Deoarece fiecare Y este o combinație liniară omogenă de $X_1, \ldots, X_n$, $Q_1 + Q_2 + \ldots + Q_k$ va fi o formă pătratică ne-negativă în $X_1, \ldots, X_n$ a cărei matrice va fi de rang cel mult $n-1$. Însă știm că matricea formei pătratice $Q_1 + Q_2 \ldots + Q_k$ fiind egală cu a $\sum_{1}^{n} X_i^2$ este de rang n. Prin urmare, nu este posibil să avem dependență liniară, între Y-cii asociați unei forme Q, de exemplu Q^* și acei asociați cu una sau mai multe forme Q diferite de Q^*. Prin urmare matricea $(b^{ij})_{1 \leqslant i, j \leqslant n}$ este nesingulară. Deci transformarea

$$Y_i = \sum_{j=1}^{n} b^{ij} X_j, \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

este nesingulară și are o inversă unică

$$X_j = \sum_{i=1}^{n} b_{ij} Y_i, \qquad j = 1, 2, \ldots, n$$

care fiind o transformare liniară, transformă $\sum_{1}^{n} X_i^2$ și deci și $\sum_{1}^{k} Q_i$ în

$$\left(\sum_{1}^{n_1} Y_i^2\right) + \left(\sum_{n_1+1}^{n_1+n_2} Y_i^2\right) + \ldots + \left(\sum_{n_1+n_2+\ldots+n_{k-1}+1}^{n} Y_i^2\right).$$

Transformarea este ortogonală și deci variabilele aleatoare Y_i sînt independente și repartizate $N(0, 1)$. Urmează că $Q_1, \ldots, Q_k$ au repartiții identice cu $\left(\sum_{1}^{n_1} Y_i^2\right), \ldots, \left(\sum_{n_1+n_2+\ldots+n_{k-1}+1} Y_i^2\right)$, care la rîndul lor sînt varia-

bile aleatoare independente repartizate χ^2 cu $n_1, n_2, \ldots$, respectiv n_k grade de libertate.

Observație. Teorema lui Cochran are aplicații în analiza dispersională și în regresia normală.

TEOREMA 21. (James (1952)). *Proprietățile*

i) $\sum_1^k \operatorname{rang} \mathbf{A}_m = n.$

ii) Fiecare $\mathbf{A}_m$ este idempotentă.

iii) $\mathbf{A}_l \mathbf{A}_m = 0$ pentru toți $l \neq m$

sînt echivalente.

TEOREMA 22. (Lancaster (1954)). *Dacă* $\mathbf{X}'\mathbf{AX}$ *și* $\mathbf{X}'\mathbf{BX}$ *sînt repartizate* $\chi^2(n_A)$, *respectiv* $\chi^2(n_B)$ $(n_A > n_B)$ *atunci*

$$\mathbf{X}'\mathbf{AX} - \mathbf{X}'\mathbf{BX}$$

este repartizată $\chi^2(n_A - n_B)$ *și independentă de* $\mathbf{X}'\mathbf{BX}$, *dacă și numai dacă corelația dintre* $\mathbf{X}'\mathbf{AX}$ *și* $\mathbf{X}'\mathbf{BX}$ *este* $k/\sqrt{kn}$.

§ 9. Condiția necesară și suficientă ca un polinom pătratic să fie repartizat χ^2 centrat (necentrat)

TEOREMA 23. *Fie* $X_1, X_2, \ldots, X_n$ n *variabile aleatoare independente repartizate* $N(0,1)$. *Polinomul pătratic* $Q = \mathbf{XAX}' + \mathbf{bX}'$ *este repartizat* $\chi^2(r)$ *dacă și numai dacă*

i) *Matricea* $\mathbf{A}$ *este de rang* r *și are* r *valori proprii egale cu* $+1$, *în timp ce celelalte* n-r *valori proprii sînt zero.*

ii) $\mathbf{b} = 0$.

Demonstrație. Necesitatea. Funcția caracteristică corespunzătoare lui Q este

$$\varphi_Q(t) = |\mathbf{I} - 2it\,\mathbf{A}|^{-1/2} \exp\left\{-\frac{1}{2}\, t^2\, \mathbf{b}(\mathbf{I} - 2it\,\mathbf{A})^{-1}\mathbf{b}'\right\}. \tag{123}$$

Considerăm o matrice ortogonală $\mathbf{C}$, astfel încît $\mathbf{D} = \mathbf{CAC}'$ este o matrice diagonală. În acest caz $\mathbf{A} = \mathbf{C}'\mathbf{DC}$ și

$$|\mathbf{I} - 2it\,\mathbf{A}| = |\mathbf{I} - 2it\,\mathbf{D}| = (1 - 2it\lambda_1) \ldots (1 - 2it\lambda_p), \tag{124}$$

unde $\lambda_1, \ldots, \lambda_p (p \leqslant n)$ sînt valorile proprii ale matricei $\mathbf{A}$ diferite de zero. Dacă $\beta = \mathbf{bC}'$, atunci

$$\mathbf{b}(\mathbf{I} - 2it\,\mathbf{A})^{-1}\mathbf{b}' = \mathbf{b}\,[\mathbf{C}(\mathbf{I} - 2it\,\mathbf{D})^{-1}\mathbf{C}]\,\mathbf{b}' = \beta\,(\mathbf{I} - 2it\,\mathbf{D})^{-1}\beta'$$

astfel încît

$$\mathbf{b}(\mathbf{I} - 2it\,\mathbf{A})^{-1}\mathbf{b}' = \sum_{j=1}^{p} \frac{\beta_j^2}{1 - 2it\lambda_j} + \sum_{p+1}^{n} \beta_j^2. \tag{125}$$

Scanned with OKEN Scanner

Ținînd seama de (124) și (125), (123) devine

$$\varphi_Q(t) = \prod_{j=1}^{p} (1 - 2it\lambda_j)^{-1/2} \exp\left\{-\frac{1}{2} t^2 \left[\sum_{j=1}^{p} \frac{\beta_j^2}{1 - 2it\lambda_j} + \sum_{p+1}^{n} \beta_j^2\right]\right\}.$$

Prin ipoteză $\varphi_Q(t) = (1 - 2it)^{-r/2}$, astfel încît obținem

$$\exp\left\{t^2\left[\sum_{j=1}^{p} \frac{\beta_j^2}{1 - 2it\lambda_j} + \sum_{j+1}^{n} \beta_j^2\right]\right\} = \frac{(1 - 2it)^r}{(1 - 2it\lambda_1) \ldots (1 - 2t\lambda_p)}.$$

Această ecuație avînd loc pentru toți t reali,

$$\sum_{j=1}^{p} \frac{\beta_j^2}{1 - 2it\lambda_j} + \sum_{p+1}^{n} \beta_j^2 = 0 \tag{126}$$

și

$$(1 - 2it)^r = (1 - 2it\,\lambda_1) \ldots (1 - 2it\,\lambda_p). \tag{127}$$

Egalitatea (127) poate avea loc numai dacă

$$r = p \quad \text{și} \quad \lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_p = 1$$

astfel încît condiția i) este necesară.

$$(126) \Rightarrow \beta_j = 0 \quad \text{pentru} \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

Deoarece $\beta = \mathbf{b}C'$ sau $b = \beta C$ și obținem condiția ii).
Suficiența rezultă fără dificultate.

TEOREMA 24. *Fie $X_1, X_2, \ldots, X_n$ n variabile aleatoare independente repartizate normal cu mediile $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ și dispersia unitate. Polinomul pătratic $Q = \mathbf{X}\mathbf{A}\mathbf{X}' + \mathbf{b}\mathbf{X}'$ este repartizat $\chi^2(r, \lambda)$ dacă și numai dacă*

i) $R(\mathbf{A}) = r$ *și* $\mathbf{A}$ *are r valori proprii egale cu +1, în timp ce celelalte n-r valori proprii sînt zero.*

ii) $\mathbf{b} = 0$

iii) $\lambda^2 = \boldsymbol{\mu}\mathbf{A}\boldsymbol{\mu}'$.

Demonstrație. Necesitatea. Funcția caracteristică corespunzătoare lui Q este

$$\varphi_Q(t) = |\mathbf{I} = 2it\mathbf{A}|^{-1/2} \exp\left\{\frac{1}{2}\left[(\boldsymbol{\mu} + it\mathbf{b})(\mathbf{I} - 2it\mathbf{A})^{-1}(\boldsymbol{\mu} + it\mathbf{b})' - \boldsymbol{\mu}\boldsymbol{\mu}'\right]\right\}.$$

Ca și în demonstrația teoremei 23 introducem matricea ortogonală $\mathbf{C}$ și scriem $\mathbf{D} = \mathbf{CAC}'$, $\beta = \mathbf{b}C'$, $\nu = \boldsymbol{\mu}C'$. Avem

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{\mu} + it\mathbf{b})(\mathbf{I} - 2it\mathbf{A})^{-1}(\boldsymbol{\mu} + it\mathbf{b})' - \boldsymbol{\mu}\boldsymbol{\mu}' = \\ = (\nu + it\beta)(\mathbf{I} - 2it\mathbf{D})^{-1}(\nu + it\beta)^{-1} - \nu\nu'.\end{aligned} \tag{128}$$

Scanned with OKEN Scanner

Din (126) și (128) obținem

$$\varphi_Q(t) = \left[\prod_{j=1}^{p}(1-2it\lambda_j)\right]^{-1/2} \times$$

(129)

$$\times \exp\left\{\frac{1}{2}\left[\sum_{j=1}^{n}\frac{(\nu_j+it\beta_j)^2}{1-2it\lambda_j}+\sum_{p+1}^{n}(\nu_j+it\beta_j)^2-\sum_{1}^{n}\nu_j^2\right]\right\}.$$

Deoarece Q este repartizat χ^2 necentrat

$$\varphi_Q(t) = (1-2it)^{-r/2}\exp\left[\frac{it\lambda}{i-2it}\right].$$

Urmează că relația

$$\exp\left\{\sum_{j=1}^{p}\frac{(\nu_j+it\beta_j)^2}{1-2it\lambda_j}+\sum_{p+1}^{n}(\nu_j+it\beta_j)^2-\sum_{1}^{n}\nu_j^2-\frac{2it\lambda^2}{1-2it}\right\}=\frac{\prod_{j=1}^{p}(1-2it\lambda_j)}{(1-2it)^r}$$

are loc pentru toți t reali. Aceasta este posibil numai dacă

$$\prod_{j=1}^{p}(1-2it\lambda_j) = (1-2it)^r \tag{130}$$

și

$$\sum_{j=1}^{p}\frac{(\nu_j+it\beta_j)^2}{1-2it\lambda_j}+\sum_{j=p+1}^{n}(\nu_j+it\beta_j)^2=\sum_{j=1}^{n}\nu_j^2+\frac{2it\lambda^2}{1-2it}. \tag{131}$$

Ecuația (130) este identică cu (127), de unde

$$r=p \quad \text{și} \quad \lambda_1=\lambda_2=\ldots=\lambda_p=1.$$

Substituind aceste valori în (131), înmulțim ambii membri ai egalității (131) prin $(1-2it)$ și egalăm părțile reale și imaginare ale acestei relații. Pentru toate valorile reale t, obținem

$$\sum_{1}^{n}\beta_j^2 = 4\sum_{r+1}^{n}\beta_j\nu_j$$

$$\sum_{1}^{n}\nu_j\beta_j-\sum_{r+1}^{n}\nu_j^2+t^2\sum_{r+1}^{n}\beta_j^2=\lambda^2-\sum_{1}^{n}\nu_j^2.$$

Din aceste relații obținem $\beta_i = 0\ (j=1,2,\ldots,n)$ și $\lambda^2 = \sum_{1}^{r}\nu_j^2$.

Aceste ecuații implică $\mathbf{b}=0$ și $\lambda^2=\boldsymbol{\mu}\mathbf{A}\boldsymbol{\mu}'$, ceea ce demonstrează necesitatea. *Suficiența* rezultă din definiția repartiției χ^2 necentrate.

Scanned with OKEN Scanner

Capitolul V

STATISTICI DE ORDINE

§1. Definiții. Introducere

Fie $X_1, X_2, \ldots, X_n$ o selecție asupra unei variabile aleatoare X.

DEFINIȚIA 1. Statisticile $X_{(1)}, X_{(2)}, \ldots, X_{(j)}, \ldots, X_{(n)}$ obținute scriind variabilele de selecție $X_1, X_2, \ldots, X_n$ în ordinea mărimii lor, adică

$$X_{(1)} \leqslant X_{(2)} \leqslant \ldots \leqslant X_{(j)} \leqslant \ldots \leqslant X_{(n)}$$

poartă numele de *variabile ordonate.*

Pentru selecția realizată, fie aceasta

$$X_1 = x_1, \quad X_2 = x_2, \ldots, X_n = x_n$$

are loc

DEFINIȚIA 2. Observațiile $x_{(1)}, x_{(2)}, \ldots, x_{(j)}, \ldots, x_{(n)}$ obținute scriind observațiile $x_1, x_2, \ldots, x_n$ în ordinea mărimii lor, adică

$$x_{(1)} \leqslant x_{(2)} \leqslant \ldots \leqslant x_{(j)} \leqslant \ldots x_{(n)}$$

poartă numele de *observații ordonate.*

DEFINIȚIA 3. Prin statistici de ordine vom înțelege fie variabilele ordonate fie observațiile ordonate.

Statistica $X_{(j)}$ poartă numele de statistica de ordine de rang j.

Statistica $X_{(1)}$ poartă numele de elementul minimal, iar $X_{(n)}$ de elementul maximal al variabilelor ordonate $X_{(1)}, \ldots X_{(n)}$.

Prin statistică sistematică vom înțelege orice funcție de statisticile de ordine.

TEOREMA 1. (Summers (1965)). *Dacă $x_{(1)}, x_{(2)}, \ldots, x_{(n)}$ sînt statisticile de ordine corespunzătoare selecției $X_1, X_2, \ldots, X_n$ în care sînt k valori negative, iar $\bar{X}$ este pozitivă, atunci o margine inferioară pentru coeficientul de variație de selecție ($\sqrt{m_2}/\bar{x}$) este $\sqrt{k/(n-k)}$.*

Demonstrație. Putem scrie:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum x_{(j)}, \quad m_2 = \frac{1}{n} \sum (x_j - \bar{x})^2 = \frac{1}{n} \sum x_{(j)}^2 - \bar{x}^2,$$

Scanned with OKEN Scanner

de unde

$$\frac{\sqrt{m_2}}{\bar{x}} = \sqrt{\frac{n \Sigma x_{(j)}^2}{(\Sigma x_j)^2} - 1}, \quad x_{(k)} \leqslant 0 \text{ pentru } k < n$$

(1)

$$= \sqrt{\frac{n\left(\sum_1^k x_{(j)}^2 + \sum_{k+1}^n x_{(j)}^2\right)}{\left(\sum_1^k x_{(j)} + \sum_{k+1}^n x_{(j)}\right)^2} - 1}.$$

Din inegalitatea lui Cauchy

$$(n-k)\sum_{k+1}^n x_{(j)}^2 \geqslant \left(\sum_{k+1}^n x_{(j)}\right)^2$$

și din (1) rezultă teorema.

DEFINIȚIA 4. Statistica $W(1) = X_{(n)} - X_{(1)}$ poartă numele de amplitudinea selecției.

DEFINIȚIA 5. (Mosteller (1946)). Statistica $W(j) = X_{(n+j-1)} - X_{(j)}$ poartă numele de pseudo-amplitudinea de rang j.

Observație. Pentru $j = 1$, se obține $W(1)$, amplitudinea selecției.

TEOREMA 2. (Thomson (1955)). *Dacă W (1) este amplitudinea de selecție, iar s abaterea medie pătratică de selecție, atunci*

(2)
$$s \leqslant \frac{W(1)}{2\sqrt{1 - \frac{1}{n}}}.$$

Demonstrație. (Guterman (1962)). Deoarece

$$\sum_1^n (x_{(j)} - a)^2 \text{ este minimă pentru } a = \bar{x}$$

și

$$|x_{(j)} - \tilde{m}| = \left|x_{(j)} - \frac{1}{2}(x_{(1)} + x_{(n)})\right| \leqslant \frac{1}{2} w(1),$$

putem scrie

(3)
$$\sum_1^n (x_{(j)} - \bar{x})^2 \leqslant \sum_1^n (x_{(j)} - \tilde{m})^2 \leqslant \frac{1}{4} n w^2(1).$$

Din (3) obținem

$$\frac{1}{n-1}\sum_1^n (x_j - \bar{x})^2 \leqslant \frac{1}{n-1} \cdot \frac{1}{4} n w^2(1),$$

ceea ce demonstrează (2).

Scanned with OKEN Scanner

DEFINIȚIA 6. Statistica $W(1)/S$, unde $S^2=\frac{1}{n-1}\sum(X_i-\bar{X})^2$ poartă numele de amplitudinea studentizată.

DEFINIȚIA 7. Statistica $X_{(n)}-\bar{X}$ poartă numele de abaterea maximă de la media de selecție.

DEFINIȚIA 8. Statistica

$$X_{([np]+1)}\ (X_{([n\lambda_i]+1)}) \tag{4}$$

poartă numele de cuantila de selecție de ordin $p(\lambda_j)$, unde $[np]$ reprezintă cel mai mare întreg $\leqslant np$ $(0<\lambda_1<\lambda_2<\ldots<\lambda_k<1)$.

Toate aceste statistici au aplicații importante.

Extremele (elementul minimal și elementul maximal) apar în studiul statistic al barajelor și secetelor, precum și în problemele de rezistență la rupere și apariție a avariilor.

Amplitudinea constituie un estimator rapid pentru σ și are aplicații în controlul calității.

Abaterea maximă de la media de selecție constituie baza metodei pentru punerea în evidență a observațiilor care se abat semnificativ de la celelalte observații, valorile mari ale statisticii $(X_{(n)}-\bar{X})/\sigma$ indicînd prezența uneia sau mai multor observații cu valori foarte mari. În cazul în care nu este specificată direcția observațiilor care se abat semnificativ de la celelalte observații se folosește amplitudinea studentizată.

Cu ajutorul teoremei lui Gauss-Markov (de la metoda celor mai mici patrate) este posibilă folosirea funcțiilor liniare de statisticile de ordine pentru estimarea parametrilor de poziție (împrăștiere) și împrăștiere. Această aplicație este folosită atunci cînd anumite observații ale selecției au fost censorizate, deoarece în acest caz metodele obișnuite de estimare nu sînt satisfăcătoare sau sînt laborioase.

Testele din teoria siguranței dau o ilustrare ideală a avantajelor statisticilor de ordine în datele censorizate. Deoarece experimentele de acest gen pentru a fi complete necesită o perioadă îndelungată, este adeseori avantajos să întrerupem experimentul după defectarea primelor r ansamble, cînd se cercetează n ansamble identice. Observațiile reprezintă r timpi de defectare ordonați și pot fi folosiți pentru estimarea parametrilor doriți, de exemplu media duratei vieții ansamblului.

§2. Repartițiile diferitelor statistici de ordine

Fie $X_1, X_2, \ldots, X_n$ o selecție asupra unei variabile aleatoare X cu funcția (densitatea) de repartiție $F(p)$.

TEOREMA 3. *Dacă* $1 \leqslant r_1<r_2<\ldots<r_k\leqslant n$, *atunci probabilitatea elementară a vectorului* $(X_{r_1}, X_{r_2}, \ldots, X_{r_k})$ *este*

$$f_{r_1,r_2,\ldots,r_k}(x_{r_1}, x_{r_2}, \ldots, x_{r_k}) = \frac{n!}{(r_1-1)!\,(r_2-r_1-1)!\ldots(n-r_k)!}[F(x_{r_1})]^{r_1-1}\times$$

$$\times[F(x_{r_2})-F(x_{r_1})]^{r_2-r_1-1}\ldots[1-F(x_{r_k})]^{n-r_k}\prod_1^k p(x_{r_j})\,dx_{r_j}. \tag{5}$$

Scanned with OKEN Scanner

Observaţii. i) Dacă definim

$$x_{r_0} = -\infty, \quad x_{r_{k+1}} = +\infty, \quad r_0 = 0, \quad r_{k+1} = n+1$$

(5) se poate scrie

$$(5') \qquad n!\left[\prod_{i=1}^{k} p(x_{r_i})\right] \cdot \prod_{i=0}^{k} \left\{ \frac{[F(x_{r_{i+1}}) - F(x_{r_i})]^{r_{i+1}-r_i-1}}{(r_{i+1}-r_i-1)!} \right\}.$$

ii) Densitatea de repartiţie comună tuturor celor n statistici de ordine este

$$(6) \qquad n!p(x_1)p(x_2)\ldots p(x_n).$$

Demonstraţie. Împărţind axa x-lor în intervalele disjuncte

$$I_1 = (-\infty, x_{r_1}), I_2 = [x_{r_1}, x_{r_1} + \mathrm{d}x_{r_1}), I_3 = [x_{r_1} + \mathrm{d}x_{r_1}, x_{r_2}), \ldots .$$

$$\ldots I_{k+1} = [x_{r_{k-1}} + \mathrm{d}x_{r_{k-1}}, x_{r_k}), I_{k+2} = [x_{r_k}, x_{r_k} + \mathrm{d}x_{r_k}), I_{k+3} = [x_{r_k} + \mathrm{d}x_{r_k}, \infty),$$

probabilitatea ca o variabilă de selecţie să cadă într-unul din aceste intervale este

$$p_1 = \int_{-\infty}^{x_{r_1}} p(u)\mathrm{d}u = F(x_{r_1})$$

$$p_2 = \int_{x_{r_1}}^{x_{r_1}+\mathrm{d}x_{r_1}} p(u)\mathrm{d}u = F(x_{r_1} + \mathrm{d}x_{r_1}) - F(x_{r_1}) \simeq p(x_{r_1})\mathrm{d}x_{r_1}$$

$$p_3 = \int_{x_{r_1}+\mathrm{d}x_{r_1}}^{x_{r_2}} p(u)\,\mathrm{d}u = F(x_{r_2}) - F(x_{r_1} + \mathrm{d}x_{r_1}) \simeq F(x_{r_2}) - F(x_{r_1})$$

. .
.
.

$$p_{k+1} = \int_{x_{r_{k-1}}+\mathrm{d}x_{r_{k-1}}}^{x_{r_k}} p(u)\,\mathrm{d}u = F(x_{r_k}) - F(x_{r_{k-1}} + \mathrm{d}x_{r_{k-1}}) \simeq F(x_{r_k}) - F(x_{r\ \ _1})$$

$$p_{k+2} = \int_{x_{r_k}}^{x_{r_k}+\mathrm{d}x_{r_k}} p(u)\,\mathrm{d}u = F(x_{r_k} + \mathrm{d}x_{r_k}) - F(x_{r_k}) \simeq p(x_{r_k})\mathrm{d}x_{r_k}$$

$$p_{k+3} = \int_{x_{r_k}+\mathrm{d}x_{r_k}}^{\infty} p(u)\,\mathrm{d}u = 1 - F(x_{r_k}).$$

Scanned with OKEN Scanner

Probabilitatea elementară a vectorului $(X_{r_1}, X_{r_2}, \ldots, X_{r_k})$ este probabilitatea ca în selecţia $X_1, X_2, \ldots, X_n$

$(r_1 - 1)$ variabile de selecţie să ia valori în intervalul I_1

1 variabilă de selecţie să aibă valoarea în intervalul I_2

$(r_2 - 1)$ variabile de selecţie să aibă valori $< x_{r_2}$

sau

$(r_2 - r_1 - 1)$ variabile de selecţie să aibă valori în intervalul I_3

. . . . . .

1 variabilă de selecţie să aibă valoare în intervalul I_{k+2}

$(n - r_k)$ variabile de selecţie să ia valori în intervalul I_{k+3}.

Una dintre aceste grupări are probabilitatea

$$p_1^{r_1-1} p_2 p_3^{r_2-r_1-1} \ldots p_{k+1}^{r_k-r_{k-1}-1} p_{k+2} p_{k+3}^{n-r_k}.$$

Cum numărul tuturor grupărilor de această formă, grupări ce constituie evenimente incompatibile, este

$$\frac{n!}{(r_1-1)!\,1!\,(r_2-r_1-1)!\,1!\ldots 1!\,(n-r_k)!}$$

rezultă (5).

Observaţii. i) Dacă în (5) facem $k = r_1 = 1$ găsim

$$f_1(x_1)\mathrm{d}x_1 = \frac{n!}{(n-1)!}\,[1 - F(x_1)]^{n-1}\,p(x_1)\mathrm{d}x_1$$

(7)

$$= n[1 - F(x_1)]^{n-1}\,p(x_1)\,\mathrm{d}x,$$

expresie ce dă probabilitatea elementară a elementului minimal.

ii) Dacă în (5) facem $k = 1$, $r_1 = n$, găsim

(8) $$n[F(x_n)]^{n-1}\,p(x_n)\,\mathrm{d}x_n,$$

expresie ce dă probabilitatea elementară a elementului maximal.

iii) Dacă în (5) facem $k = 1$, $r_1 = j$, găsim

(9) $$\frac{n!}{(j-1)!\,(n-j)!}\,[F(x_j)]^{j-1}\,[1 - F(x_j)]^{n-1}\,p(x_j)\,\mathrm{d}x_j,$$

expresie ce dă probabilitatea elementară a statisticii de ordine de rang j.

La formula (9) se mai poate ajunge după cum urmează.

Avem

$$F_j(x) = P(X_{(j)} \leqslant x) =$$

(10)

$$= P\,(\text{cel puţin } j \text{ dintre variabilele } X_i \text{ sînt mai mici sau egale cu } x) =$$

$$= \sum_{i=j}^{n} C_n^i\,F^i(x)\,[1 - F(x)]^{n-i}$$

Scanned with OKEN Scanner

deoarece termenul din sumă este $b(i; n, F(x))$ (sau cu alte cuvinte probabilitatea ca exact i dintre variabilele $X_1, \ldots, X_n$ să fie mai mici sau egale cu x).

Ţinînd seama de relaţia dintre sumele binomiale şi funcţia beta incompletă, avem

$$F_j(x) = I_{F(x)}(j, n - j + 1) \tag{11}$$

unde $I_p(a,b) = \frac{1}{B(a,b)} \int_0^p t^{a-1} (1-t)^{b-1} \, dt$. Astfel $F_j(x)$ poate fi evaluată din tabelele funcţiei $I_p(a, b)$ (Pearson, K. (1934)).

Din (11) găsim

$$f_j(x) = \frac{1}{B(j, n-j+1)} \frac{d}{dx} \int_0^{F(x)} t^{j-1} (1-t)^{n-j} \, dt =$$

$$= \frac{1}{B(j, n-j+1)} [F(x)]^{j-1} [1 - F(x)]^{n-j} p(x).$$

iv) Dacă în (5) facem $k = 2$, $r_1 = i$, $r_2 = j$, găsim

$$f_{ij}(x,y)\, dx dy = \frac{n!}{(i-1)!\,(j-i-1)!\,(n-j)!} [F(x)]^{i-1} [F(y) - F(x)]^{j-i-1} \times$$

$$\times [1 - F(y)]^{n-j} p(x)\, p(y)\, dx\, dy, \tag{12}$$

expresie ce dă probabilitatea elementară a vectorului aleator $(X_{(i)}, X_{(j)})$.

Funcţia de repartiţie $F_{ij}(x,y)$ a vectorului $(X_{(i)}, X_{(j)})$ poate fi obţinută prin integrarea relaţiei (12) sau cu argumentarea următoare, adevărată atît în cazul continuu cît şi în cazul discret. Pentru $x < y$, avem

$$F_{ij}(x,y) = P(\text{cel puţin } i \; X_r \leqslant x, \text{cel puţin } j \; X_r \leqslant y) = \sum_{r=i}^{n} \sum_{\tau=j-r}^{n-r} P(\text{exact}$$

$$r X_r \leqslant x, \text{ exact } \tau \; X_r \text{ cu } x < X_\tau \leqslant y),$$

exceptînd cazul $r > j$, cînd τ porneşte de la 0.

Astfel pentru $x < y$

$$F_{ij}(x,y) = \sum_{r=i}^{n} \sum_{\tau=\max(0, j-r)}^{n-r} \frac{n!}{r!\,\tau!\,(n-r-\tau)!} [F(x)]^r [F(y) - F(x)]^\tau \times$$

$$\times [1 - F(y)]^{n-r-\tau}. \tag{13}$$

Pentru $x \geqslant y$, $X_{(j)} \leqslant y \Rightarrow X_{(i)} \leqslant x$, astfel încît

$$F_{ij}(x,y) = F_j(y). \tag{13'}$$

Scanned with OKEN Scanner

Dacă în (12) considerăm transformarea

$$\begin{matrix} x = x \\ w_{ij} = y - x \end{matrix} \quad \text{pentru care} \quad \left| \frac{D(x,y)}{D(x,w_{ij})} \right| = 1,$$

obţinem pentru variabila aleatoare $W_{ij} = X_{(j)} - X_{(i)}$, prin integrarea în raport cu x, densitatea de repartiţie

$$f(w_{ij}) = \frac{n!}{(i-1)!\,(j-i-1)!\,(n-j)!} \int_{-\infty}^{\infty} F^{i-1}(x) p(x) [F(x+w_{ij}) - F(x)]^{j-i-1} \times$$

(14)

$$\times\, p(x + w_{ij}) [1 - F(x + w_{ij})]^{n-j}\, \mathrm{d}x.$$

Pentru $i = 1$, $j = n$, din (14) obţinem densitatea de repartiţie a amplitudinii :

$$(15) \qquad f(w) = \frac{n!}{(n-2)!} \int_{-\infty}^{\infty} p(x) [F(x + w) - F(x)]^{n-2} p(x + w) \mathrm{d}x.$$

Funcţia de repartiţie a amplitudinii în punctul a se obţine integrînd (15) în raport cu u între 0 şi w. Schimbînd ordinea de integrare obţinem

$$F(w) = n \int_{-\infty}^{\infty} p\,(x) \int_{0}^{w} (n-1) p(x + u) [F(x + u) - F(x)]^{n-2}\, \mathrm{d}u\, \mathrm{d}x =$$

$$= n \int_{-\infty}^{\infty} p(x) [F(x + u) - F(x)]^{n-1} \Big|_{u=0}^{u=w} \mathrm{d}x,$$

de unde

$$(16) \qquad F(w) = n \int_{-\infty}^{\infty} p(x) [F(x + w) - F(x)]^{n-1}\, \mathrm{d}x.$$

v) Dacă $n = 2l + 1$, ţinînd seama că într-o scriere ordonată mediana ocupă locul central, din (5) obţinem probabilitatea elementară a medianei

$$(17) \qquad \frac{(2l+1)!}{(l!)^2} [F(m_e)]^l [1 - F(m_e + \mathrm{d}m_e)]^l\, p(m_e)\, \mathrm{d}m_e.$$

Cum

$$F(m_e + \mathrm{d}m_e) = F(m_e) + f(m_e)\, \mathrm{d}m_e$$

neglijînd termenii de ordin $(\mathrm{d}m_e)^2$, (17) se poate scrie

$$(17') \qquad \frac{(2l+1)!}{(l!)^2} [F(m_e)]^l [1 - F(m_e)]^l\, p(m_e)\, \mathrm{d}m_e.$$

Scanned with OKEN Scanner

§ 3. Momentele statisticilor de ordine

Funcţiile liniare de statisticile de ordine, dintre care amplitudinea este cea mai simplă, sînt folosite în estimarea parametrilor. Prin urmare cunoaşterea mediilor, dispersiilor şi covarianţelor statisticilor de ordine, permite determinarea mediei şi dispersiei funcţiei lineare sau cu alte cuvinte determinarea estimatorilor şi a eficienţelor.

Vom nota statisticile de ordine

$$X_{(1)} \leqslant X_{(2)} \leqslant \ldots \leqslant X_{(n)}$$

prin

$$X_{1,n} \leqslant X_{2,n} \leqslant \ldots \leqslant X_{n,n}.$$

În cazul în care p este continuă

$$\mu_{j,n} = M(X_{j,n}) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_j\ (x)\mathrm{d}x =$$

(18)

$$= nC_{n-1}^{j-1} \int_{-\infty}^{\infty} xF[(x)]^{j-1}\ [1 - F(x)]^{n-j}\, \mathrm{d}F(x).$$

Deoarece $0 \leqslant F(x) \leqslant 1$, urmează că

$$|\mu_{j,n}| \leqslant n\, C_{n-1}^{j-1} \int_{-\infty}^{\infty} |x|\, \mathrm{d}F(x)$$

ceea ce arată că $\mu_{j,n}$ există dacă există $M(X)$.

Reciproca nu este necesar adevărată.

Pentru a vedea aceasta, în expresia lui $\mu_{j,n}$ facem transformarea $u = F(x)$. Obţinem

(18′)
$$\mu_{j,n} = nC_{n-1}^{j-1} \int_0^1 F^{-1}\,(u)\, u^{j-1}\, (1-u)^{n-j}\ \mathrm{d}u\,.$$

Astfel dacă media

$$M(X) = \int_0^1 F^{-1}\,(u)\ \mathrm{d}u$$

nu există datorită singularităţilor în $u = 0$ sau 1, $\mu_{j,n}$ poate exista pentru anumite valori (însă nu pentru toate) ale lui j.

Pentru orice funcţie de repartiţie F existenţa valorii medii $M(X)$ implică

(19)
$$\lim_{x \to -\infty} xF(x) = 0, \qquad \lim_{x \to \infty} x[1 - F(x)] = 0,$$

Scanned with OKEN Scanner

astfel încît avem

$$M(X) = \int_{-\infty}^{0} x\mathrm{d}F(x) - \int_{0}^{\infty} x\mathrm{d}\,[1 - F(x)] =$$

$$= \int_{0}^{\infty} [1 - F(x)]\,\mathrm{d}x - \int_{-\infty}^{0} F(x)\,\mathrm{d}x. \tag{20}$$

Această formulă dă $\mu_{j,n}$ dacă $F(x)$ este înlocuită prin $F_j(x)$. Luînd $r = n$ şi $r = 1$, obţinem

$$M(W) = \int_{-\infty}^{\infty} \{1 - F^n(x) - [1 - F(x)]^n\}\,\mathrm{d}x \text{ (Tippett (1925), Cox (1954)).} \tag{21}$$

De asemenea

$$\mu_{j,n} = \int_{0}^{\infty} [1 - F_j(x) - F_j(-x)]\,\mathrm{d}x$$

şi dacă p este simetrică faţă de $x = 0$

$$\mu_{j,n} = \int_{0}^{\infty} [F_{n-j+1}(x) - F_j(x)]\,\mathrm{d}x.$$

Observaţie. Pornind de la relaţia (15) se poate ajunge la (21). Avem

$$M(W) = (n-1) \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}F_n \int_{-\infty}^{x_{(n)}} (F_n - F_1)^{n-2} (x_{(n)} - x_{(1)})\,\mathrm{d}F_1 =$$

$$= -\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x_{(n)} \int_{-\infty}^{x_{(n)}} \frac{d^2}{\mathrm{d}x_{(1)}\,\mathrm{d}x_{(n)}} (F_n - F_1)^n (x_{(n)} - x_{(1)})\,\mathrm{d}x_{(1)}$$

sau (integrînd prin părţi a doua integrală)

$$M(W) = -\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x_{(n)} \left\{ \left[-(x_{(n)} - x_{(1)}) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x_{(n)}} F_n^n \right]_{x_{(1)} = -\infty} + \right.$$

$$\left. + \int_{-\infty}^{x_{(n)}} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x_{(n)}} (F_n - F_1)^n\,\mathrm{d}x_{(1)} \right.$$

Ţinînd seama că în limita superioară de integrare $(F_n - F_1)^n = 0$, putem schimba ordinea de integrare şi derivare; obţinem

$$M(W) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[(x_{(n)} - x_{(1)}) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x_{(n)}} F_n^n \right]_{x_{(n)} = -\infty} \mathrm{d}x_{(n)} -$$

Scanned with OKEN Scanner

$$-\int_{-\infty}^{\infty} (1 - F_1)^n \, dx_{(1)} =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{d}{dx_{(n)}} [(x_{(n)} - x_{(1)} F_n^n] - F_n^n \right\}_{x_{(n)} = -\infty} dx_{(n)} - \int_{-\infty}^{\infty} (1 - F_1)^n \, dx_{(1)} =$$

$$= \left[(x_{(n)} - x_{(1)}) F_n^n \right]_{\substack{x_{(1)} = -\infty \\ x_{(n)} = -\infty}}^{x_{(n)} = \infty} - \int_{-\infty}^{\infty} F_n^n \, dx_{(n)} - \int_{\infty}^{\infty} (1 - F_1)^n \, dx_{(1)} ,$$

de unde rezultă (21).

În cazul în care X este normală, Tippett (1925) găsește primele patru momente ale amplitudinii și totodată tabelează valorile medii pentru valori ale lui n pînă la 1000. Următoarele valori ilustrează comportarea generală a repartiției:

n	abaterea standard	β_1	β_2
2	0,853	0,99	3,87
10	0,797	0,16	3,15
100	0,605	0,21	3,38
500	0,524	0,29	3,50
1000	0,497	0,31	3,54

În cazul în care X este normală, Pearson, Hartley (1942) tabelează funcția de repartiție a amplitudinii în selecții de volum $n = 2, \ldots, 20$.

Tabelele lui Tippett și Pearson și Hartley sînt reproduse în Biometrika Tables for Statisticians, vol. 1.

Cox (1954) consideră repartiția amplitudinii în cazul selecțiilor de volum mic pentru variabile X ce nu sînt repartizate normal.

Dacă există $M[g(X)]$, unde g este o funcție de x, există și $M[g(X_{j,n})]$.

Observație. Cazurile particulare

$$g(x) = x^k, \quad (x - \mu_{j,n})^k \quad \text{și} \quad e^{tx}$$

dau momentele, momentele centrate și respectiv funcția generatoare de momente a statisticii $X_{j,n}$.

Cu notațiile

(22) $\mu_{j,n}^{(k)} = M(X_{j,n}^k)$ — momentul de ordinul k

(23) $\mu_{ij:n} = M(X_{i,n} X_{j,n})$ — momentul produs

(24) $\sigma_{ij:n} = M(X_{i,n} - \mu_{i,n})(X_{j,n} - \mu_{j,n})$ — covarianța statisticilor $X_{i,n}$ și $X_{j,n}$,

Scanned with OKEN Scanner

avem

$$\sigma^2_{j:n} = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu_{j,n})^2 f_j(x)\mathrm{d}x$$

și pentru $i<j$.

$$\sigma_{ij:n} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{y} (x - \mu_{i:n})(y - \mu_{j:n}) f_{ij}(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y, \tag{25}$$

unde $f_{i,j}(x,y)$ este definită de (12).

TEOREMA 4. (Sen (1959)). *Dacă* $M(|X|^\delta)$ *există pentru* $\delta > 0$, *atunci* $\mu^{(k)}_{j:n}$ *există pentru toți* j *care satisfac condiția* $j_0 \leqslant j \leqslant n - j_0 + 1$, *unde* $j_0\delta = k$.

Exemplul 1. Calculăm momentul de ordin *abcd* al statisticilor de ordine $X_{r,n}$, $X_{s,n}$, $X_{t,n}$, $X_{u,n}$.

În acest scop, în

$$f_{rstu}(x_1, x_2, x_3, x_4) = \frac{n!}{(r-1)!\,(s-r-1)!\,(t-s-1)!\,(u-t-1)!\,(n-u)!} \times$$

$$\times x_1^{r-1}(x_2 - x_1)^{s-r-1}(x_3 - x_2)^{t-s-1}(x_4 - x_3)^{u-t-1}(1 - x_4)^{n-u}, \tag{26}$$

cu $r<s<t<u$, punem

$$x_4 = y_4$$

$$x_3 = y_3y_4$$

$$x_2 = y_2y_3y_4 \quad \text{pentru care} \quad |\mathbf{J}| = y_2y_3^2y_4^3.$$

$$x_1 = y_1y_2y_3y_4.$$

Obținem

$$f(y_1, y_2, y_3, y_4) = Cy_1^{r-1}(1 - y_1)^{s-r-1}y_2^{s-1}(1 - y_2)^{t-s-1}\times$$

$$\times y_3^{t-1}(1 - y_3)^{u-t-1}y_4^{u-1}(1 - y_4)^{n-u}, \quad 0 \leqslant y_i < 1, \quad i = 1, 2, 3, 4 \tag{26'}$$

ceea ce arată că Y_i și deci $X_{r:n}/X_{s:n}$, $X_{s:n}/X_{t:n}$, $X_{t:n}/X_{u:n}$ și $X_{u:n}$ sînt independente. Avem

$$M(X^a_{r:n}X^b_{s:n}X^c_{t:n}X^d_{u:n}) = \frac{1}{B(r, s-r)}\int_0^1 y_1^{r+a-1}(1 - y_1)^{s-r-1}\times\ldots$$

$$\ldots\times\frac{1}{B(u, n-u+1)}\int_0^1 y_4^{u+a+b+c+d-1}(1 - y_4)^{n-u}\mathrm{d}y_4 = \tag{27}$$

$$= \frac{(r+a-1)!\,(s+a+b-1)!\,(t+a+b+c-1)!\,(u+a+b+c+d-1)!\,n!}{(r-1)!\,(s+a-1)!\,(t+a+b-1)!\,(u+a+b+c-1)!\,(n+a+b+c+d-1)!}$$

Scanned with OKEN Scanner

TEOREMA 5. (David, Johnson (1954). *Avem*

$$M\left(\prod_{i=1}^{k} X_{r_i:n}^{a_i}\right) = \frac{n!}{\left(n + \sum_{i=1}^{k} a_i\right)!} \prod_{i=1}^{k} \frac{\left(r_i - 1 + \sum_{j=1}^{i} a_j\right)!}{\left(r_i - 1 + \sum_{j=1}^{i-1} a_j\right)!}. \tag{28}$$

§4. Relații de recurență între momentele statisticilor de ordine

TEOREMA 6. (Cole (1951)). *Pentru orice repartiție*

$$(n - r)\mu_{r:n}^{(k)} + r\mu_{r+1:n}^{(k)} = n\mu_{r:n-1}^{(k)} \tag{29}$$

unde $r = 1, 2, \ldots, n - 1$ și $k = 1, 2, \ldots$

Demonstrație. Punînd

$$\mu_{r:n}^{(k)} = \int_{-\infty}^{\infty} x^k \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} I_{F(x)}(r, n - r + 1)\mathrm{d}x \tag{30}$$

și

$$\mu_{r:n}^{(k)} = \sum_{x=0}^{\infty} x^k \Delta I_{F(x)}(r, n - r + 1), \tag{31}$$

unde $\Delta I_{F(x)}(a, b) = I_{F(x)}(a, b) - I_{F(x-1)}(a, b)$, demonstrația este adevărată atît în cazul continuu cît și în cazul discret.

Dacă în relația de recurență pentru funcția B incompletă

$$aI_y(a + 1, b) + bI_y(a, b + 1) = (a + b)I_y(a, b)$$

luăm $a = r$, $b = n - r$, $y = F(x)$, obținem

$$(n - r)I_{F(x)}(r, n - r + 1) + rI_{F(x)}(r + 1, n - r) = nI_{F(x)}(r, n - r),$$

de unde rezultă (29).

Observații. i) Deoarece demonstrația teoremei 6 depinde numai de o proprietate a funcției B incomplete, urmează că aceeași relație de recurență are loc pentru densitatea de repartiție, funcția de repartiție și pentru valoarea medie (dacă există) a oricărei funcții $g(X_{r:n})$. Această observație a condus la

TEOREMA 7. (Srikantan (1962))

$$(n - r)M[g(X_{r:n})] + rM[g(X_{r-1:n})] = nM[g(X_{r:n-1})]. \tag{32}$$

ii) *Pentru* n *par,*

$$\frac{1}{2}(\mu_{\frac{1}{2}n:n}^{(k)} + \mu_{\frac{1}{2}n+1,n}^{(k)}) = \mu_{\frac{1}{2}n:n-1}^{(k)}. \tag{33}$$

Rezultă din (29), pentru $2r = n$.

Scanned with OKEN Scanner

iii) Dacă X are o repartiţie simetrică faţă de origine şi n este par:

$$\mu^{(k)}_{\frac{1}{2}n:n} = \begin{cases} \mu^{(k)}_{\frac{1}{2}n:n-1}, & k \text{ par} \\ 0, & k \text{ impar.} \end{cases} \tag{34}$$

Rezultă din observaţia ii)

TEOREMA 8. Pentru orice repartiţie

$$\mu^{(k)}_{r:n} = \sum_{i=r}^{n} C^{r-1}_{i-1} C^{i}_{n} (-1)^{i-r} \mu^{(k)}_{i:i}. \tag{35}$$

Observaţie. Teorema 8 permite să exprimăm momentele statisticii $X_{r:n}$ în termeni de momente ale elementelor maximale în selecţii de volume $r, r+1, \ldots, n$.

Demonstraţie. În ecuaţia

$$I_{F(x)}(r, n-r+1) = \int_0^{F(x)} \frac{n!}{(r-1)!\,(n-r)!}\, t^{r-1}(1-t)^{n-r}\,dt$$

dezvoltăm $(1-t)^{n-r}$. Integrandul devine

$$\frac{n!}{(r-1)!\,(n-r)!} \sum_{j=0}^{n-r} C^{j}_{n-r} (-1)^{j} t^{r-1+j}$$

sau, punînd $i = j + r$,

$$\sum_{i=r}^{n} C^{r-1}_{i-1} C^{i}_{n} (-1)^{i-r}\, i t^{i-1}. \tag{36}$$

Ţinînd seama de (36) în (30) sau (31), rezultă (35).

TEOREMA 9. (Govindarajulu (1963a)). *Pentru orice repartiţie şi* $1 \leqslant r < s \leqslant n$,

$$(r-1)\mu_{rs:n} + (s-r)\mu_{r-1,s:n} + (n-s+1)\mu_{r-1,s-1:n} = n\mu_{r-1,s-1:n-1}. \tag{37}$$

Demonstraţia rezultă dacă în formula

$$n\mu_{r-1,s-1:n-1} = \frac{n!}{(r-2)!\,(s-r-1)!\,(n-s)!} \int_{+\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{y} xy\,[F(x)]^{r-2} \times$$

$$\times\, [F(y) - F(x)]^{s-r-1}\, [1 - F(y)]^{n-s}\, dF(x)\, dF(y)$$

despărţim integrala într-o sumă de trei integrale similare, conform partiţiei

$$1 = F(x) + [F(y) - F(x)] + [1 - F(y)].$$

Scanned with OKEN Scanner

§5. Repartiția comună asimptotică a cuantilelor

Fie $X_1, X_2, \ldots X_n$ o selecție asupra unei variabile aleatoare continui cu densitatea de repartiție. Considerăm repartiția comună asimptotică a k cuantile de selecție $X_{(n_1)}, \ldots, X_{(n_k)}$, unde $n_j = [n\lambda_j] + 1$ și $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_k < 1$.

TEOREMA 10. (Mosteller (1946)). *Dacă p este derivabilă în vecinătatea cuantilei teoretice ξ_{λ_j} și $p(\xi_{\lambda_j}) \neq 0$, $j = 1, \ldots, k$, atunci repartiția vectorului $(X_{(n_1)}, X_{(n_2)}, \ldots, X_{(n_k)})$ tinde către o repartiție normală k dimensională de medii $\xi_{\lambda_1}, \xi_{\lambda_2}, \ldots, \xi_{\lambda_k}$ și covariante*

$$\operatorname{cov}(X_{(n_j)}, X_{(n_{j'})}) = \frac{\lambda_j(1-\lambda_{j'})}{np(\xi_{\lambda_j})p(\xi_{\lambda_{j'}})}, \quad j \leqslant j'.$$

Demonstrație. Densitatea de repartiție a vectorului $(X_{(n_1)}, \ldots, X_{(n_k)})$ este (după (5) și în presupunerea conform căreia X este repartizată uniform $R(0,1)$)

$$f = \frac{n!}{\prod_{j=0}^{k}(n_{j+1} - n_j - 1)!} \prod_{j=0}^{k} \left(\int_{x_{(n_j)}}^{x_{(n_{j+1})}} dt_j \right)^{n_{j+1}-n_j-1} =$$

$$= c \prod_{j=0}^{k} (x_{(n_{j+1})} - x_{(n_j)})^{n_{j+1}n_j - 1},$$

unde $n_0 = 0$, $n_{k+1} = n + 1$, $x_{(n_0)} = 0$, $x_{(n_{k+1})} = 1$ și c este o constantă.

Deoarece $M(X_{(n_j)}) = n_j/(n+1)$, punem

$$y_j = \left(x_{(n_j)} - \frac{n_j}{n+1} \right) n^{1/2}, \quad j = 0, 1, \ldots, k+1.$$

Atunci $y_0 = 0$, $y_{k+1} = 0$ și

$$f = c \prod_{j=1}^{k+1} \left[1 + \frac{(y_j - y_{j-1})(n+1)}{n^{1/2}(n_j - n_{j-1})} \right]^{n_j - n_{j-1} - 1}.$$

Deoarece Y_j este $o_p(1)$ (sau în cuvinte este de ordinul lui 1 în probabilitate), avem

$$\ln f = c + \frac{n+1}{n^{1/2}} \sum_{j=1}^{k+1} \frac{(n_j - n_{j-1} - 1)(y_j - y_{j-1})}{n_j - n_{j-1}} -$$

$$- \frac{1}{2} \frac{(n+1)^2}{n} \sum_{j=1}^{k+1} \frac{(n_j - n_{j-1} - 1)(y_j - y_{j-1})^2}{(n_j - n_{j-1})^2} + 0_p\left(\frac{1}{n^{1/2}}\right).$$

Scanned with OKEN Scanner

Putem scrie

$$\sum_{j=1}^{k+1} \frac{(n_j - n_{j-1} - 1)(y_j - y_{j-1})}{n_j - n_{j-1}} = \sum_{j=1}^{k+1} (y_j - y_{j-1}) -$$

$$- \sum_{j=1}^{k+1} \frac{y_j - y_{j-1}}{n_j - n_{j-1}} = 0 - 0_p\left(\frac{1}{n}\right)$$

și, deoarece $n_j = n\lambda_j + 0(1)$,

$$n \sum_{j=1}^{k+1} \frac{(n_j - n_{j-1} - 1)(y_j - y_{j-1})^2}{(n_j - n_{j-1})^2} = \sum_{j=1}^{k+1} \frac{(y_j - y_{j-1})^2}{\lambda_j - \lambda_{j-1}} + 0_p\left(\frac{1}{n}\right).$$

Urmează că

$$\ln f = C - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{k+1} \frac{(y_j - y_{j-1})^2}{\lambda_j - \lambda_{j-1}} + 0_p\left(\frac{1}{n^{1/2}}\right). \tag{38}$$

Deoarece

$$\sum_{j=1}^{k+1} \frac{(y_j - y_{j-1})^2}{\lambda_j - \lambda_{j-1}} = \sum_{j=1}^{k} \left(\frac{y_j^2}{\lambda_j - \lambda_{j-1}} + \frac{y_j^2}{\lambda_{j+1} - \lambda_j} \right) - 2 \sum_{j=2}^{k} \frac{y_j y_{j-1}}{\lambda_j - \lambda_{j-1}} =$$

$$= \sum_{j=1}^{k} y_j^2 \frac{\lambda_{j+1} - \lambda_j}{(\lambda_{j+1} - \lambda_j)(\lambda_j - \lambda_{j-1})} - 2 \sum_{j=2}^{k} \frac{y_j y_{j-1}}{\lambda_j - \lambda_{j-1}}, \tag{39}$$

din (38) urmează că Y_j are asimptotic o repartiție normală k-dimensională de vector valoare medie zero. Matricea coeficienților în formă pătratică (39) este $(B_{jj'})$, unde

$$B_{jj} = \frac{\lambda_{j+1} - \lambda_{j-1}}{(\lambda_{j+1} - \lambda_j)(\lambda_j - \lambda_{j-1})}, \quad B_{j,j-1} = B_{j-1,j} = \frac{-1}{\lambda_j - \lambda_{j-1}}$$

și $B_{jj'} = 0$ pentru $|j - j'| > 1$. Inversa acestei matrici, matricea de covariante pentru Y_j, are elementele

$$\operatorname{cov}(Y_j, Y_{j'}) = \lambda_j(1 - \lambda_{j'}), \quad j \leqslant j'.$$

Deoarece

$$X_{(nj)} = \frac{Y_j}{n^{1/2}} + \frac{n_j}{n+1}$$

urmează că asimptotic $(X_{(n_1)}, \ldots, X_{(n_k)})$ este de asemenea un vector normal k-dimensional, pentru care

$$M(X_{(nj)}) = \xi_{\lambda_j}(= \lambda_j) \text{ și } \operatorname{cov}(X_{(nj)}, X_{(n_{j'})}) = \frac{\lambda_j(1 - \lambda_{j'})}{n}$$

ceea ce demonstrează teorema în cazul în care X este repartizată uniform.

Cu $t_j = X_{(nj)}$, $\theta_j = \lambda_j$, transformarea $g_j(t_j) = P^{-1}(X_{(nj)})$ satisface condițiile teoremei II 28. Observînd că

$$g_j(\theta_j) = P^{-1}(\lambda_j) = \xi_{\lambda_j}$$

Scanned with OKEN Scanner

şi

$$g_j'(\theta_j) = \frac{dg_j(\theta_j)}{d\lambda_j} = \frac{1}{d\lambda_j/d\xi_{\lambda_j}} = \frac{1}{p(\xi_{\lambda_j})}$$

unde ξ_{λ_j} este cuantila de ordin λ_j a variabilei X, rezultă teorema.

Observaţii. i) Teorema 10 este demonstrată şi de Walker (1968), care foloseşte în acest scop funcţia caracteristică.

ii) Smirnov (1966, 1967) descrie comportarea lui $X_{(k)}$ cînd k este o funcţie de n şi stabileşte condiţiile în care $X_{(k(n))}$ tinde către o variabilă normală cînd $n \to \infty$, $k(n) \to \infty$, însă $k(n)/n \to 0$.

iii) Weiss (1964) stabileşte normalitatea asimptotică a cuantilelor de selecţie pentru repartiţii multidimensionale.

iv) Teorema lui Mosteller presupune că $0 < \lambda_1 < \ldots < \lambda_k < 1$.

Siddiqui (1960) pornind de la densitatea de repartiţie a vectorului $(X_{(i-k)}, X_{(i)}, X_{(i+l)}$ cu $\frac{i}{n} \to \lambda$ şi k, l $0(n)$ şi considerînd transformarea

$$U = \frac{n^{1/2}(X_{(i)} - \xi_\lambda)p_\lambda}{[\lambda(1-\lambda)]^{1/2}} \tag{40}$$

$$U_1 = \frac{n}{k}(X_{(i)} - X_{(i-k)}), \quad U_2 = \frac{n}{l}(X_{(i+l)} - X_{(i)})$$

arată că asimptotic U, U_1 şi U_2 sînt independente, U repartizată $N(0, 1)$, $U_1 \sim \chi^2(2k)$ şi $U_2 \sim \chi^2(2l)$. Astfel asimptotic

$$2np_\lambda(X_{(i+1)} - X_{(i-k)}) \sim \chi^2(2(k+l)) \tag{41}$$

şi independentă de $X_{(i)}$.

Block, Gastwirth (1968) arată că dacă k şi l sînt de ordinul lui n^α $(0 < \alpha < 1)$, atunci (41) este echivalent cu

$$\frac{np_\lambda(X_{(i+l)} - X_{(i-k)}) - (k+l)}{(k+l)^{1/2}} \sim N(0, 1).$$

§6. Repartiţia asimptotică a elementelor extreme

Pentru o repartiţie arbitrară, chiar după standardizare $X_{(n)}$, nu posedă, în general, o repartiţie limită.

Totuşi, dacă F este astfel încît repartiţia limită există, atunci această repartiţie limită trebuie să fie una din următoarele trei tipuri

$$\Lambda_1(x) = \begin{cases} \exp(-x^{-\alpha}) & , x > 0 \\ 0 & , x \leqslant 0, \alpha > 0 \end{cases}$$

$$\Lambda_2(x) = \begin{cases} \exp[-(-x)^\alpha], & x \leqslant 0, \quad \alpha > 0 \\ 1 & , x > 0 \end{cases} \tag{42}$$

$$\Lambda_3(x) = \exp(-e^{-x}) \quad , -\infty < x < \infty$$

Mai precis, are loc

Scanned with OKEN Scanner

TEOREMA 11 (Gnedenko (1943)). *Clasa repartiţiilor limită pentru* $F^n(a_n x + b)$, *unde* $a_n > 0$ şi b_n *sînt constante convenabil alese conţine numai repartiţii de tipul* $\Lambda_k(x)$ $(k = 1,2,3)$.

Nu demonstrăm această teoremă însă prezentăm ideea folosită de Fisher, Tippett (1928).

Deoarece elementul maximal într-o selecţie de volum nu poate fi privit ca elementul maximal într-o selecţie de n maxime în selecţii de volum m şi deoarece, dacă există o repartiţie limită de forma $\Lambda(x)$, amîndouă repartiţiile, pentru $m \to \infty$, vor tinde către $\Lambda(x)$, urmează că $\Lambda(x)$ trebuie să satisfacă relaţia

$$\Lambda^n(a_n x + b_n) = \Lambda(x), \tag{43}$$

adică, elementul maximal într-o selecţie de volum n asupra unei variabile aleatoare X de funcţie de repartiţie Λ, trebuie ca la aceeaşi standardizare folosită anterior, să aibe funcţia de repartiţie limită Λ. Soluţiile pentru Λ în această ecuaţie funcţională dau toate repartiţiile limită posibile.

Dacă în (43), $a_n \neq 1$, atunci $x = a_n x + b_n$ cînd $x = b/1 - a_n) = x_0$ şi $\Lambda^n(x_0) = \Lambda(x_0)$, adică $\Lambda(x_0) = 0$ sau 1. În presupunerea că există repartiţia limită $\Lambda(x)$, x_0 trebuie să fie o constantă care fără micşorarea generalităţii poate fi luată zero. Atunci, deoarece $x_0 = 1$ implică $b_n = 0$, soluţiile cad în trei clase

1. $\Lambda(x) = 0$, $x \leqslant 0$, $\Lambda^n(a_n x) = \Lambda(x)$, $x > 0$;

2. $\Lambda^n(a_n x) = \Lambda(x)$, $x \leqslant 0$, $\Lambda(x) = 1$, $x > 0$;

3. $\Lambda^n(x + b_n) = \Lambda(x)$.

Aceste clase corespund la $a_n > 1$, $a_n < 1$ şi $a_n = 1$. Urmează că orice soluţie a ecuaţiilor funcţionale 1—3 sînt respectiv de forma Λ_1, Λ_2 Λ_3.

Observaţie. Elementul maximal într-o selecţie de volum n asupra unei variabile avînd funcţia de repartiţie Λ_3 are o funcţie de repartiţie ce diferă de Λ_3 numai printr-o deplasare b_n către dreapta, unde b_n este dată de

$$\exp(-ne^{-x}) = \exp(-e^{-(x-b_n)}),$$

adică

$$b_n = \ln n$$

TEOREMA 12. (Gnedenko (1943)) (1) *F aparţine „domeniului de atracţie" al funcţiei Λ_1 dacă şi numai dacă*

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1 - F(x)}{1 - F(kx)} = k^{\alpha}$$

pentru orice $k > 0$.

Scanned with OKEN Scanner

(2) *F aparţine domeniului de atracţie al funcţiei Λ_2 dacă şi numai dacă*

i) *există x_0 astfel încît*

$$F(x_0) = 1 \quad \text{şi} \quad F(x_0 - \varepsilon) < 1$$

pentru fiecare $\varepsilon > 0$;

ii)
$$\lim_{x \to -0} \frac{1 - F(kx + x_0)}{1 - F(x + x_0)} = k^{\alpha}$$

pentru fiecare $k > 0$.

Observaţie. În (1) F este nelimitată la dreapta şi limitată în (2).

TEOREMA 13. (von Mises (1936)). *Presupunem că $F(x)$ este mai mică decît 1 pentru orice x finit, că este de două ori derivabilă (cel puţin pentru toţi x mai mari decît o valoare x_0 şi astfel încît*

(44)
$$\lim_{x \to \infty} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \left[\frac{1 - F(x)}{p(x)} \right] = 0$$

Atunci

(45)
$$\lim_{n \to \infty} P[(X_{(n)} - l_n)\, np(l_n) \leqslant u] = \Lambda_3(u)$$

are loc uniform pentru fiecare u din $(-\infty, \infty)$ unde l_n este dată de

$$F(l_n) = \frac{n-1}{n}.$$

Demonstraţie. Avem

$$P(X_{(n)} \leqslant l_n) = F_n(l_n) = F^n(l_n) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n,$$

astfel încît

$$\lim_{n \to \infty} F_n(l_n) = \mathrm{e}^{-1}.$$

Fie

(46)
$$x = l_n + \frac{u}{c_n},$$

unde c_n sînt constante convenabil alese. Atunci $F^n\left(l_n + \frac{u}{c_n}\right)$ are în $u = 0$ o limită definită, şi vom considera limita sa cînd u este orice constantă.

Scanned with OKEN Scanner

Din definiția lui l_n obținem

$$F(x) = 1 - \frac{1}{n} \cdot \frac{1 - F(x)}{1 - F(l_n)}.$$

Dacă raportul $[1 - F(x)] / [1 - F(l_n)]$, cînd $n \to \infty$, tinde către o limită finită, atunci

$$- \ln F_n(x) = - n \ln F(x) = \frac{1 - F(x)}{1 - F(l_n)} + 0\left(\frac{1}{n}\right),$$

astfel încît

$$\ln[- \ln F_n(x)] = \ln\{n[1 - F(x)]\} + 0\left(\frac{1}{n}\right). \tag{47}$$

Punînd

$$G_n(x) = \ln\{n[1 - F(x)]\},$$

(47) se scrie

$$\lim_{n\to\infty} \ln[- \ln F_n(x)] = \lim_{n\to\infty} G_n(x) = - \lim_{n\to\infty} \int_{l_n}^{x} g(t)\,dt, \tag{48}$$

deoarece $G_n(l_n) = 0$, unde

$$g(x) = - G_n'(x) = \frac{p(x)}{1 - F(x)}.$$

Luăm c_n din (46)

$$c_n = g(l_n) = np(l_n)$$

și exprimăm pe $G_n(x)$ în felul următor:

$$G_n(x) = \int_x^{l_n} g(t)dt = (l_n - x)g(\xi), \qquad x < \xi < l_n.$$

Atunci

$$G_n\left(l_n + \frac{u}{c_n}\right) = - u \frac{g(\xi)}{g(l_n)}. \tag{49}$$

Scanned with OKEN Scanner

Arătăm că

$$\lim_{n\to\infty} \frac{g(\xi)}{g(l_n)} = 1$$

cînd u variază în intervalul finit $(-u_0, u_0)$

$$\xi \to \infty \text{ cînd } n \to \infty.$$

Dezvoltînd $1/g(\xi)$ în serie Taylor în jurul punctului $\xi = l_n$ și multiplicînd prin $g(l_n)$ obținem:

$$\frac{g(l_n)}{g(\xi)} = 1 + g(l_n)(\xi - l_n)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{1}{g(x)}\right]_{x=\xi_1}, \quad \xi < \xi_1 < l_n. \tag{50}$$

Din (46)

$$|g(l_n)(\xi - l_n)| < u_0.$$

De asemenea, cînd n crește, $\xi_1 \to \infty$ deoarece $\xi \to \infty$, astfel că prin ipoteză ultimul termen din (50) tinde către zero. Deci $g(l_n)/g(\xi) \to 1$ cînd $n \to \infty$. Din (49) și (48) urmează că

$$\lim_{n\to\infty} \ln\left[-\ln F_n\left(l_n + \frac{u}{np(l_n)}\right)\right] = -u$$

uniform pentru fiecare u în (u_0, u_0), sau

$$\lim_{n\to\infty} F_n\left(l_n + \frac{u}{np(l_n)}\right) = \mathrm{e}^{-\mathrm{e}^{-u}}$$

ceea ce demonstrează teorema; convergența uniformă se extinde la $(-\infty, +\infty)$ deoarece fiecare funcție de repartiție F_n și de asemenea $\mathrm{e}^{-\mathrm{e}^{-u}}$ tind uniform către 0(1) cînd $u \to -\infty$ $(u \to \infty)$.

Pentru elementul minimal standardizat au loc rezultate similare. Următoarele trei tipuri de repartiții limită corespunzătoare relațiilor (42) sînt

$$\Lambda_1'(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 1 - \exp[-(-x)^{-\alpha}] & x \leqslant 0,\ \alpha < 0 \end{cases}$$

$$\Lambda_2'(x) = \begin{cases} 0 & x \leqslant 0,\ \alpha > 0 \\ 1 - \exp(-x^{\alpha}) & x > 0 \end{cases}$$

$$\Lambda_3'(x) = 1 - \exp(-\mathrm{e}^{x}) \qquad -\infty < x < \infty.$$

Fie $X_1, X_2, \ldots$ variabile aleatoare independente identic repartizate cu $M(X_1) = 0$, $M(X_1^2) = 1$. Are loc

Scanned with OKEN Scanner

TEOREMA 14. (Berman (1963)). *Dacă pentru şirurile* $\{a_n\}$ şi $\{b_n\}$ $(a_n > 0)$ *elementul maximal normat* $(X_{(n)} - b_n)/a_n$ *are o repartiţie limită* Λ, *atunci abaterea maximă studentizată normalizată*

$$\left(\frac{X_{(n)} - \bar{X}}{S} - b_n\right)/a_n \tag{51}$$

are de asemenea repartiţia limită Λ, *dacă*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{n^{1/2}a_n} = 0.$$

Observaţie. Această condiţie are loc în cazul repartiţiei normale cînd

$$a_n = (2\ln n)^{-1/2}, \quad b_n = (2\ln n)^{1/2}$$

şi este implicată de teorema 13.

TEOREMA 15. (Berman (1963)). *Dacă* p *este simetrică şi sînt satisfăcute condiţiile teoremei* 14, *atunci*

$$\left(\max\left|\frac{X_i - \bar{X}}{S}\right| - b_n\right)/a_n \tag{52}$$

are repartiţia limită $\Lambda^2(x)$.

TEOREMA 16. *Variabilele aleatoare*

$$U = nF(X_{r:n}) \text{ şi } V = n[1 - F(X_{s:n})] \tag{53}$$

sînt independente, $U \sim \Gamma(r)$, *respectiv* $V \sim \Gamma(n - s + 1)$.

Demonstraţie. Densitatea de repartiţie a vectorului (U,V) după (12) este

$$f(u,v) = \frac{n!}{(r-1)!\,(s-r-1)!\,(n-s)!}\left(\frac{u}{n}\right)^{r-1}\left(1 - \frac{u}{n} - \frac{v}{n}\right)^{s-r-1}\left(\frac{v}{n}\right)^{n-s}\frac{1}{n^2}$$

$$u \geqslant 0,\ v \geqslant 0,\ u + v \leqslant n.$$

Făcînd pe $n \to \infty$, însă păstrînd pe r şi $n - s + 1$ fixate, rezultă teorema.

Observaţie. Astfel orice element, extrem *inferior* $X_{r:n}$ este asimptotic independent de orice element extrem *superior* $X_{s:n}$.

TEOREMA 17. (Gumbel (1947), Cox (1948)). *Dacă* X *are o repartiţie simetrică ce satisface* (44) *atunci amplitudinea redusă*

$$W' = (W - 2l_n)np(l_n) \tag{54}$$

are repartiţia limită cu densitatea

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-w' - e^{-w'-z} - e^{-z})\,dz = 2e^{-w'}K_0\left(2e^{-\frac{1}{2}w'}\right) \tag{55}$$

unde $K_0(x)$ *este funcţia Bessel modificată de al doilea tip.*

Scanned with OKEN Scanner

Demonstrație. Din ipoteză $Y = (X_{(n)} - l_n)np(l_n)$ are funcția de repartiție limită Λ_3 și prin simetria și $-Z$, unde Z este

$$Z = (X_{(1)} - l_1)np(l_1),\ l_1 = -l_n.$$

Din independența asimptotică a variabilelor Y și Z urmează că repartiția lor asimptotică este

$$\exp(-y - e^{-y} + z - e^{z}),$$

ceea ce demonstrează teorema.

Observație. Gumbel (1949) folosește această teoremă pentru construcția de tabele pentru densitatea și funcția de repartiție a statisticii W'.

§7. Repartiția asimptotică a funcțiilor liniare de statisticile de ordine

Din normalitatea asimptotică a cuantilelor (teorema 10) urmează că funcțiile liniare de un număr finit de astfel de cuantile trebuie să aibe asimptotic o repartiție normală. Pe de altă parte extremele $X_{i:n}$ cu $\frac{i}{n} \to 0,1$ nu au asimptotic o repartiție normală. Media de selecție $\bar{X}$, care poate fi scrisă ca $\frac{1}{n}\sum_1^n X_{i:n}$, în presupunerea ca X_i are dispersia finită, are asimptotic o repartiție normală cu toate că conține extremele. Se pune următoarea întrebare: În ce condiții

$$T_n = \sum_1^n C_{in} X_{i:n} \tag{56}$$

are la limită o repartiție normală? Această întrebare își are motivarea în lucrarea lui Jung (1955) care caută ponderile optime pentru T_n în scopul estimării parametrilor de poziție și de împrăștiere.

Pentru ca T_n să fie asimptotic repartizată normală trebuie impuse condiții atît asupra coeficienților c_{in} cît și asupra funcției de repartiție F.

Observație. Deoarece media de selecție este asimptotic repartizată normal dacă $\sigma^2 < \infty$, urmează că și

$$\sum_{[n\lambda]}^{[n(1-\lambda)]} \frac{X_{i:n}}{n(1-2\lambda)}, \qquad 0 \leqslant \lambda < \frac{1}{2} \tag{57}$$

este repartizată normal.

T_n poate fi scrisă

$$T_n = \frac{1}{n}\sum_1^n J\left(\frac{i}{n}\right) X_{i:n}, \tag{56'}$$

unde $J(u)$ este o funcție de $u (0 \leqslant u \leqslant 1)$ astfel încît $J\left(\frac{i}{n}\right) = nc_{in}$.

Scanned with OKEN Scanner

De asemenea T_n poate fi exprimată ca o integrală Stieltjes

$$T_n = \int_{-\infty}^{\infty} x J(F_n(x))\, \mathrm{d}F_n(x). \tag{56''}$$

Jung (1955) găseşte media şi dispersia asimptotică a statisticii T_n cînd J are primele patru derivate mărginite.

Chernoff, Gastwirth, Johns (1967) au arătat că în anumite condiţii

$$n^{1/2}\left[T_n - \int_{-\infty}^{\infty} x J(F(x))\, \mathrm{d}F(x)\right] \tag{58}$$

converge în repartiţie către o variabilă $N(0, \sigma^2)$, unde

$$\sigma^2 = 2 \iint_{s<t} J(F(s))\, J(F(t))\, F(s)[1 - F(t)]\mathrm{d}s\mathrm{d}t. \tag{59}$$

Fie G orice inversă a funcţiei F.

Teorema 18 (Moore (1968)). *Dacă* $\sigma^2 < \infty$ *şi*

$$M(|X_1|) = \int_0^1 |G(u)|\, \mathrm{d}u < \infty \tag{A}$$

(B) *J este continuă pe* $[0,1]$ *cu excepţia salturilor în* $a_1, \ldots, a_M$ *şi J' este continuă şi cu variaţie mărginită pe* $[0,1] - \{a_1, \ldots, a_M\}$, *atunci (58) are loc.*

§8. Margini pentru momentele statisticilor de ordine

Fie $X_1, \ldots, X_n$ o selecţie asupra unei variabile aleatoare X continuă cu funcţia de repartiţie F strict crescătoare şi μ (σ^2) media (dispersia) variabilei aleatoare X.

Teorema 19 (Gumbel (1954); Hartley, David (1954)). *Avem*

$$M(X_{(n)}) \leqslant \mu + \frac{(n-1)\sigma}{(2n-1)^{1/2}} \tag{60}$$

$$M(X_{(1)}) \geqslant \mu - \frac{(n-1)\sigma}{(2n-1)^{1/2}}.$$

Demonstraţie. Avem

$$M(X_{(n)}) = \int_{-\infty}^{\infty} n x [F(x)]^{n-1} \mathrm{d}F(x)$$

sau considerînd transformarea $u = F(x)$

$$M(X_{(n)}) = \int_0^1 n x(u) u^{n-1} \mathrm{d}u \tag{61}$$

Scanned with OKEN Scanner

unde $x(u)$ arată că x este exprimat cu funcţie de u. Considerăm variabila X standardizată, adică

$$\int_0^1 x(u)\mathrm{d}u = 0, \quad \int_0^1 [x(u)]^2\mathrm{d}u = 1. \tag{62}$$

Putem găsi extremala $x(u)$ care dă valorile staţionare ale funcţiei (61) supuse la condiţia (62), obţinînd mai întîi extremala necondiţionată pentru

$$\int_0^1 \left(nxu^{n-1} - ax - \frac{1}{2}bx^2\right)\mathrm{d}u$$

şi atunci determinînd constantele a şi b astfel încît să fie satisfăcut (62).

Soluţia staţionară este dată de

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(nxu^{n-1} - ax - \frac{1}{2}bx^2\right) = 0$$

adică

$$bx = nu^{n-1} - a,$$

unde

$$\int_0^1 \left(nu^{n-1} - a\right)\mathrm{d}u = 0, \qquad \int_0^1 \left(nu^{n-1} - a\right)^2 \mathrm{d}u = b^2.$$

Astfel $a = 1$, $b = (n-1)/(2n-1)^{1/2}$,

$$x(u) = \frac{(2n-1)^{1/2}(nu^{n-1} - 1)}{n-1} \tag{63}$$

şi pentru acest extremal

$$M(X_{(n)}) = \frac{n(2n-1)^{1/2}}{n-1}\int_0^1 u^{n-1}(nu^{n-1} - 1)\,\mathrm{d}u = \frac{n-1}{(2n-1)^{1/2}}.$$

Pentru a arăta că (63) conduce la un maxim al $M(X_{(n)})$ şi nu la un punct staţionar folosim inegalitatea lui Schwarz

$$\int fg\,\mathrm{d}u \leqslant \left[\left(\int f^2\,\mathrm{d}u\right)\left(\int g^2\mathrm{d}u\right)\right]^{1/2}$$

cu

$$f = x, \qquad g = nu^{n-1} - 1.$$

Obţinem

$$M(X_{(n)}) \leqslant \left[1 \cdot \int_0^1 (n^2u^{2n-2} - 2nu^{n-1} + 1)\mathrm{d}u\right]^{1/2},$$

şi deci

$$M(X_{(n)}) \leqslant \frac{n-1}{(2n-1)^{1/2}}. \tag{64}$$

Scanned with OKEN Scanner

Egalitatea are loc cînd $x(u)$ este dat de (63), sau cînd

$$u = F(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{1+bx}{n}\right)^{1/(n-1)} - \frac{(2n-1)^{1/2}}{n-1} \leqslant x \leqslant (2n-1)^{1/2}, \tag{65}$$

şi densitatea de repartiţie corespunzătoare

$$p(x) = \frac{b}{n}\left(\frac{1+bx}{n}\right)^{1\,(n-1)\,-\,1} - \frac{(2n-1)^{1/2}}{n-1} \leqslant x \leqslant (2n-1)^{1/2}. \tag{66}$$

Dacă media şi dispersia variabilei X sînt μ şi respectiv σ^2, atunci (64) devine (60), ceea ce demonstrează teorema.

Observaţie. Pentru clasa repartiţiilor simetrice (după ce luăm $\mu = 0$), $F(x) = 1 - F(-x)$ şi

$$\begin{aligned} M(X_{(n)}) &= \int_0^\infty nx\{[F(x)]^{n-1} - [1-F(x)]^{n-1}\}\mathrm{d}F(x) = \\ &= \int_{1/2}^1 nx[u^{n-1} - (1-u)^{n-1}]\,\mathrm{d}u. \end{aligned} \tag{67}$$

Aplicînd raţionamentul anterior relaţiei (67), obţinem extremala

$$cx(u) = u^{n-1} - (1-u)^{n-1} \tag{68}$$

unde

$$c = \left[\frac{2(1 - 1/C_{2n-2}^{n-1})}{2n-1}\right]^{1/2}$$

şi inegalitatea

$$M(X_{(n)}) \leqslant \frac{1}{2}nc. \tag{69}$$

Teorema 20. (Hartley, David (1954)). *Avem*

$$|M(X_{(r)})| \leqslant \left(n \cdot \frac{C_{2n-2r}^{n-r}\, C_{2r-2}^{r-1}}{C_{2n-1}^{n-1}} - 1\right)^{1/2}. \tag{70}$$

Demonstraţia rezultă din

$$M(X_{(r)}) = \int_0^1 x(u) i_u \mathrm{d}u, \tag{71}$$

unde

$$i_u = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u} I_u(r, n-r+1) = \frac{n!}{(r-1)!\,(n-r)!}\, u^{r-1}(1-u)^{n-r} \tag{72}$$

şi din condiţia (62)

Scanned with OKEN Scanner

TEOREMA 21. (Ludwig (1960)). *Pentru* $s > r$

$$M(X_{(s)} - X_{(r)}) \leqslant \frac{2n}{C_{2n}^{n}} (C_{2s-2}^{s-1} C_{2n-2s}^{n-s} + C_{2r-2}^{r-r} C_{2n-2r}^{n-r} - 2C_{r+s-2}^{r-1} C_{2n-r-s}^{n-s})^{1/2}, \tag{73}$$

Demonstraţia rezultă din inegalitatea lui Schwarz cu

$$f = x,\ g = i_u(s, n - s + 1) - i_u(r, n - r + 1).$$

Observaţii. i) Valorile numerice ale marginilor în (70) şi (73) pentru $n \leqslant 10$ sînt date de Ludwig (1959).

ii) Moriguti (1953) arată că aceste margini sînt atinse numai pentru extreme, adică pentru $r = n$ sau 1 în (70) şi $r = 1$, $s = n$ în (73).

iii) (71) se poate scrie sub forma

$$M(X_{(r)}) = \int_0^1 x(u)\mathrm{d}I_u(r, n - r + 1). \tag{74}$$

Înlocuim I_u prin $\bar{I}_u$ cel mai mare minorant convex în intervalul (0,1), adică $\bar{I}_u$ este supremum tuturor funcţiilor dominate de I_u, $0 \leqslant u \leqslant 1$. Se poate arăta că $\bar{I}_u$ este continuă şi are o derivată la dreapta $\bar{i}_u$ care este continuă cu excepţia unei mulţimi nenumărabilă de valori ale lui u. Deoarece $\bar{I}_u$ este nedescrescătoare şi $\bar{I}_0 = 0$, $\bar{I}_1 = 1$, este o funcţie de repartiţie şi anume funcţia de repartiţie a unei variabile stochastic mai mare decît $X_{(r)}$. Urmează că

$$M(X_{(r)}) \leqslant \int_0^1 x(u)\mathrm{d}\bar{I}_u = \int_0^1 x(u)\bar{i}_u \mathrm{d}u. \tag{75}$$

Deoarece integrînd prin părţi

$$M(X_{(r)}) - \int_0^1 x(u)\mathrm{d}\bar{I}_u = \int_0^1 x(u)\mathrm{d}(I_u - \bar{I}_u) = -\int_0^1 (I_u - \bar{I}_u)\mathrm{d}x(u),$$

urmează că (75) se transformă în egalitate numai dacă $x(u)$ este constantă ori de cîte ori $I_u > \bar{I}_u$ şi că

$$M(X_{(r)} - \mu) \leqslant \int_0^1 x(u)(\bar{i}_u - 1)\mathrm{d}u = \int_0^1 [x(u) - \mu](\bar{i}_u - 1)\mathrm{d}u \leqslant$$

$$\leqslant \left\{\int_0^1 [x(u) - \mu]^2 \mathrm{d}u \int_0^1 (\bar{i}_u - 1)^2 \mathrm{d}u\right\}^{1/2}. \tag{76}$$

Astfel

$$\frac{M(X_{(r)} - \mu)}{\sigma} \leqslant \left[\int_0^1 (\bar{i}_u - 1)^2 \mathrm{d}u\right]^{1/2}. \tag{77}$$

Scanned with OKEN Scanner

Pentru a determina $\bar{I}_u$ considerăm figura 3, în care curba trasată continuu reprezintă I_u ca funcţie de u. Cel mai mare minorant convex $\bar{I}_u$ este iniţial egal cu I_u iar apoi continuă cu linia punctată XZ, tangenta

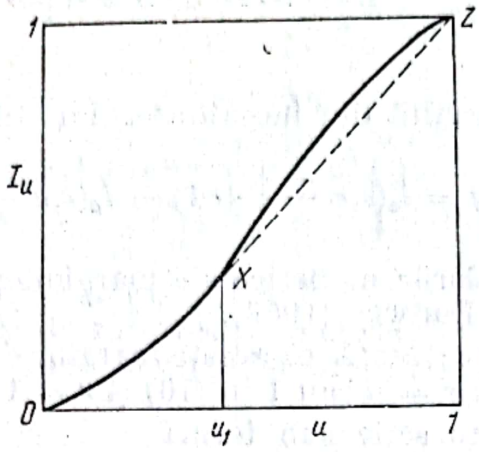


Fig. 3

din Z la graficul funcţiei I_u. Valoarea u_1 a lui u în punctul de contact X satisface relaţia

$$1 - I_{u_1} = i_{u_1}(1 - u_1),$$

adică

$$1 - I_{u_1} = \frac{n!}{(r-1)!\,(n-r)!} u_1^{r-1}(1-u_1)^{n-r+1} \tag{78}$$

care poate fi rezolvată numeric.

$\bar{i}_u$ este dat de

$$\bar{i}_u = \begin{cases} i_u, & 0 \leqslant u < u_1 \\ i_{u_1}, & u_1 \leqslant u \leqslant 1 \end{cases} \tag{79}$$

astfel încît marginea superioară din (75) poate fi calculată. (76) se transformă în egalitate cînd

$$x(u) - \mu \simeq \bar{i}_u - 1,$$

astfel încît $x(u)$ este constantă pentru $u_1 \leqslant u \leqslant 1$, care transformă şi (75) în egalitate.

Astfel (77) se transformă în egalitate pentru $x(u) - \mu = c(\bar{i}_u - 1)$, unde c este o constantă.

§9. Margini şi sisteme ortonormale

Urmînd Sugiura ((1962, (1964)), fie $\{\psi_k(u)\}$ $(k = 0,1,2,\ldots)$ un sistem ortonormal pe intervalul (0,1), adică $\psi_0(u) = 1$ şi pentru toţi întregii pozitivi k, k' $(k' \neq k)$

$$\int_0^1 \psi_k(u)\mathrm{d}u = 0, \quad \int_0^1 \psi_k^2(u)\mathrm{d}u = 1, \quad \int_0^1 \psi_k(u)\psi_{k'}(u)\mathrm{d}u = 0.$$

Fie

$$a_k = \int_0^1 f(u)\psi_k(u)\mathrm{d}u, \quad b_k = \int_0^1 g(u)\psi_k(u)\mathrm{d}u,$$

Scanned with OKEN Scanner

unde f şi g sînt funcţii de pătrat integrabil pe (0,1). Atunci după inegalitatea lui Schwarz

$$\left|\int\left(f-\sum_0^m p_k\psi_k\right)\left(g-\sum_0^m g_k\psi_k\right)du\right| \leqslant$$

$$\leqslant\left\{\int\left(f-\sum_0^m a_k\psi_k\right)^2 du.\int\left(g-\sum_0^m b_k\psi_k\right)^2 du\right\}^{1/2},$$

care se reduce la

$$\left|\int fg\,du-\sum_0^m a_k b_k\right| \leqslant\left(\int f^2\,du-\sum_0^m a_k^2\right)^{1/2}\left(\int g^2 du-\sum_0^m b_k^2\right)^{1/2}. \tag{80}$$

Egalitatea are loc dacă

$$f-\sum_0^m a_k\psi_k \simeq g-\sum_0^m b_k\psi_k.$$

Astfel $\sum_0^m a_k b_k$ constituie o aproximaţie pentru $\int fgdu$ a cărei eroare maximă este funcţie numai de coeficienţii a_k, b_k $(k=0,1,2,\ldots,m)$ folosiţi în aproximaţie. Dacă $\{\psi_k\}$ este un sistem ortonormal complet, atunci

$$\sum_0^\infty a_k^2=\int f^2 du \quad \text{şi} \quad \sum_0^\infty b_k^2=\int g^2\,du.$$

Prin urmare membrul drept al relaţiei (80), cînd $m\to\infty$, converge către 0, şi aproximaţia poate fi făcută oricît de bună dorim.

Teorema 22. *Fie $u=F(x)$ o funcţie de repartiţie (strict crescătoare) continuă a unei variabile aleatoare standardizate şi fie*

$$\psi_0=1, \quad \psi_1,\ldots,\psi_m$$

un sistem ortonormal pe (0,1). *Dacă*

$$a_k=\int_0^1 x(u)\psi_k(u)du,\ b_k=\frac{1}{B(r,n-r+1)}\int_0^1 u^{r-1}(1-u)^{n-r}\psi_k(u)du,$$

atunci

$$\left|M(X_{r:n})-\sum_1^m a_k b_k\right| \leqslant\left(1-\sum_1^m a_k^2\right)^{1/2}\times$$

$$\times\left\{\frac{B(2r-1,2n-2r+1)}{[B(r,n-r+1)]^2}-1-\sum_1^m b_k^2\right\}^{1/2}. \tag{81}$$

Demonstraţie. În (80) luăm

$$f=x(u),\ g=\frac{1}{B(r,n-r+1)}u^{r-1}(1-u)^{n-r}. \tag{82}$$

Teorema rezultă deoarece $a_0=0$, $b_0=1$ şi

$$\int fgdu=M(X_{r:n}),\ \int f^2du=1,\ \int g^2du=\frac{B(2r-1,2n-2r+1)}{[B(r,n-r+1)]^2}. \tag{83}$$

Scanned with OKEN Scanner

Exemplul 2. Şirul de polinoame Legendre (ajustat la (0,1))

$$L_k(u) = \frac{(2k+1)^{1/2}}{k!}\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}u^k}u^k(u-1)^k, \qquad k = 0,1,2,\ldots.$$

este un sistem ortonormal complet pe (0,1).

PROPOZIŢIA 1. *În clasa funcţiilor i) pare (ii) impare) de pătrat integrabile pe* (0,1) *sistemele ortnormale complete sînt date de funcţiile Legendre*

$$\text{(84)} \qquad \text{i)} \quad \{L_{2k}(u)\} \ ((\text{ii}) \quad \{L_{2k+1}(u)\}), \qquad k = 0,1,2,\ldots$$

TEOREMA 23. *În cazul în care F este funcţia de repartiţie a unei variabile standardizate simetrică* :

$$\text{(85)} \qquad \left| M(X_{r:n}) - \sum_0^m a_{2k+1}b_{2k+1} \right| \leqslant \left(1 - \sum_0^m a_{2k+1}^2\right)^{1/2} \times$$
$$\times \left[\frac{[B(2r-1, 2n-2r+1) - B(n,n)}{2B^2(r,n-r+1)} - \sum_0^m b_{2k+1}^2 \right]^{1/2};$$

Demonstraţie. Din presupunerile asupra funcţiei $u = F(x)$, funcţia inversă $x(u)$ este impară şi de pătrat integrabilă pe (0,1). Atunci, deoarece

$$L_k(1-u) = (-1)^k L_k(u),$$

$$a_{2k} = \int_0^1 x(u)L_{2k}(u)\mathrm{d}u = \int_0^1 - x(1-u)L_{2k}(1-u)\mathrm{d}u =$$

$$= -\int_0^1 x(v)L_{2k}(v)\mathrm{d}v, \quad v = 1-u = -a_{2k}.$$

Astfel $a_{2k} = 0$.

Cu f şi g ca în (82) din (80) cu $k = 1,3,\ldots,2m+1$, $0,2,4,6,\ldots$ obţinem

$$\text{(86)} \qquad \left| \int fg\mathrm{d}u - \sum_0^m a_{2k+1}b_{2k+1} \right| \leqslant$$
$$\leqslant \left(\int f^2\mathrm{d}u - \sum_0^m a_{2k+1}^2 \right)^{1/2} \left(\int g^2\,\mathrm{d}u - \sum_0^m b_{2k+1}^2 - \sum_0^\infty b_{2k}^2 \right)^{1/2}.$$

Pentru a evalua termenul $\sum b_{2k}^2$ ce reprezintă reducerea în marginea superioară datorită simetriei, fie

$$g^*(u) = \frac{1}{B(r,n-r+1)}u^{n-r}(1-u)^{r-1}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Atunci

$$b_{2k} = \int g L_{2k} \mathrm{d}u = \frac{1}{2} \int (g + g^*) L_{2k} \, \mathrm{d}u.$$

Deoarece $g(u) + g^*(u)$ este o funcție pară de pătrat integrabilă pe (0,1) din i) (84) urmează că

$$\sum_0^\infty b_{2k}^2 = \frac{1}{4} \int [g(u) + g^*(u)]^2 \mathrm{d}u =$$

$$= \frac{1}{2B^2(r, n - r + 1)} [B(2r - 1, 2n - 2r + 1) + B(n,n)].$$

Ținînd seama de această expresie și (83) în (86), obținem (85).

Probleme

1. Dacă $u = F(x)$ este simetrică, să se arate că

$$|M(X_{(r)})| \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}\, B(r, n - r + 1)} [B(2r - 1, 2n - 2r + 1) - B(n, n)]^{1/2}$$

egalitatea avînd loc dacă și numai dacă

$$x(u) = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} [B(2r - 1, 2n - 2r + 1) - B(n, n)]^{-1/2} [u^{r-1}(1 - u)^{n-r} - u^{n-r}(1 - u)^{r-1}].$$

Sugiura (1962)

2. Să se arate că pentru orice variabilă aleatoare X cu dispersia σ^2 finită

$$M(X_{(r)} - X_{(n-r+1)}) \leqslant \sigma \left\{ \int_0^1 [\bar{\psi}(u)]^2 \, \mathrm{d}u \right\}^{1/2}, \quad r > \left[\frac{1}{2} n \right]$$

unde

$$\bar{\psi}(u) = \begin{cases} -\psi(u_1) & 0 \leqslant u < 1 - u_1, \\ \psi(u) & 1 - u_1 \leqslant u \leqslant u_1, \\ \psi(u_1) & u_1 \leqslant u < 1, \end{cases}$$

$$\psi(u) = \frac{n!}{(r-1)!\,(n-r)!} [u^{r-1}(1 - u)^{n-r} - u^{n-r}(1 - u)^{r-1}],$$

și u_1 este determinat de

$$(1 - u_1)\, \psi(u_1) = \int_{u_1}^1 \psi(u) \, \mathrm{d}u, \quad \frac{1}{2} < u_1 < 1$$

Mariguti (1953)

Scanned with OKEN Scanner

3. Să se arate că pentru orice repartiție

$$\sum_{i=1}^{n} (i-1)^{(k)} (n-i)^{(l)} \mu_{i:n} = k!\, l!\, C_n^{k+l+1} \mu_{k+1;k+l+1}$$

$$\sum_{i=1}^{n} (i-1)^{(k)} (n-i)^{(l)} \mu_{ii:n} = k!\, l!\, C_n^{k+l+1} \mu_{k+1,k+1;k+l+1}$$

$$\sum_{i<j} \sum (i-1)^{(k)} (n-j)^{(l)} \mu_{ij:n} = k!\, l!\, C_n^{k+l+2} \mu_{k+1,k+2,k+l+2}$$

Downton (1966)

4. Să se arate că pentru orice repartiție și $n \geqslant m$

$$C_n^m \mu_{r:m} = \sum_{i=0}^{n-m} C_{n-r-i}^{m-r} C_{n+i-1}^{i} \mu_{r+i:n}$$

Sillitto (1964)

5. Să se arate că pentru orice variabilă aleatoare cu funcția de repartiție F având medie, $\mu_{r:n}$ poate fi exprimat ca

$$\mu_{r:n} = \sum_{j=0}^{n-1} C_j \varnothing_j(r:n), \quad r = 1, 2, \ldots, n$$

unde

$$\varnothing_j(r:n) = \frac{(j!)^3}{(2j)!} \sum_{i=0}^{j} (-1)^i C_{r-1}^{j-i} C_{2j-1}^{j} C_{n-j+i-1}^{i}$$

și

$$C_j = \frac{n!}{(n+j)!} \frac{(2j+1)!}{(j!)^2} \int_{-\infty}^{\infty} L_j[2P(x)-1]x \, dF(x),$$

$L_j(z)$ fiind polinomul Legendre de ordin j în z.

Saw, Chow (1966), Ruben (1956)

6. Fie $(X_1, Y_1), \ldots, (X_n, Y_n)$ o selecție asupra unui vector $N(\mu, \Sigma)$, $\mu' = (\mu_x, \mu_y)$, $\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_x^2 & \rho\sigma_x\sigma_y \\ & \sigma_y^2 \end{pmatrix}$ și $X_{(1)}, X_{(2)}, \ldots, X_{(n)}$ statisticile de ordine corespunzătoare primei componente a punctelor de selecție. De asemenea notăm prin

$$Y_{[1]}, Y_{[2]}, \ldots, Y_{[n]}$$

Y-cii asociați statisticilor $X_{(1)}, X_{(2)}, \ldots, X_{(n)}$.

Să se arate că pentru $r, s = 1, 2, \ldots, n$

$$M(Y_{[r]}) = \mu_y + \rho\sigma_y \mu_{r:n}$$

$$D^2(Y_{[r]}) = (1-\rho^2)\sigma_y^2 + \rho^2\sigma_y^2\sigma_{r:n}^2$$

$$\operatorname{cov}(X_{(r)}, Y_{[s]}) = \rho\sigma_x\sigma_y\sigma_{rs:n},$$

$$\operatorname{cov}(Y_{[r]}, Y_{[s]}) = \rho^2\sigma_y^2\sigma_{rs:n}, \quad r \neq s,$$

unde $\mu_{r:n}$, $\sigma_{rs:n}$ se referă la o variabilă $N(0, 1)$.

Watterson (1959)

Scanned with OKEN Scanner

7. Fie $X_1, X_2, \ldots, X_n$ o selecție asupra unei variabile aleatoare X cu funcția de repartiție F și densitatea de repartiție p, p continuă și strict pozitivă pe $\{x \mid 0 < F(x) < 1\}$. Presupunem că

$$M(X_{i:n}^2) + M(X_{j:n}^2) < \infty.$$

Să se arate că

$$\operatorname{cov}(X_{i:n}, X_{j:n}) \geqslant 0.$$

Indicație. Este suficient să se arate că $M(X_{j:n} | X_{i:n})$ este o funcție continuă monoton crescătoare de $X_{i:n}$ ținînd seama de următoarea lemă: Dacă X și Y sînt variabile aleatoare astfel încît $M(X^2) + M(Y^2) < \infty$ și $M(Y/X)$ este o funcție crescătoare de X, atunci $\operatorname{cov}(X, Y) \geqslant 0$.

Bickel (1967), Tukey (1958)

8. Pentru repartiția Cauchy de densitate

$$p(x) = \frac{1}{\pi(1 + x^2)} \qquad -\infty < x < \infty$$

să se arate că pentru $r = 3, 4, \ldots, n-2$

$$\sigma_{r:n}^2 = \frac{n}{\pi}(\mu_{r:n-1} - \mu_{r-1:n-1}) - 1 - \mu_{r:n}^2$$

Barnett (1966)

9. Să se arate că densitatea de repartiție a medianei într-o selecție de volum $n = 2k + 1$ asupra unei variabile Cauchy de densitate

$$p(x) = \frac{1}{\pi[1 + (x - \theta)^2]}, \qquad -\infty < x < \infty$$

este

$$f_{k+1,n}(x) = \frac{n!}{(k!)^2\pi}\left[\frac{1}{4} - \frac{1}{\pi^2}\operatorname{arc\,tg}^2(x - \theta)\right]^k \cdot \frac{1}{1 + (x - \theta)^2}$$

și că dispersia medianei este

$$\frac{2n!}{(k!)^2\pi^n}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} (\pi - y)^k y^k \operatorname{ctg}^2 y \, dy \quad \text{(finită pentru } k \geqslant 2)$$

Rider (1960)

10. Să se arate că într-o selecție de volum n asupra unei variabile aleatoare X continui

$$\sum_{r=1}^{n-1}\sum_{s=r+1}^{n} M(X_{r:n}^k X_{s:n}^l) = C_n^2 M(X_{1:2}^k X_{2:2}^l)$$

Govindarajulu (1963)

11. Să se arate că într-o selecție asupra unei variabile aleatoare continui cu funcția de repartiție F

a) $M[X_{s:n}F(X_{r:n})] = \dfrac{r}{n+1}\mu_{s+1:n+1} \quad r \leqslant s,$

b) $M[X_{r:n}F(X_{s:n})] = \mu_{r:n} - \dfrac{n+1-s}{n+1}\mu_{r:n+1} \quad r < s.$

Govindarajulu (1968)

Scanned with OKEN Scanner

12. Să se arate că pentru o selecție de volum n asupra unei variabile aleatoare X continui cu funcția de repartiție F

$$M(X_{r+1:n} - X_{r:n}) = C_n^r \int_{-\infty}^{\infty} [F(x)]^r [1 - F(x)]^{n-r} \, dx$$

$$r = 1, 2, \ldots, n-1$$

Galton (1902), Pearson (1902)

13. Fie X o variabilă aleatoare discretă care poate lua valorile $x = 0, 1, 2, \ldots, c$, unde c este un întreg pozitiv sau $+\infty$. Să se arate că densitatea de repartiție a amplitudinii unei selecții de volum n este dată de

$$f(w) = \sum_{x=0}^{c-w} \{[P(x+w) - P(x-1)]^n - [P(x+w) - P(x)]^n -$$

$$- [P(x+w-1) - P(x-1)]^n + [P(x+w-1) - P(x)]^n\}, \quad w > 0,$$

$$= \sum_{x=0}^{c} [p(x)]^n$$

Abdel—Aty (1954), Burr (1955), Siotani (1957)

14. Dacă punctele $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sînt alese aleator și independent din intervalul $0 \leqslant x \leqslant L$ și dacă

$$D = \min_j |X_i - X_j| \quad \text{pentru } i \text{ fixat},$$

să se arate că funcția de repartiție a variabilei D este

$$F(d) = \begin{cases} 1 - \left[1 - \left(\dfrac{2d}{L}\right)\right]^n + \dfrac{2\{[1-(d/L)]^n - [1-(2d/L)]^n\}}{n}, & 0 \leqslant d \leqslant \dfrac{1}{2} L \\ 1 - (2/n)\,[1 - (d/L)]^n \end{cases}$$

Halperin (1960)

15. Să se arate că într-o selecție de volum $2m+1$ (m-întreg) asupra unei variabile continui cu o funcție de repartiție $P(x)$ $(0 \leqslant a \leqslant x \leqslant b)$, densitatea de repartiție a variabilei $Z = X_{(2m+1)}/X_{(m+1)}$ este

$$f(z) = \frac{(2m+1)!}{m!\,(m-1)!} \int_a^{b/z} x P^m(x) \, [P(zx) - P(x)]^{m-1} p(x)\, p(zx)\, dx.$$

Morrison, Tobias (1965)

16. Fie $X_{(n_1)}$, $Y_{(n_2)}$ elementele maximale în selecții independente de volum n_1 și respectiv n_2 $(n_1 + n_2 = N)$ asupra unei variabile repartizate uniform $R(0, c)$. Să se arate că densitatea de repartiție a variabilei $X_{(n_1)}/Y_{(n_2)}$ este

$$f(v) = \begin{cases} \dfrac{n_1 n_2 v^{n_1-1}}{N}, & 0 \leqslant v \leqslant 1 \\ \dfrac{n_1 n_2 v^{-n_2-1}}{N}, & 1 \leqslant v < \infty. \end{cases}$$

Murty (1955)

Scanned with OKEN Scanner

17. Fie W_1, W_2 amplitudinile în selecții independente de volume 3 și 2 asupra unei variabile repartizate normal. Să se arate că funcția de repartiție a variabilei aleatoare W_1/W_2 este

$$F(r) = \frac{6}{\pi}\left[\operatorname{arc\,tg}\,(3 + 4r^2)^{1/2} - \frac{\pi}{3}\right]$$

Link (1950)

18. Fie W_1, W_2 amplitudinile în selecții independente de volume n_1, n_2 $(n_1 + n_2 = N)$ asupra unei variabile aleatoare X repartizate uniform $R\,(0, c)$. Să se arate că densitatea de repartiție a variabilei aleatoare $U = W_1/W_2$ este

$$f(u) = \frac{n_1(n_1 - 1)n_2(n_2 - 1)}{N(N-1)\,(N-2)}\,[Nu^{n_1-2} - (N-1)u^{n_1-1}], \quad 0 \leqslant u \leqslant 1$$

$$= \frac{n_1(n_1 - 1)n_2(n_2 - 1)}{N(N-1)\,(N-2)}\,[Nu^{-n_2} - (N-2)u^{-n_2-1}], \quad 1 \leqslant u < \infty.$$

Rider (1951)

19. Fie $X_1, \ldots, X_n$ o selecție asupra unei variabile aleatoare X continuă și simetrică față de zero. Să se arate că funcția de repartiție a statisticii W poate fi pusă sub forma

$$F(w) = \left[P\left(\frac{1}{2}\,w\right) - P\left(-\frac{1}{2}\,w\right)\right]^n + 2n\int_{\frac{1}{2}w}^{\infty} p(x)\,[P(x) - P(x-w)]^{n-1}\,dx$$

Hartley (1942)

20. Să se arate că densitatea de repartiție a statisticii W într-o selecție de volum 3 asupra unei variabile aleatoare $U \sim N\,(0, 1)$ este

$$f(w) = \frac{6e^{-\frac{1}{4}w^2}}{\pi\sqrt{2}}\int_0^{w/\sqrt{6}} e^{-\frac{1}{2}t^2}\,dt$$

McKay, Pearson (1933)

21. a) Să se arate că densitatea de repartiție a vectorului (W, M) într-o selecție de volum n asupra unei variabile aleatoare X repartizate uniform pe intervalul $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ este

$$f(w, m) = n(n-1)w^{n-2}, \quad 0 \leqslant w \leqslant 1 - 2|m| \leqslant 1$$

b) Să se arate că densitatea de repartiție a statisticii M este

$$f(m) = n(1 - 2|m|)^{n-1}, \quad |m| \leqslant \frac{1}{2}$$

și că

$$D^2(M) = 1/2\,(n+1)\,(n+2)$$

Neyman, Pearson (1928); Carlton (1946)

22. Să se arate că funcția de repartiție a semisumei extremelor $M = \frac{1}{2}\,(X_{(1)} + X_{(n)})$ într-o selecție de volum n asupra unei variabile aleatoare X continuă de funcții de repartiție P este

$$F(m) = n\int_{-\infty}^{m} [P(2m - x) - P(x)]^{n-1} p(x)\,dx$$

Gumbel 1958)

Scanned with OKEN Scanner

23 Fie $X_1, X_2, \ldots, X_n$ variabile aleatoare independente, X_j avînd densitatea de repartiție (funcția de repartiție) p_j (P_j). Să se arate că

a) Densitatea de repartiție a statisticii $X_{(n)}$ este

$$f_n(x) = \left[\prod_1^n P_j(x)\right] \sum_1^n \left(\frac{p_j(x)}{P_j(x)}\right)$$

b) Funcția de repartiție a statisticii $W = X_{(n)} - X_{(1)}$ este

$$F(w) = \sum_{j=1}^n \int_{-\infty}^{\infty} p_j(x) \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n [P_i(x + w) - P_i(x)]\, dx$$

David (1970)

24. Fie $X_{r,n}$ statistica de ordine de rang r într-o selecție de volum n asupra unei variabile aleatoare X de funcție de repartiție P și $X_{r+1,n+1}$ statistica de ordine de rang $r+1$ în selecția de volum $n+1$ obținută prin adăugarea unei noi observații asupra variabilei X la selecția de volum n.

Să se arate că pentru $x \leqslant y$

$$P\{X_{r,n} \leqslant x, X_{r+1,n+1} > y\} = C_n^r P^r(x)\,[1 - P(y)]^{n-r+1}$$

David (1970)

25. Fie $X_1, \ldots, X_n$ o selecție asupra unei variabile aleatoare X continuă a cărei densitate de repartiție P este simetrică față de $x = \mu$.

Să se arate că

$$f_r(\mu + x) = f_{n-r+1}(\mu - x)$$

David (1970)

26. Fie $X_1, X_2, \ldots, X_n$ variabile aleatoare independente, X_j avînd funcția de frecvențe

$$p(x_j) = q_j^{x_j - 1} p_j, \quad q_j = 1 - p_j, \quad x_j = 1, 2, \ldots$$

(repartiția geometrică de parametru p_j).

Să se arate că $X_{(1)}$ urmează de asemenea o repartiție geometrică de parametru $1 - q_1 q_2 \cdots q_n$.

Margolin, Winokur (1967)

27. Fie $X_{(1)}, \ldots, X_{(n)}$ statisticile de ordine corespunzătoare unei selecții asupra unei variabile aleatoare X cu densitatea de repartiție

$$\frac{1}{2\emptyset} \exp\left[-\frac{|x - \theta|}{\emptyset}\right], \quad \emptyset > 0.$$

a) Să se arate că densitatea de repartiție a variabilei $X_{(r)}$ este

$$\frac{n!}{(r-1)!\,(n-r)!} \cdot \frac{1}{2\emptyset}\left[1 - \frac{1}{2} e^{-\frac{\theta - x}{\emptyset}}\right]^{n-r} \exp\left[-(r+1)(\theta - x)/\emptyset\right]$$

pentru $x \leqslant \theta$

$$\frac{n!}{(r-1)!\,(n-r)!} \cdot \frac{1}{2\emptyset}\left[1 - \frac{1}{2} e^{-\frac{x - \theta}{\emptyset}}\right]^{r-1} \exp\left[-(n-r+1)(x - \theta)/\psi\right]$$

pentru $x \geqslant \theta$

și din aceasta în cazul în care $n = k + 1$ să se determine densitatea de repartiție a medianei.

Scanned with OKEN Scanner

b) Să se arate că

$$M(X_{(n)}) = \theta + \emptyset n\left[\sum_{j=0}^{n-1}(-1)^j C_{n-1}^{j} 2^{-(j+2)}(j+1)^{-2} - 2^{n-1}n^{-2}\right]$$

$$M(X_{(1)}) = 2\theta - M(X_{(n)})$$

$$M(X_{(n)} - X_{(1)} = W) = 2\emptyset n\left[\sum_{j=0}^{n-1} C_{n-1}^{j} 2^{-(j+2)}(j+1)^{-2} - 2^{n-1}n^{-2}\right].$$

23. Fie $Y_{(1)}, \ldots, Y_{(n)}$ statisticile de ordine corespunzătoare unei selecții asupra unei variabile Y cu densitatea de repartiție

$$e^{-y}(1 + e^{-y})^{-2} = \frac{1}{4}\operatorname{sech}^2 \frac{1}{2} y$$

a) Să se arate că densitatea de repartiție a statisticii $Y_{(j)}$ este

$$\frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(j)\,\Gamma(n-j+1)} e^{-(n-j+1)y}(1 + e^{-y})^{-(n+1)}, \quad y > 0$$

b) Să se arate că densitatea de repartiție a amplitudinei W este

$$\frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(n)}{2\sqrt{2}\,\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}\left[1 + \cosh \frac{1}{2} w\right]^{-\left(n-\frac{1}{2}\right)} \times$$

$$F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; n + \frac{1}{2}; 1 - \cos h \frac{1}{2} w\right), \quad w > 0$$

unde

$$F(a, b, c, x) = 1 + \frac{ab}{c}\,\frac{x}{1!} + \frac{a(a+1)\,(b+1)\,b}{c(c+1)} \cdot \frac{x^2}{2!} + \ldots$$

este funcția hipergeometrică.

Gupta, Shah (1965)

c) Să se arate că densitatea de repartiție comună a amplitudinei și a statisticii $M = \frac{1}{2}(Y_{(1)} + Y_{(n)})$ este

$$\frac{n(n-1)\left[\sinh \frac{1}{2} w\right]^{n-2}}{4\left[\cosh m + \sin h \frac{1}{2} w\right]^{n}} w > 0.$$

Shah (1965)

Scanned with OKEN Scanner

29. Fie $X_{i1}, X_{i2}, \ldots, X_{in_i}$ $i = 1, 2$ o selecție asupra unei variabile aleatoare X repartizate uniform pe intervalul $(0, a_i)$ $i = 1, 2$.

i) Să se arate că densitatea de repartiție a variabilei aleatoare $Y = X_{(2n_2)}/X_{(1n_1)}$, unde $X_{(in_i)}$ este statistica de ordine de rang in_i, are densitatea de repartiție.

$$\frac{n_1 n_2}{(n_1 + n_2)\, b^{n_2}}\, y^{n_2 - 1} \qquad 0 \leqslant y \leqslant b$$

$$\frac{n_1 n_2 b^{n_1}}{(n_1 + n_2)\, y^{n_1 + 1}} \qquad b \leqslant y < \infty$$

unde $b = a_2/a_1$

ii) Să se arate că momentul de ordinul r față de origine al variabilei aleatoare Y/b este

$$\frac{n_1 n_2}{(n_1 - r)\,(n_2 + r)}$$

Scanned with OKEN Scanner

Capitolul VI

ESTIMATORI CONSISTENȚI–ESTIMATORI NEDEPLASAȚI

§1. Introducere

Fie $X_1, X_2, \ldots, X_n$ o selecție asupra unei variabile aleatoare X care are funcția de repartiție $F(x, \theta)$. Forma funcțională a funcției F este specificată, însă θ este un parametru real necunoscut, a cărui valoare adevărată θ_0 este un punct în spațiul parametrilor Ω (Ω este o regiune a spațiului euclidian, numindu-se mulțimea valorilor admisibile ale parametrului θ).

Ne propunem ca plecînd de la selecția $X_1, X_2, \ldots, X_n$ să determinăm o statistică a cărei valoare pentru selecția realizată, adică

$$X_1 = x_1, \quad X_2 = x_2, \ldots, X_n = x_n$$

să poată fi luată ca valoare a parametrului θ.

DEFINIȚIA 1. $t_n = t_n(X_1, \ldots, X_n)$ este un estimator pentru parametrul θ, dacă oricare ar fi altă statistică t_n^*.

$$P(\theta - k_1 < t_n < \theta + k_2) \not< P(\theta - k_1 < t_n^* < \theta + k_2) \tag{1}$$

pentru toate valorile lui k_1 și k_2 dintr-un interval $(0, k)$.

Observații. Alegerea intervalului $(0,k)$ poate fi fixată de diferite considerații, depinzînd de frecvența și mărimea depărtării valorii estimatorului (estimației) de valoarea adevărată a parametrului.

Dacă condiția (1) este satisfăcută pentru orice k, atunci o condiție necesară este ca

$$M(t_n - \theta)^2 \not> M(t_n^* - \theta)^2.$$

§2. Estimatori invarianți

DEFINIȚIA 2. Estimatorul $t_n(X_1, \ldots, X_n)$ este local invariant dacă

$$t_n(X_1 + b, X_2 + b, \ldots, X_n + b) = t_n(X_1, X_2, \ldots, X_n). \tag{2}$$

Exemplul 1. Deoarece

$$\frac{1}{n}\sum_1^n\left[(X_j+b)-\frac{1}{n}\sum_1^n(X_j+b)\right]^2=\frac{1}{n}\sum_1^n\left(X_j-\frac{1}{n}\sum_1^n X_j\right)^2,$$

$$\frac{1}{n-1}\sum_1^n\left[(X_j+b)-\frac{1}{n}\sum_1^n(X_j+b)\right]^2=\frac{1}{n-1}\sum_1^n\left(X_j-\frac{1}{n}\sum_1^n X_j\right)^2,$$

urmează că m_2 şi S^2 sînt estimatori locali invarianţi.

DEFINIŢIA 3. Estimatorul $t_n(X_1,\ldots,X_n)$ este invariant de scară dacă

$$t_n(aX_1, aX_2, \ldots, aX_n) = t_n(X_1, X_2,\ldots, X_n). \tag{3}$$

Exemplul 2. Deoarece

$$\frac{\frac{1}{n}\sum_1^n aX_j}{\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_1^n\left(aX_j-\frac{1}{n}\sum_1^n aX_j\right)^2}}=\frac{\frac{1}{n}\sum_1^n X_j}{\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_1^n\left(X_j-\frac{1}{n}\sum_1^n X_j\right)^2}}$$

urmează că $\bar{X}/S$ este invariant de scară.

DEFINIŢIA 4. Estimatorul $t_n(X_1, \ldots, X_n)$ este invariant, dacă

$$t_n(aX_1 + b,\ aX_2 + b, \ldots, aX_n + b) = t_n(X_1, X_2, \ldots, X_n) \tag{4}$$

DEFINIŢIA 5. Estimatorul $t_n(X_1,\ldots,X_n)$ este local invariant de ordinul k dacă

$$t_n(X_1 + b,\ X_2 + b,\ldots, X_n + b) = t_n(X_1, X_2,\ldots, X_n) + kb \tag{2'}$$

DEFINIŢIA 6. Estimatorul $t_n(X_1,\ldots, X_n)$ este invariant de scară de ordinul k dacă

$$t_n(aX_1, aX_2, \ldots, aX_n) = a^k t_n(X_1, X_2, \ldots, X_n). \tag{3'}$$

Exemplul 3. Deoarece

$$\frac{1}{n}\sum_1^n\left(aX_j-\frac{1}{n}\sum_1^n aX_j\right)^r=a^r\frac{1}{n}\sum_1^n\left(X_j-\frac{1}{n}\sum_1^n X_j\right)^r$$

urmează că m_r este invariant de scară de ordinul r.

DEFINIŢIA 7. Estimatorul $t_n(X_1,\ldots, X_n)$ este invariant reflexiv, dacă

$$t_n(\pm X_1,\ \pm X_2,\ldots, \pm X_n) = t_n(X_1, X_2,\ldots, X_n) \tag{5}$$

(adică folosind pe X_j cu semnul plus sau minus, valoarea estimatorului nu se schimbă).

Scanned with OKEN Scanner

DEFINIȚIA 8. Estimatorul $t_n(X_1\, X_2, \ldots, X_n)$ este invariant la permutare, dacă

$$t_n(X_{i_1}, X_{i_2}, \ldots, X_{i_n}) = t_n(X_1, X_2, \ldots, X_n) \tag{6}$$

unde $i_1, i_2, \ldots, i_n$ este orice permutare a indicilor $1,2,\ldots,n$. (Aceasta arată că valoarea estimatorului depinde numai de valorile variabilelor aleatoare și nu de ordinea lor).

Exemplul 4. Deoarece

$$\frac{\frac{1}{n}\sum_{i_k=1}^{n} X_{i_k}}{\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i_k=1}^{n}\left(X_{i_k}-\frac{1}{n}\sum_{j_k=1}^{n} X_{j_k}\right)^2}} = \frac{\frac{1}{n}\sum_{1}^{n} X_j}{\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{1}^{n}\left(X_j-\frac{1}{n}\sum_{1}^{n} X_j\right)^2}}$$

$$\frac{1}{n}\sum_{i_k=1}^{n}\left(X_{i_k}-\frac{1}{n}\sum_{j_k=1}^{n} X_{j_k}\right)^r = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\frac{1}{n}\sum_{1}^{n} X_i\right)^r,$$

urmează că $\bar{X}/S$ și m_r sînt invarianți la permutare.

§3. Șir consistent de estimații

DEFINIȚIA 9. Dacă șirul de estimatori $t_1, t_2, \ldots, t_n, \ldots$ (indicele n arătînd volumul selecției) este astfel încît

$$t_n \xrightarrow{P} \theta \quad \text{pentru fiecare } \theta \in \Omega$$

atunci șirul poartă numele de șir de estimatori consistent simplu.

Aceasta arată că pentru orice $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} P\,(|t_n - \theta| > \varepsilon) = 0 \quad \text{pentru toți } \theta \in \Omega \tag{7}$$

unde probabilitatea este obținută cu ajutorul repartiției estimatorului t_n pentru fiecare n (adică din funcția de repartiție $F(x_1, \ldots, x_n; \theta)$).

Observație. Adeseori se folosește (și în cele ce urmează îl vom folosi și noi) termenul de estimator consistent. Totuși nici un estimator nu este consistent, numai un șir de estimatori poate fi consistent. Termenul de estimator consistent este folosit pentru a arăta că estimatorul este definit pentru un n arbitrar.

DEFINIȚIA 10. Vom spune că șirul de estimatori $t_1, t_2, \ldots, t_n, \ldots$ este un șir consistent de estimatori în eroare pătratică dacă

$$\lim_{n\to\infty} M\,(t_n - \theta)^2 = 0 \quad \text{pentru toți } \theta \in \Omega \tag{8}$$

unde media este luată în raport cu aceeași repartiție ca și la definiția 2.

Scanned with OKEN Scanner

TEOREMA 1. *Dacă*

a) $\lim_{n\to\infty} M(t_n) = \theta$ *şi* b) $D^2(t_n) = 0$ *pentru toţi* $\theta \in \Omega$,

atunci

$$\lim_{n\to\infty} M(t_n - \theta)^2 = 0.$$

Demonstraţia rezultă din relaţia

$$M(t_n - \theta)^2 = [M(t_n) - \theta]^2 + M[t_n - M(t_n)]^2 = [M(t_n) - \theta]^2 + D^2(t_n),$$

prin trecere la limită, pentru $n \to \infty$.

TEOREMA 2. *Dacă pentru toţi*

$$\lim_{n\to\infty} M(t_n - \theta)^2 = 0$$

atunci pentru orice $\varepsilon > 0$ *şi pentru toţi* $\theta \in \Omega$

$$\lim_{n\to\infty} P(|t_n - \theta| > \varepsilon) = 0.$$

Demonstraţia rezultă din inegalitatea

$$P(|t_n - \theta| > \varepsilon) \leqslant \frac{M(t_n - \theta)^2}{\varepsilon^2}$$

prin trecere la limită, pentru $n \to \infty$.

Această teoremă ne arată că consistenţa în medie pătratică implică consistenţa simplă.

TEOREMA 3. *Dacă pentru orice* $\varepsilon > 0$ *şi toţi* $\theta \in \Omega$

a) $\lim_{n\to\infty} P(|t_n - \theta| > \varepsilon) = 0$

şi

b) $|t_n - \theta| \leqslant K < \infty$

pentru toţi $\theta \in \Omega$ *şi toţi* $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$
atunci pentru toţi $\theta \in \Omega$

$$\lim_{n\to\infty} M(t_n - \theta)^2 = 0.$$

Demonstraţie. Pentru orice $\varepsilon > 0$, putem scrie

$$M(t_n - \theta)^2 = \int (t_n - \theta)^2 \, dF(x_1, \ldots, x_n; \theta) = \int_{|t_n - \theta| \leqslant \varepsilon} (t_n - \theta)^2 \, dF +$$

$$+ \int_{|t_n - \theta| > \varepsilon} (t_n - \theta)^2 \, dF \leqslant \int_{|t_n - \theta| \leqslant \varepsilon} \varepsilon^2 \, dF + \int_{|t_n - \theta| > \varepsilon} K^2 \, dF =$$

$$= \varepsilon^2 \int_{|t_n - \theta| \leqslant \varepsilon} dF + K^2 \int_{|t_n - \theta| > \varepsilon} dF.$$

Scanned with OKEN Scanner

Urmează ca

$$M(t_n - \theta)^2 \leqslant \varepsilon^2 [1 - P(|t_n - \theta| > \varepsilon)] + K^2 P(|t_n - \theta| > \varepsilon),$$

de unde prin trecere la limită, pentru $n \to \infty$, obţinem :

$$\lim_{n\to\infty} M(t_n - \theta)^2 = 0.$$

Această teoremă spune că dacă estimaţiile şi parametrii sînt uniform mărginiţi, atunci consistenţa simplă implică consistenţa în (eroare) medie pătratică.

Observaţii. i) S-ar părea că

$$M(t_n) = \theta \quad \text{pentru toţi } n \text{ şi toţi } \theta \in \Omega$$

sau

$$\lim_{n\to\infty} M(t_n) = \theta \quad \text{pentru toţi } \theta \in \Omega$$

sau una din aceste condiţii cu restricţia

$$M(t_n - \theta)^2 \leqslant K < \infty \quad \text{pentru toţi } n \text{ şi toţi } \theta \in \Omega$$

sînt suficiente ca şirul de estimatori să fie consistent simplu sau chiar în eroare pătratică.

Următorul contraexemplu ne arată că aceste restricţii nu sînt suficiente pentru asigurarea consistenţei.

Exemplul 5. Fie t_n astfel încît, pentru toţi $\theta \in \Omega$

$$t_n : \begin{pmatrix} \theta + 1 & \theta - 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Avem

$$M(t_n) = \theta,$$

şi

$$D^2(t_n) = 1 < \infty \quad \text{pentru toţi } n \text{ şi toţi } \theta \in \Omega,$$

ceea ce arată că toate condiţiile din cadrul observaţiei i) sînt satisfăcut.

Cu toate acestea

$$P\left(|t_n - \theta| > \frac{1}{2}\right) = 1 \quad \text{pentru toţi } n \text{ şi } \theta \in \Omega.$$

Deci şirul de estimatori $\{t_n\}_{1 \leqslant n < \infty}$ nu este consistent simplu.

Scanned with OKEN Scanner

Deoarece

$$M(t_n - \theta)^2 = 1 \quad \text{pentru toţi } n \text{ şi toţi } \theta \in \Omega,$$

şirul de estimatori nu este consistent în eroare pătratică.

ii) S-ar părea că consistenţa simplă atrage după sine anumite proprietăţi. De exemplu

$$M(t_n) = \theta \quad \text{pentru toţi } n \text{ şi toţi } \theta \in \Omega$$

sau

$$\lim_{n\to\infty} M(t_n) = \theta \quad \text{pentru toţi } \theta \in \Omega$$

sau

$$M(t_n - \theta)^2 < K < \infty \quad \text{pentru toţi } n \text{ şi toţi } \theta \in \Omega$$

sau

$$\lim_{n\to\infty} M(t_n - \theta)^2 = 0 \quad \text{pentru toţi } \theta \in \Omega.$$

Din următorul exemplu se vede că nici una dintre proprietăţile din observaţia ii) nu reprezintă proprietăţi necesare ale consistenţei simple.

Exemplul 6. Pentru fiecare n, fie t_n astfel încît

$$t_n : \begin{pmatrix} \theta & \theta + n \\ 1 - \dfrac{1}{n} & \dfrac{1}{n} \end{pmatrix} \quad \text{pentru toţi } \theta \in \Omega$$

Nici una din proprietăţile din observaţia ii) nu este satisfăcută. Într-adevăr

$$M(t_n) = \theta + 1 \neq \theta$$

$$\lim_{n\to\infty} M(t_n) = \theta + 1 \neq \theta$$

şi

$$M(t_n - \theta)^2 = n,$$

din care

$$\lim_{n\to\infty} M(t_n - \theta)^2 = \infty \neq 0,$$

ceea ce arată că nu există K astfel ca $M(t_n - \theta)^2 \leqslant K < \infty$ pentru toţi n şi toţi $\theta \in \Omega$.

Cu toate acestea, pentru orice $\varepsilon > 0$,

$$P(|t_n - \theta| > \varepsilon) = \frac{1}{n},$$

Scanned with OKEN Scanner

astfel încît

$$\lim_{n\to\infty} P(|t_n - \theta| > \varepsilon) = 0,$$

ceea ce arată că șirul de estimatori este consistent simplu.

§ 4. Estimatori nedeplasați

4.1. Definiții

DEFINIȚIA 11. Statistica t_N este un estimator nedeplasat pentru θ dacă $M(t_N) = \theta$.

Dacă considerăm funcția de pierdere $(t_N - \theta)^2$ (pierderea cînd $t_N(x_1, \ldots, x_N)$ este o estimație a valorii adevărate a parametrului θ) atunci funcția risc definită ca valoare medie a funcției de pierdere, este

$$R_{t_N}(\theta) = \int (t_N - \theta)^2 P dv. \tag{9}$$

Deoarece $\theta = M_\theta(t_N)$, $R_{t_N}(\theta)$ este dispersia estimatorului $R_{t_N}(\theta) = D^2(t_N)$.

Fie $\mathfrak{M}$ clasa tuturor estimatorilor nedeplasați pentru θ.

DEFINIȚIA 12. Dacă

$$R_{t_N}(\theta) < R_{t'_N}(\theta) \tag{10}$$

pentru toți θ și pentru fiecare $t'_N \in \mathfrak{M}$, atunci t_N poartă numele de estimator nedeplasat uniform de dispersie minimă.

DEFINIȚIA 13. Vom spune că $\delta \in \mathfrak{M}$ este estimator nedeplasat local cel mai bun pentru θ în θ_0 dacă

$$M[\delta(x) - \theta_0]^2 \leqslant M[\delta^*(x) - \theta_0]^2 < \infty \tag{11}$$

pentru toți $\delta^* \in \mathfrak{M}$.

4.2. Estimatori modul-nedeplasați

Fie $X_1, \ldots, X_n$ o selecție asupra unei variabile aleatoare X cu densitatea de repartiție $p_X(\cdot, \theta)$ și $t_n = t_n(X_1, \ldots, X_n)$ o statistică.

DEFINIȚIA 14. Vom spune că t_n este un estimator modul nedeplasat pentru parametrul θ dacă modul repartiției statisticii t_n este θ.

Exemplul 7. Dacă $X_1, \ldots, X_n$ este o selecție asupra unei variabile $X \sim N(\theta, \sigma^2)$ atunci $\bar{X}_n \sim N\left(\theta, \frac{\sigma^2}{n}\right)$ și modulul repartiției statisticii $\bar{X}_n$ este θ. Urmează că $\bar{X}_n$ este un estimator modul-nedeplasat pentru θ.

Scanned with OKEN Scanner

Exemplul 8. Fie $X_1, \ldots, X_n$ o selecție asupra unei variabile aleatoare X cu densitatea de repartiție.

$$p(x,\theta) = \frac{1}{\theta} e^{-x/\theta}, \quad x>0, \quad \theta>0.$$

Densitatea de repartiție a statisticii $X_{(n)}$ este

$$p_{X_{(n)}}(y, \theta) = \frac{n}{\theta}(1 - e^{-y/\theta})^{n-1} e^{-y/\theta}, \quad y>0, \quad \theta>0$$

iar a statisticii $t_{n,1} = X_{(n)}/\ln n$

$$p_{t_{n,1}}(y, \theta) = \frac{n \ln n}{\theta}(1 - e^{-(y/\theta)\ln n})^{n-1} e^{-(y/\theta)\ln n} =$$

$$= \frac{n \ln n}{\theta}[1-(n^{-1/\theta})^y]^{n-1}(n^{-1/\theta})^y. \tag{12}$$

Deoarece soluția ecuației $(dp_{t_{n,1}}(y,\theta)/dy) = 0$ este $y = \theta$, iar $(d^2 p_{t_{n,1}}(y, \theta)/d^2 y)_{y=\theta} < 0$, urmează că (12) este maximă în $y=\theta$; deci $t_{n,1}$ este un estimator modul-nedeplasat.

Densitatea de repartiție a statisticii $n\bar{X}_n$ este

$$p_{n\bar{X}_n}(z, \theta) = \frac{1}{\theta^n \Gamma(n)} z^{n-1} e^{-z/\theta}, z>0, \quad \theta>0$$

iar a statisticii $t_{n,2} = n\bar{X}_n/(n-1)$ este

$$p_{t_{n,2}}(w, \theta) = \frac{(n-1)^n}{\theta^n \Gamma(n)} w^{n-1} e^{-(n-1)w/\theta}, \quad w>0, \quad \theta>0. \tag{13}$$

Deoarece soluția ecuației $(dp_{t_{n,2}}(w, \theta)/dw (= 0$ este $w = \theta$, iar $(d^2 p_{t_{n,2}}(w, \theta)/d^2 w)_{w=\theta}<0$, urmează că (13) este maximă în $w=\theta$; deci și $t_{n,2}$ este un estimator modul-nedeplasat.

Urmează că estimatorul modul-nedeplasat nu este unic.

TEOREMA 4. *Fie X o variabilă aleatoare cu densitatea de repartiție $p_X(\cdot, \theta)$ și $Y = g(X)$. Dacă $p_Y(\cdot)$ satisface condițiile:*

i) $$\frac{dp_Y(y)}{dy} = 0 \quad \text{în } y = \theta$$

ii) $$\frac{d^2 p_Y(y)}{dy^2} < 0 \quad \text{în } y = \theta$$

Scanned with OKEN Scanner

iii) *g stabilește o corespondență biunivocă între x și y, atunci soluția ecuației diferențiale*

$$p_X \frac{dx^2}{dy^2} + \frac{dp_X}{dx}\left(\frac{dx}{dy}\right)^2 = 0 \quad \text{în } y = \theta$$

$$\frac{d^2p_X}{dx^2}\left(\frac{dx}{dy}\right)^2 + 3\frac{dp_X}{dx}\cdot\frac{dx}{dy}\cdot\frac{d^2x}{dy^2} + p_X\frac{d^3x}{dy^3} < 0$$

este un estimator modul-nedeplasat pentru θ.

Demonstrație. Avem

$$p_Y(y) = \frac{d}{dy}F(y) = \frac{d}{dy}F_X[g^{-1}(y)] = \frac{d}{dx}F_X(x)\frac{dx}{dy} = p_X(x, \theta)\frac{dx}{dy}$$

iar din condiția i)

$$\frac{dp_Y(y)}{dy} = \frac{dp_X}{dx}\left(\frac{dx}{dy}\right)^2 + p_X\frac{d^2x}{dy^2} = 0 \quad \text{în } y = \theta$$

ii)

$$\frac{d^2p_Y(y)}{dy^2} = \frac{dp_X}{dx}\left(\frac{dx}{dy}\right)^2 + 3\frac{dp_X}{dx}\cdot\frac{dx}{dy}\cdot\frac{d^2x}{dy^2} + p_X\frac{d^3x}{dy^3} < 0 \quad \text{în } y = 0$$

Deci soluția ecuației diferențiale este un estimator modul nedeplasat pentru θ.

Exemplul 9. Pentru $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, avem

$$\frac{dp_X}{dx} = -\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\theta)^2}{2\sigma^2}}\frac{2(x-\theta)}{2\sigma^2},$$

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\theta)^2}{2\sigma^2}}\frac{d^2x}{dy^2} - \frac{2(x-\theta)}{2\sigma^2}\cdot\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\theta)^2}{2\sigma^2}}\left(\frac{dx}{dy}\right)^2 = 0,$$

$$\frac{d^2x}{dy^2} - \frac{x-\theta}{\sigma^2}\left(\frac{dx}{dy}\right)^2 = 0 \quad \text{în } y = \theta. \tag{14}$$

Deoarece

$$\frac{dx}{dy} = 1 \quad \text{și} \quad \frac{d^2x}{dy^2} = 0,$$

soluția ecuației (14) este $x = \theta$.

Deci $-(x-\theta)/\sigma^2=0$ în $x=\theta$. Astfel X este un estimator modul-nedeplasat pentru θ.

TEOREMA 5. *Fie $X_1, X_2, \ldots, X_n$ o selecție asupra unei variabile aleatoare X și $t_n(X_1, \ldots, X_n)$ o statistică avînd densitatea de repartiție*

$$p_{t_n}(t, \theta) = k g_1(t, \theta)\, g_2(t, \theta) \tag{15}$$

și

$$g_1(t, \theta) = \text{const.}\ [g_2(t, \theta)]^{-1} = c\,[g_2(t, \theta)]^{-1} \text{ în } t = \theta.$$

Dacă în $t = \theta$

$$g_1''(t, \theta)\, g_2(t, \theta) + 2g_1'(t, \theta)\, g_2'(t, \theta) + g_1(t, \theta)\, g_2''(t, \theta) < 0 \tag{16}$$

(derivatele fiind luate în raport cu t) atunci t_n este un estimator modul-nedeplasat.

Demonstrație. Din (15) prin derivare obținem

$$g_1'(t, \theta) = -\frac{c g_2'(t, \theta)}{g_2^2(t, \theta)} \text{ în } t = \theta.$$

Deci $p_{t_n}'(t, \theta) = 0$ în $t = \theta$ și $p_{t_n}''(t, \theta) < 0$ în $t = \theta$ (din (16))

Urmează că t_n este un estimator modul-nedeplasat.

Exemplul 10. Pentru parametrul θ din exemplul 8 $t_{n,3} = \bar{X}_n$ este un estimator nedeplasat.

Fie $\hat{\theta}$ un estimator pentru parametrul θ și

a) $$L(\hat{\theta}, \theta) = \left(\frac{1}{\hat{\theta}} - \frac{1}{\theta}\right)^2$$

funcția de pierdere. Avem :

$$M[L(t_{n,3}, \theta)] = \frac{n+2}{(n-1)(n-2)} \cdot \frac{1}{\theta^2}, \quad n > 2$$

$$M[L(t_{n,2}, \theta)] = \frac{1}{n-2} \cdot \frac{1}{\theta^2}$$

și cum

$$M[L(t_{n,3}, \theta)] > M[L(t_{n,2}, \theta)] \text{ pentru orice } \theta$$

urmează că valoarea medie a pierderii datorită alegerii statisticii $t_{n,2}$, este uniform mai mică decît a pierderii datorită alegerii statisticii $t_{n,3}$.

Scanned with OKEN Scanner

Cu alte cuvinte, în acest caz particular, estimatorul modul-nedeplasat are riscul uniform mai mic decît estimatorul nedeplasat.

b) $$L(\hat{\theta}, \theta) = \frac{\hat{\theta}}{\theta} + \frac{\theta}{\hat{\theta}} - 2$$

funcţia de pierdere. Avem :

$$M(n\bar{X}_n) = n\theta, \quad M[n\bar{X}_n)^{-1}] = \frac{1}{n-1} \cdot \frac{1}{\theta},$$

de unde

$$M[L(t_{n,3}, \theta)] = 1 + \frac{n}{n-1} - 2 = \frac{1}{n-1}$$

$$M[L(t_{n,2}, \theta)] = \frac{n}{n-1} + 1 - 2 = \frac{1}{n-1}.$$

Urmează că estimatorul nedeplasat uniform de dispersie minimă $t_{n,3}$ are aceeaşi valoare medie a pierderii (funcţia de pierdere fiind dată de b)) cu estimatorul modul-nedeplsasat $t_{n,2}$.

§5. O margine inferioară pentru dispersia estimatorului

5.1. Introducere

În general există mai mult decît un estimator consistent pentru un parametru, chiar dacă ne limităm numai la estimatori nedeplasaţi.

Exemplul 11. Fie $X_1, X_2, \ldots, X_n$ o selecţie asupra unei variabile aleatoare X repartizate $Po(\lambda)$, unde $\lambda > 0$ este o constantă necunoscută Ne propunem să găsim plecînd de la aceste variabile de selecţie, o estimaţie pentru λ. Avem

$$M(X) = D^2(X) = \lambda.$$

$\bar{X}$ şi S^2 sînt estimatori consistenţi şi nedeplasaţi pentru $M(X)$ şi respectiv $D^2(X)$, în cazul de faţă pentru λ. Prin urmare sîntem în prezenţa unui caz cînd cunoaştem două estimaţii ale parametrului λ care au proprietăţile dorite.

Se pune întrebarea : ce estimator va fi folosit $\bar{X}$ sau S^2 ?

Îl vom alege pe acela care are dispersia cea mai mică. Să vedem de ce un astfel de estimator este de preferat. Dacă t_n este un estimator nedeplasat pentru θ şi dacă $M(t_n^2) < \infty$, atunci avem o margine superioară a probabilităţii ca

$$|t_n - \theta| \geq \varepsilon.$$

Scanned with OKEN Scanner

Această margine superioară se obține din inegalitatea lui Cebîșev; avem

$$P(|t_n - \theta| \geqslant \varepsilon) \leqslant D^2(t_n)/\varepsilon^2.$$

Prin urmare din mulțimea estimatorilor nedeplasați, îl vom alege pe acela care are dispersia minimă (dacă un astfel de estimator există).

Problema alegerii unui astfel de estimator este rezolvată în cele ce urmează.

DEFINIȚIA 15. Dacă $X_1, X_2, \ldots, X_n$ este o selecție asupra unei variabile aleatoare X avînd densitatea de repartiție $f(x, \theta)$, atunci funcția

$$P(x_1, x_2, \ldots, x_n; \theta) : R^n \times \Omega \to R$$

prin

$$P(\mathbf{x}, \theta) = P(x_1, x_2, \ldots, x_n; \theta) = \prod_{j=1}^{n} f(x_j, \theta)$$

poartă numele de funcție de verosimilitate atunci cînd este considerată ca funcție de θ și probabilitatea selecției cînd este considerată funcție de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ pentru θ fixat.

Urmează că

$$\int P \mathrm{d}v = 1. \tag{17}$$

unde integrarea se face pe R^n, iar $\mathrm{d}v = \prod_{1}^{n} \mathrm{d}x_i$.

5.2. Inegalitatea Rao-Cramer

TEOREMA 6. *Dacă*

1. *mulțimea valorilor parametrului lui* θ *formează un interval* D *al dreptei reale*

2. $\dfrac{\partial P(\mathbf{x}, \theta)}{\partial \theta} < \infty$ *pentru toți* $\theta \in D$ *și oricare ar fi* $\mathbf{x} \in R^n$

3. $\dfrac{\partial}{\partial \theta} \int P(\mathbf{x}, \theta)\, \mathrm{d}v = \int \dfrac{\partial P(\mathbf{x}, \theta)}{\partial \theta} \mathrm{d}v$ *pentru toți* $\theta \in D$

4. *pentru orice estimator* t_n *nedeplasat*

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \int t_n P \mathrm{d}v = \int \frac{\partial}{\partial \theta} t_n P \mathrm{d}v$$

5. $M\left[\left(\dfrac{\partial \ln P(\mathbf{x}, \theta)}{\partial \theta}\right)^2\right] < \infty$ *pentru toți* $\theta \in D$

Scanned with OKEN Scanner

atunci

$$D^2(t) \geqslant [\tau'(\theta)]^2 / M\left(\frac{\partial \ln P(\mathbf{x},\theta)}{\partial \theta}\right)^2$$

şi egalitatea are loc dacă şi numai dacă există o constantă A, astfel încît aproape sigur

$$A[t-\tau(\theta)] = \frac{\partial \ln P(\mathbf{x},\theta)}{\partial \theta}.$$

Această teoremă a fost stabilită pentru prima oară de Fisher (1922), iar apoi de Cramér (1946), Dugué (1937) şi Rao (1945). De asemenea apare şi într-o lucrare a lui Aitkin şi Silverstone (1942).

Demonstraţie. Derivînd relaţia (17) în raport cu θ şi schimbînd operaţiile de derivare şi integrare, deoarece limitele de integrare nu depind de θ, obţinem

$$\int \frac{\partial P}{\partial \theta}\, dv = 0$$

sau

$$\int \frac{\partial \ln P}{\partial \theta} P\, dv = 0. \tag{18}$$

Derivînd relaţia (18) în raport cu θ, rezultă

$$\int\left[\frac{\partial^2 \ln P}{\partial \theta^2} + \left(\frac{\partial \ln P}{\partial \theta}\right)^2\right] P\, dv = 0$$

sau

$$M\left(\frac{\partial^2 \ln P}{\partial \theta^2}\right) = -M\left[\left(\frac{\partial \ln P}{\partial \theta}\right)^2\right].$$

Deoarece t este un estimator nedeplasat pentru $\tau(\theta)$, avem

$$M(t) = \int tP\, dv = \tau(\theta)$$

sau derivînd în raport cu θ în ambii membrii

$$\int t \frac{\partial \ln P}{\partial \theta} P\, dv = \tau'(\theta). \tag{19}$$

Scăzînd din (19) relaţia (18) înmulţită prin $\tau(\theta)$, obţinem

$$\tau'(\theta) = \int [t - \tau(\theta)] \frac{\partial \ln P}{\partial \theta} P\, dv. \tag{20}$$

Scanned with OKEN Scanner

Din relaţia (20) şi din inegalitatea lui Schwarz

$$\tau'^2(\theta) \leqslant \int [t - \tau(\theta)]^2 P \, dv \int \left(\frac{\partial \ln P}{\partial \theta}\right)^2 P \, dv.$$

Urmează că

$$\tau'^2(\theta) \leqslant M[t - \tau(\theta)]^2 M\left(\frac{\partial \ln P}{\partial \theta}\right)^2 \tag{21}$$

de unde :

$$D^2(t) = M[t - \tau(\theta)]^2 \geqslant \tau'^2(\theta) \Big/ M\left(\frac{\partial \ln P}{\partial \theta}\right)^2 \tag{22}$$

sau

$$D^2(t) \geqslant -\tau'^2(\theta) \Big/ M\left(\frac{\partial^2 \ln P}{\partial \theta^2}\right). \tag{23}$$

Condiţia necesară şi suficientă pentru ca (22) să se transforme în egalitate este ca $t-\tau(\theta)$ să fie proporţională cu $\partial \ln P/\partial\theta$ pentru toate mulţimile de observaţie, adică

$$A[t - \tau(\theta)] = \frac{\partial \ln P}{\partial \theta} \tag{24}$$

unde A este independentă de $X_1, X_2, \ldots, X_n$ însă poate fi funcţie de θ, adică $A = A(\theta)$.

Din relaţia (24) prin ridicarea la pătrat şi prin aplicarea mediei obţinem

$$A^2(\theta) D^2(t) = M\left(\frac{\partial \ln P}{\partial \theta}\right)^2$$

Din (18), (24) şi (20), obţinem :

$$M\left(\frac{\partial \ln P}{\partial \theta}\right)^2 = \int \frac{\partial \ln P}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial \ln P}{\partial \theta} P \, dv =$$

$$= \int A(\theta) \, [t - \tau(\theta)] \frac{\partial \ln P}{\partial \theta} P \, dv = A(\theta)\tau'(\theta) \tag{25}$$

de unde

$$D^2(t) = \tau'(\theta)/A(\theta). \tag{26}$$

Scanned with OKEN Scanner

5.3. Estimatori eficienți. Eficiență

DEFINIȚIA 16. Un estimator pentru care (22) se transformă în egalitate poartă numele de estimator eficient.

Observație. Dacă (24) este satisfăcută, t este un estimator eficient pentru $\tau(\theta)$ cu dispersia dată de (26).

Exemplul 12. Fie $X_1, X_2, \ldots, X_n$ o selecție asupra unei variabile aleatoare X având densitatea de repartiție

$$f(x,\theta) = \frac{1}{\sqrt{\theta}\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2\theta}x^2\right),\ x \in R,\ D = (0,\infty).$$

Funcția de verosimilitate este

$$P(\mathbf{x},\theta) = \frac{1}{\theta^{\frac{n}{2}}(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \exp\left(-\frac{1}{2\theta}\sum_1^n X_i^2\right).$$

Condițiile de regularitate fiind satisfăcute, obținem

$$\frac{\partial \ln P}{\partial\theta} = -\frac{n}{2\theta} + \frac{1}{2\theta^2}\sum_1^n X_i^2 = \frac{\left(\sum_1^n X_i^2/n\right) - \theta}{2\theta^2/n}.$$

Deoarece

$$M\left(\frac{1}{n}\sum_1^n X_i^2\right) = \theta \text{ și } D^2\left(\frac{1}{n}\sum_1^n X_i^2\right) = \frac{2\theta^2}{n},$$

obținem

$$M\left(\frac{\partial \ln P}{\partial\theta}\right)^2 = \frac{n^2}{4\theta^4}\cdot\frac{2\theta^2}{n} = \frac{n}{2\theta^2}.$$

Avem :

$$D^2(t) \geqslant \frac{2\theta^2}{n}.$$

Dar $D^2\left(\frac{1}{n}\sum_1^n X_i^2\right) = \frac{2\theta^2}{n}$, ceea ce arată că $\frac{1}{n}\sum_1^n X_i^2$ este un estimator eficient pentru θ.

Exemplul 13. Fie $X_1\, X_2, \ldots, X_n$ o selecție asupra unei variabile aleatoare X cu densitatea de repartiție

$$\frac{1}{\theta},\ 0 < x < \theta,\ D = (0,\infty).$$

Scanned with OKEN Scanner

Funcţia de verosimilitate este

$$P(\mathbf{x},\ \theta) = \frac{1}{\theta^n}.$$

Avem :

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\int_0^\theta\int_0^\theta\cdots\int_0^\theta\frac{1}{\theta^n}\,dv = 0$$

şi

$$\int_0^\theta\int_0^\theta\cdots\int_0^\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\cdot\frac{1}{\theta^n}\,dv = \int_0^\theta\int_0^\theta\cdots\int_0^\theta\frac{-n}{\theta^{n+1}}\,dv = \frac{n}{\theta} \neq 0,$$

ceea ce ne arată că condiţia 3 din teorema 6 nu este satisfăcută.

DEFINIŢIA 17. Dacă există un estimator suficient pentru θ şi dacă $\tilde{t}_n$ este orice estimator nedeplasat pentru θ, eficienţa lui $\tilde{t}_n$ pentru estimarea lui θ este definită de raportul

$$\text{ef}\,(\tilde{t}_n\,|\,\theta) = \frac{D^2(t_n,\ \theta)}{D^2(\tilde{t}_n,\ \theta)}.$$

Totodată mai există şi o altă măsură a eficienţei.

Se determină raportul volumelor de selecţie care dau dispersii egale, sau cu alte cuvinte raportul numerelor de experienţe care trebuiesc realizate pentru a se obţine două intervale de aceeaşi lungime, avînd aceeaşi încredere de a conţine punctul parametru θ.

DEFINIŢIA 18. Raportul

$$\frac{n}{n'}$$

unde $n(n')$ este volumul selecţiei pe baza căruia s-a calculat t_n $(t_{n'})$ şi astfel încît

$$D^2\,(t_n) = D^2\,(t_{n'})$$

poartă numele de eficienţa estimatorului t_n relativă la estimatorul t_n.

5.4. Forma repartiţiilor pentru care există un estimator eficient

Ecuaţia (24) determină o condiţie asupra densităţii de repartiţie în care pentru o funcţie de θ, $\tau(\theta)$ există un estimator eficient.

Soluţia ecuaţiei diferenţiale (24) este

$$\ln P = \int A\ [t - \tau\,(\theta)]\,d\theta = tA\,(\theta) + Q(\theta) + R\,(x_1,\ \ldots,\ x_n)$$

sau

$$P = R^*(x_1, \ldots, x_n) \exp [tA(\theta) + Q(\theta)], \tag{27}$$

care pentru densitatea de repartiție $f(x, \theta)$ devine

$$f(x, \theta) = R^*(x) \exp [A(\theta) B(x) + D(\theta)]. \tag{28}$$

Deci

$$R^*(x_1, \ldots, x_n) = \prod_1^n R^*(x_i), \quad t = \sum_1^n B(x_i) \text{ și } Q(\theta) = nD(\theta).$$

Din (27) obținem

$$\int P \mathrm{d}v = \int R^*(x_1, \ldots, x_n) \exp [tA(\theta) + Q(\theta)] \mathrm{d}v = 1$$

sau

$$\int R^* \exp [tA(\theta)] \mathrm{d}v = \exp [-Q(\theta)].$$

Derivînd ultima relație în raport cu $A(\theta)$ de două ori, obținem

$$\int R^* t \exp [tA(\theta)] \mathrm{d}v = -\frac{\mathrm{d}Q(\theta)}{\mathrm{d}A(\theta)} \exp [-Q(\theta)],$$

$$\int R^* t^2 \exp [tA(\theta)] \mathrm{d}v = \left[-\frac{\mathrm{d}^2 Q(\theta)}{\mathrm{d}A^2(\theta)} + \left(\frac{\mathrm{d}Q(\theta)}{\mathrm{d}A(\theta)} \right)^2 \right] \exp [-Q(\theta)],$$

de unde

$$M(t) = -\frac{\mathrm{d}Q(\theta)}{\mathrm{d}A(\theta)}, \quad M(t^2) = -\frac{\mathrm{d}^2 Q(\theta)}{\mathrm{d}A^2(\theta)} + \left(\frac{\mathrm{d}Q(\theta)}{\mathrm{d}A(\theta)} \right)^2.$$

Urmează că

$$M(t) = -\frac{\mathrm{d}Q(\theta)}{\mathrm{d}A(\theta)}, \quad D^2(t) = -\frac{\mathrm{d}^2 Q(\theta)}{\mathrm{d}A^2(\theta)}. \tag{29}$$

Membrul drept al inegalității (22) pentru estimatorul funcției $\frac{\mathrm{d}Q(\theta)}{\mathrm{d}A(\theta)}$ este

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta} \frac{\mathrm{d}Q(\theta)}{\mathrm{d}A(\theta)} \right)^2 \Big/ -\frac{\mathrm{d}^2 Q(\theta)}{\mathrm{d}A^2(\theta)} \left(\frac{\mathrm{d}A(\theta)}{\mathrm{d}\theta} \right)^2 = -\frac{\mathrm{d}^2 Q(\theta)}{\mathrm{d}A^2(\theta)}$$

Scanned with OKEN Scanner

care este aceeaşi cu cea obţinută în (29), astfel încît marginea (22) este atinsă.

Deci condiţia necesară şi suficientă pentru existenţa estimaţiei eficiente este ca $f(x, \theta)$ să fie de forma (28).

Funcţia parametrică de estimat este

$$-\frac{dQ(\theta)}{dA(\theta)} = -\frac{dQ}{d\theta}\frac{d\theta}{dA}$$

şi dispersia estimaţiei este

$$-\frac{d^2Q(\theta)}{dA^2(\theta)} = \left(\frac{dA}{d\theta}\right)^{-1}\frac{d}{d\theta}\left(-\frac{dQ}{dA}\right).$$

Exemplul 14. Dacă $X_1, X_2, \ldots, X_n$ este o selecţie asupra unei variabile aleatoare X repartizate $N(\mu, \sigma^2)$, atunci

$$P = \frac{1}{(\sigma\sqrt{2\pi})^n}\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\left[n(\overline{X}-\mu)^2 + \sum(X_i-\overline{X})^2\right]\right\} =$$

$$= R^* \exp\left(\frac{1}{2\sigma^2}(2\mu n\,\overline{X} - n\mu^2)\right),$$

unde

$$R^* = \frac{1}{(\sigma\sqrt{2\pi})^n}\exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\sum X_i^2\right)$$

este independentă de μ. Astfel P poate fi pusă sub forma (27), care arată că $\overline{X}$ este un estimator pentru

$$-\frac{d(-n\mu^2/2\sigma^2)}{d(n\mu/\sigma^2)} = \mu$$

şi are dispersia minimă dată de (22).

Exemplul 15. Dacă $X_1, X_2, \ldots, X_n$ este o selecţie asupra unei variabile aleatoare X avînd densitatea de repartiţie

$$\frac{a^p}{\Gamma(p)}e^{-ax}x^{p-1}$$

atunci

$$P = \frac{a^{np}}{[\Gamma(p)]^n}e^{-a\Sigma x_i}\Pi x_i^{p-1} = R^*\exp(-pa\,ny + np\ln a)$$

unde R^* este independentă de a şi $y = (\sum x_i)/(np)$. Astfel P poate fi pus sub forma (27) care arată că y este o estimaţie pentru

$$-\frac{d(np\ln a)}{da}\Big/\frac{d(-pan)}{da} = \frac{1}{a}$$

Scanned with OKEN Scanner

și

$$D^2(y) = \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a}(-pan)\right]^{-1} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a}\left(\frac{1}{a}\right) = \frac{1}{pna^2}.$$

De asemenea

$$P = R^* \exp\left[n(p-1)z - n \ln \Gamma(p)\right],$$

unde R^* este independentă de p și $z = \frac{1}{2} \ln \Pi x_i$, astfel că dispersia minimă (22) este atinsă pentru estimația z a

$$\frac{\mathrm{d} \ln \Gamma(p)}{\mathrm{d}p} \Big/ \frac{\mathrm{d}(p-1)}{\mathrm{d}p} = \frac{\mathrm{d} \ln \Gamma(p)}{\mathrm{d}p}.$$

Exemplul 16. Dacă $X_1, X_2, \ldots, X_n$ este o selecție asupra unei variabile aleatoare X repartizate $Po(\lambda)$, atunci

$$P = \mathrm{e}^{-n\lambda} \frac{\lambda^{x_1}}{x_1!} \cdots \frac{\lambda^{x_n}}{x_n!},$$

$$\frac{\partial \ln P}{\partial \lambda} = -n + \frac{X_1}{\lambda} + \frac{X_2}{\lambda} + \ldots + \frac{X_n}{\lambda},$$

$$D^2\left(\frac{\partial \ln P}{\partial \lambda}\right) = \frac{1}{\lambda^2} D^2(X_1 + X_2 + \ldots + X_n) = \frac{n\lambda}{\lambda^2} = \frac{n}{\lambda}$$

și cum $D^2(\bar{X}) = \frac{\lambda}{n}$, (22) este atinsă.

5.5. Inegalitatea Bhattacharya-Kendall-Stuart

Cînd marginea (22) nu este atinsă, putem totuși găsi o margine inferioară pentru dispersia estimatorului. Am văzut că condiția esențială pentru ca această margine să fie atinsă este ca să existe un estimator t pentru care $t - \tau(\theta)$ este o funcție liniară de $\partial \ln P / \partial \theta$. Dar chiar dacă un astfel de estimator nu există, poate totuși exista unul pentru care $t - \tau(\theta)$ este o funcție liniară de $\frac{1}{P}\frac{\partial P}{\partial \theta}$ și $\frac{1}{P}\frac{\partial^2 P}{\partial \theta^2}$ sau, în general, de derivatele de ordin superior ale funcției de verosimilitate. Acesta este faptul care a condus la următoarele considerații date de M. Bhattacharya (1946), reluate de M. G. Kendall și A. Stuart și sintetizate în

TEOREMA 7. *Dacă*

1. *există un estimator nedeplasat t pentru $\tau(\theta)$*

2. $\int \frac{\partial \ln P}{\partial \theta} \mathrm{d}v$ *se poate deriva cel puțin de r ori sub semnul integrală.*

Scanned with OKEN Scanner

3. $D_s = t - \tau(\theta) - \sum_1^s a_r P^{(r)}/P$, *unde* $P^{(r)} = \partial^r P/\partial\theta^r$

4. *matricea* $\mathbf{J}_{rk} = \left(M\left(\frac{P^{(r)}}{P}\cdot\frac{P^{(k)}}{P}\right)\right)_{1\leqslant r,\,k\leqslant s}$ *nu este singulară, atunci*

$$D^2(t) \geqslant \sum_1^s \sum_1^s \tau^{(k)}\mathbf{J}_{rk}^{-1}\tau^{(r)},$$

unde $\tau^{(k)} = \partial^k\tau/\partial\theta^k$.

Demonstrație. Din (17) și din condiția 1, obținem

$$M(D_s) = -\sum_r a_r M(P^{(r)}/P) = -\sum a_r \int \frac{\partial^r P}{\partial\theta^r}\,dv = 0. \tag{30}$$

Prin urmare dispersia variabilei D_s este

$$D^2(D_s) = M(D_s^2) = \int\left\{[t-\tau(\theta)] - \sum_r a_r\frac{P^{(r)}}{P}\right\}^2 P\,dv. \tag{31}$$

Trebuie să minimizăm $D^2(D_s)$, a_r fiind variabile. Derivînd (31) în raport cu a_k și egalînd cu zero obținem :

$$\int\left[t - \tau(\theta) - \sum_r a_r\frac{P^{(r)}}{P}\right]\frac{P^{(k)}}{P}P\,dv = 0, \qquad 1\leqslant k\leqslant s$$

de unde

$$\int[t-\tau(\theta)]\,P^{(k)}dv = \sum_r a_r\int\frac{P^{(r)}}{P}\cdot\frac{P^{(k)}}{P}Pdv. \tag{32}$$

Avem

$$\int\tau(\theta)P^{(k)}\,dv = \tau(\theta)\int P^{(k)}dv = 0,$$

$$\int tPdv = \tau \Rightarrow \int tP^{(k)}dv = \tau^{(k)}, \tag{33}$$

$$\sum_r a_r\int\frac{P^{(r)}}{P}\cdot\frac{P^{(k)}}{P}P\,dv = \sum_r a_r M\left(\frac{P^{(r)}}{P}\cdot\frac{P^{(k)}}{P}\right) \tag{34}$$

Ținînd seama de (33) și (34) în (32), obținem

$$\tau^{(k)} = \sum_{r=1}^s a_r M\left(\frac{P^{(r)}}{P}\cdot\frac{P^{(k)}}{P}\right), \quad 1\leqslant k\leqslant s.$$

Scanned with OKEN Scanner

Deoarece matricea coeficienţilor $\mathbf{J}_{rk}$ nu este singulară

$$a_r = \sum_{k=1}^{s} \tau^{(k)}\, \mathbf{J}_{rk}^{-1}, \qquad 1 \leqslant r \leqslant s. \tag{35}$$

Minimul dispersiei $D^2(D_s)$ va fi

$$D^2(D_s) = \int \left\{ [t-\tau(\theta)] - \sum_r \sum_k \tau^{(k)}\, \mathbf{J}_{rk}^{-1}\, \frac{P^{(r)}}{P} \right\}^2 P\,dv. \tag{36}$$

Ţinînd seama în (36) de (32), obţinem

$$D^2(D_s) = \int [t-\tau(\theta)]^2\, P\,dv - \sum_r \sum_k \tau^{(k)}\, \mathbf{J}_{rk}^{-1} \int t P^{(r)}\,dv,$$

de unde

$$D^2(D_s) = D^2(t) - \sum_r \sum_k \tau^{(k)} \mathbf{J}_{rk}^{-1}\, \tau^{(r)}.$$

Deoarece $D^2(D_s) \geqslant 0$, urmează că

$$D^2(t) \geqslant \sum_1^s \sum_1^s \tau^{(k)}\, \mathbf{J}_{rk}^{-1}\, \tau^{(r)}. \tag{37}$$

Se observă că : condiţia ca limita inferioară în (37) să fie atinsă este ca $M(D_s^2) = 0$, care cu (30) conduce la $D_s = 0$, sau

$$t - \tau(\theta) = \sum_1^s \sum_1^s \tau^{(k)}\, \mathbf{J}_{rk}^{-1}\, \frac{P^{(r)}}{P} \tag{38}$$

care este o generalizare a condiţiei (24).

În cazul în care $s=2$, (37) se scrie

$$D^2(t) \geqslant \tau'^2\, \mathbf{J}_{11}^{-1} + \tau''^2\, \mathbf{J}_{22}^{-1} + 2\tau'\tau''\, \mathbf{J}_{12}^{-1} \tag{37'}$$

sau ţinînd seama că

$$J_{11}^{-1} = \frac{J_{22}}{J_{11}J_{22}-J_{12}^2}, \quad J_{12}^{-1} = J_{21}^{-1} = \frac{-J_{12}}{J_{11}J_{22}-J_{12}^2}, \quad J_{22}^{-1} = \frac{J_{11}}{J_{11}J_{22}-J_{12}^2}$$

se poate pune sub forma

$$\begin{vmatrix} D^2(t) & \tau' & \tau'' \\ \tau' & J_{11} & J_{12} \\ \tau'' & J_{12} & J_{22} \end{vmatrix} \geqslant 0. \tag{37''}$$

Dezvoltînd determinantul din (37'') după prima linie, se obține

$$(37^{III}) \qquad D^2(t) \geqslant \frac{(\sigma')^2}{J_{11}} + \frac{(\tau' J_{12} - \tau'' J_{11})^2}{J_{11}(J_{11} J_{22} - J^2_{12})}.$$

În cazul în care $s = 1$, (37) se scrie

$$D^2(t) \geqslant \frac{(\sigma')^2}{J_{11}}.$$

DEFINIȚIA 19. J_{11} poartă numele de cantitatea de informație relativă la o selecție de volum n.

Al doilea termen al inegalității prezintă importanță cînd $\sigma' = 0$, adică pentru valoarea lui t, ce face extremă funcția $\sigma(\theta)$
Sistemul

$$J_{11}(n) = nJ_{11}(1)$$
$$J_{12}(n) = nJ_{12}(1)$$
$$J_{22}(n) = nJ_{22}(1) + 2n\,(n-1)\,J^2{}_{22}(1)$$

permite să scriem (37^{III}) sub forma

$$(37^{IV}) \qquad D^2(t) \geqslant \frac{(\sigma)^2}{nJ_{11}(1)} + \frac{[\sigma'' - \sigma' J_{12}(1)/J_{11}(11)]^2}{2n^2 J^2{}_{11}(1)} + \frac{\varepsilon}{n^2}.$$

5.6. Proprietăți ale estimatorilor de dispersie minimă

TEOREMA 8. *Estimatorul nedeplasat de dispersie minimă este unic.*

Demonstrație. Fie t_1 și t_2 estimatori nedeplasați pentru $\tau(\theta)$, fiecare cu dispersia D^2 și $t_3 = (t_1 + t_2)/2$. Deoarece $M(t_3) = \tau(\theta)$ urmează că t_3 este de asemenea un estimator nedeplasat pentru $\tau(\theta)$. Avem

$$D^2(t_3) = \frac{1}{4}[D^2(t_1) + D^2(t_2) + 2\,\mathrm{cov}\,(t_1, t_2)] = \frac{D^2 + \mathrm{cov}\,(t_1, t_2)}{2}.$$

Din inegalitatea lui Schwarz

$$\mathrm{cov}(t_1,t_2) = \int (t_1 - \tau)\,(t_2 - \tau)\; P\mathrm{d}v \leqslant \left\{\int (t_1 - \tau)^2\, P\mathrm{d}v \int (t_2 - \tau)^2\, P\mathrm{d}v\right\}^{1/2} = D^2$$

urmează că $D^2(t_3) \leqslant D^2$ ceea ce contrazice presupunerea că t_1 și t_2 au dispersia minimă afară de cazul cînd egalitatea are loc, adică atunci cînd

$$\mathrm{cov}\,(t_1, t_2) = k(t) D^2$$

sau

$$(t_1 - \tau) = k(t)\,(t_2 - \tau).$$

Scanned with OKEN Scanner

Pe de altă parte $k(t) = 1$, deoarece trebuie să avem $D^2(t_3) = D^2$. Prin urmare $t_1 = t_2$, ceea ce demonstrează teorema.

TEOREMA 9. *Dacă t este un estimator nedeplasat, de minimă dispersie pentru $\tau(\theta)$, cu dispersia D^2 și dacă t_1 și t_2 sînt alți doi estimatori nedeplasați pentru $\tau(\theta)$ cu $D^2(t_1) = k_1 D^2$, $D^2(t_2) = k_2 D^2$, $k_1, k_2 > 1$, atunci*

$$(39) \qquad \frac{1}{(k_1 k_2)^{1/2}} - \left[\frac{(k_1-1)(k_2-1)}{k_1 k_2}\right]^{1/2} \leqslant \rho(t_1, t_2) \leqslant \frac{1}{(k_1 k_2)^{1/2}} + \left[\frac{(k_1-1)(k_2-1)}{k_1 k_2}\right]^{1/2}.$$

Demonstrație. Fie $t_3 = at_1 + (1-a)t_2$. Deoarece $M(t)_3 = \tau(\theta)$, urmează că t_3 este de asemenea un estimator nedeplasat pentru $\tau(\theta)$. Avem :

$$D^2(t_3) = a^2 D^2(t_1) + (1-a)^2 D^2(t_2) + 2a(1-a)\operatorname{cov}(t_1, t_2),$$

de unde

$$(40) \qquad \frac{D^2(t_3)}{D^2} = a^2 k_1 + (1-a)^2 k_2 + 2a(1-a)\frac{\operatorname{cov}(t_1, t_2)}{D^2}$$

Ținînd seama că

$$\rho = \frac{\operatorname{cov}(t_1, t_2)}{D(t_1)\,D(t_2)} = \frac{\operatorname{cov}(t_1, t_2)}{(k_1 k_2)^{1/2} D^2},$$

(40) se mai scrie

$$\frac{D^2(t_3)}{D^2} = a^2 k_1 + (1-a)^2 k_2 + 2a(1-a)\,\rho\,(k_1 k_2)^{1/2}.$$

Cum $D^2(t_3) \geqslant D^2$

$$a^2 k_1 + (1-a)^2 k_2 + 2a(1-a)\,\rho\,(k_1 k_2)^{1/2} \geqslant 1,$$

inegalitate care se mai poate scrie

$$a^2[k_1 + k_2 - 2\,\rho(k_1 k_2)^{1/2}] + 2a\,[\rho(k_1 k_2)^{1/2} - k_2] + (k_2 - 1) \geqslant 0.$$

Acest trinom în a este pozitiv, dacă avem

$$[\rho(k_1 k_2)^{1/2} - k_2]^2 \leqslant [k_1 + k_2 - 2\,\rho(k_1 k_2)^{1/2}](k_2 - 1),$$

sau, același lucru, dacă

$$[\rho(k_1 k_2)^{1/2} - 1]^2 \leqslant (k_1 - 1)(k_2 - 1),$$

ceea ce demonstrează (39).

Scanned with OKEN Scanner

Observație. Pentru $k_1=1$ (t_1 estimator de minimă dispersie pentru $\tau(\theta)$ obținem

$$\rho = \frac{1}{\sqrt{k_2}} = \frac{D}{\sqrt{D(t_2)}}$$

sau în cuvinte: coeficientul de corelație dintre estimatorul nedeplasat pentru $\tau(\theta)$ și estimatorul nedeplasat de minimă dispersie este egal cu rădăcina pătrată a eficacității primului relativă la al doilea.

5.7. Inegalitatea Chapman-Robbins

Cînd condițiile de regularitate nu sînt satisfăcute, ca în cazul repartiției uniforme, marginea inferioară (22) nu este definită.

Prezentăm o margine inferioară cu care se lucrează mai greu, însă care nu cere condiții de regularitate.

$$\text{Fie } X(\theta) = \{ (x_1, \ldots, x_n);\quad P(\mathbf{x}, \theta) > 0 \} \text{ și } h \neq 0$$

astfel încît $X(\theta + h) \subset X(\theta)$. Avem

$$\int_{X(\theta)} P(\mathbf{x}, \theta)\, dv = 1 \tag{41}$$

și

$$\int_{X(\theta)} P(\mathbf{x}, \theta + h)\, dv = \int_{X(\theta+h)} P(\mathbf{x}, \theta + h) dv = 1. \tag{41'}$$

Dacă $\hat{\theta}$ este un estimator nedeplasat pentru θ, atunci

$$\int_{X(\theta)} \hat{\theta}\, P(\mathbf{x}, \theta)\, dv = \theta$$

și

$$\int_{X(\theta)} \hat{\theta}\, P(\mathbf{x}, \theta + h) dv = \int_{X(\theta+h)} \hat{\theta}\, P(\mathbf{x}, \theta + h)\, dv = \theta + h. \tag{42}$$

Din (41) și (42) obținem

$$\int_{X(\theta)} (\hat{\theta} - \theta)\, [P(\mathbf{x}, \theta + h) - P(\mathbf{x}, \theta)]\, dv = h$$

sau, același lucru

$$\int_{X(\theta)} \frac{\hat{\theta} - \theta}{h} \left(\frac{P(\mathbf{x}, \theta)}{P(\mathbf{x}, \theta)} \right)^{1/2} [P(\mathbf{x}, \theta + h) - P(\mathbf{x}, \theta)]\, dv = 1.$$

Scanned with OKEN Scanner

Din inegalitatea Cauchy-Schwarz, obţinem :

$$(43)\quad 1 \leqslant \int_{X(\theta)} (\hat{\theta} - \theta)^2 P(\mathbf{x},\theta)\, dv \int_{X(\theta)} \left[\frac{P(\mathbf{x},\ \theta+h) - P(\mathbf{x},\ \theta)}{hP(\mathbf{x},\ \theta)}\right]^2 P(\mathbf{x},\ \theta)dv.$$

Deoarece

$$\int_{X(\theta)} (\hat{\theta}-\theta)^2\, P(\mathbf{x},\ \theta)\, dv = D^2(\theta)$$

şi

$$\int_{X(\theta)} \left[\frac{P(\mathbf{x},\ \theta+h) - P(\mathbf{x},\ \theta)}{hP(\mathbf{x},\ \theta)}\right]^2 P(\mathbf{x},\ \theta)\, dv =$$

$$= \frac{1}{h^2}\int_{X(\theta)} \left\{\left[\frac{P(\mathbf{x},\ \theta+h)}{P(\mathbf{x},\ \theta)}\right]^2 P(\mathbf{x},\ \theta) - 2P(\mathbf{x},\ \theta+h) + P(\mathbf{x},\ \theta)\right\} dv =$$

$$= \frac{1}{h^2}\int_{X(\theta)} \left[\frac{P(\mathbf{x},\ \theta+h)}{P(\mathbf{x},\ \theta)}\right]^2 P(\mathbf{x},\ \theta) - \frac{1}{h^2} = \frac{1}{h^2}\left[M\left(\frac{P(\mathbf{x},\ \theta+h)}{P(\mathbf{x},\ \theta)}\right)^2 - 1\right]$$

din (43) rezultă că

$$D^2(\hat{\theta}) \geqslant \frac{h^2}{M\left(\frac{P(\mathbf{x},\ \theta+h)}{P(\mathbf{x},\ \theta)}\right)^2 - 1}$$

în presupunerea că numitorul este diferit de zero. Avem

$$(44)\qquad D^2(\hat{\theta}) \geqslant \sup_h \frac{h^2}{M\left(\frac{P(\mathbf{x},\ \theta+h)}{P(\mathbf{x},\ \theta)}\right)^2 - 1}$$

unde superiorul este luat după toţi h astfel încît $X(\theta+h) \subset X(\theta)$.
(44) a fost dată de Chapman-Robbins (1951).

Marginea inferioară a inegalităţii Chapman-Robbins este atinsă dacă şi numai dacă

$$\hat{\theta} - \theta = a(\theta)\,\frac{P(\mathbf{x},\ \theta+h_s) - P(\mathbf{x},\ \theta)}{h_s P(\mathbf{x},\ \theta)}.$$

Ridicînd la pătrat şi aplicînd media, găsim

$$M(\hat{\theta} - \theta)^2 = \frac{a^2(\theta)}{h_s^2}\left[M\left(\frac{P(\mathbf{x},\ \theta+h_s)}{P(\mathbf{x},\ \theta)}\right)^2 - 1\right]$$

Scanned with OKEN Scanner

care implică

$$a(\theta) = \frac{h_s}{M\left(\frac{P(\mathbf{x},\ \theta+h_s)}{P(\mathbf{x},\ \theta)}\right)^2 - 1}.$$

Prin urmare marginea inferioară Chapman-Robbins este atinsă dacă și numai dacă

$$\hat{\theta} = \frac{h_s\left(\frac{P(\mathbf{x},\ \theta+h_s) - P(\mathbf{x},\ \theta+h)}{P(\mathbf{x},\ \theta)}\right)}{M\left(\frac{P(\mathbf{x},\ \theta+h_s)}{P(\mathbf{x},\ \theta)}\right)^2 - 1} \tag{45}$$

este un estimator nedeplasat pentru parametrul θ.

Exemplul 17. Ne propunem să găsim o margine inferioară pentru dispersia estimatorului parametrului θ din Exemplul 13.

$X(\theta+h) \subset X(\theta)$ oridecîte ori $-\theta < h < 0$ ceea ce permite să scriem

$$D^2(\hat{\theta}) \geqslant \sup_{-\theta<h<0} \frac{h^2}{M\left(\frac{P(\mathbf{x},\ \theta+h)}{P(\mathbf{x},\ \theta)}\right)^2 - 1}.$$

Avem

$$\frac{P(\mathbf{x},\ \theta+h)}{P(\mathbf{x},\ \theta)} = \frac{\theta^n}{(\theta+h)^n} \quad \text{pentru } 0 < x_i < \theta+h$$

și prin urmare

$$M\left(\frac{P(\mathbf{x},\ \theta+h)}{P(\mathbf{x},\theta)}\right)^2 = \frac{\theta^{2n}}{(\theta+h)^{2n}} \int_0^{\theta+h}\int_0^{\theta+h} \cdots \int_0^{\theta+h} \frac{1}{\theta^n}\, dv \underset{\substack{\text{deoarece} \\ -\theta<h<0}}{=}$$

$$= \frac{\theta^{2n}(\theta+h)^n}{(\theta+h)^{2n}\,\theta^n} = \frac{\theta^n}{(\theta+h)}$$

ceea ce dă

$$D^2(\hat{\theta}) \geqslant \sup_{-\theta<h<0} \frac{h^2}{\frac{\theta^n}{(\theta+h)^n} - 1} = \sup_{-\theta<h<0} \frac{h^2(\theta+h)^n}{\theta^n - (\theta+h)^n}.$$

Probleme

1. Fie $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ variabile aleatoare independente, identic repartizate cu repartiția $N(\mu, \sigma^2)$. Să se arate că

a) $\max(X_1, \ldots, X_n) - (2\sigma^2 \ln n)^{1/2} \xrightarrow{P} \mu$

b) $\Sigma P\{X_n > (2\sigma^2 \ln n)^{1/2}\} = \begin{cases} \infty & \mu > 0 \\ < \infty & \mu < 0 \end{cases}$

c) $T_n \to \begin{cases} 1 & \mu > 0 \\ -1 & \mu < 0 \end{cases}$

Scanned with OKEN Scanner

unde şirul de statistici $(T_n)_{1\leqslant n<\infty}$, $T_n \in \{-1, 1\}$ este definit de

$$T_n = \begin{cases} 1 & X_n > (2\sigma^2 \ln n)^{1/2} \\ -1 & X_n < -(2\sigma^2 \ln n)^{1/2} \\ T_{n-1} & \text{în rest} \end{cases}$$

Berman S.M. (1962)
Cover, T. M. (1969)

2. Fie $X_1, X_2, \ldots, X_n$ o selecţie asupra unei variabile aleatoare X pentru care $\mu_k' < \infty$ Să se arate că $\frac{1}{n}\sum_1^n X_j^k$ este un estimator consistent pentru μ_k'.

3. Fie $X_1, \ldots, X_n$ o selecţie asupra unei variabile aleatoare $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. Să se arate că

a) $\overline{\sigma} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)} \sqrt{\sum_1^n (X_i - \mu)^2}$, μ cunoscută

este o estimaţie nedeplasată pentru σ şi că

$$D^2(\overline{\sigma}) = \left[\frac{\frac{n}{2}\Gamma^2\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma^2\left(\frac{n+1}{2}\right)} - 1\right]\sigma^2.$$

b) $\overline{\sigma} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{n} \sum_1^n |X_i - \mu|$, μ cunoscută

este o estimaţie nedeplasată pentru σ şi că

$$D^2(\overline{\sigma}) = \frac{\pi - 2}{2n}\sigma^2$$

c) $\overline{\sigma}_s = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \sqrt{\sum_1^n (X_i - \overline{X}_n)^2}$, μ necunoscută

este o estimaţie nedeplasată pentru σ şi că

$$D^2(\overline{\sigma}_s) = \left[\frac{n-1}{2} \frac{\Gamma^2\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\Gamma^2\left(\frac{n}{2}\right)} - 1\right]\sigma^2.$$

d) $\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{\pi}{2n(n-1)}} \sum_1^n |X_i - \overline{X}|$, μ necunoscută

Scanned with OKEN Scanner

este o estimație nedeplasată pentru σ și că

$$D^2(\hat{\sigma}) = \frac{1}{n}\left[\frac{\pi}{2} + \arcsin\frac{1}{n-1} + \sqrt{n(n-2)} - n\right]\sigma^2$$

4. Fie $X_1, X_2, \ldots, X_n$ o selecție asupra unei variabile aleatoare X repartizate $N(\mu, \sigma^2)$ μ și σ^2 fiind necunoscuți. Să se găsească un estimator eficient pentru μ^2/σ^2.

5. Fie X o variabilă aleatoare cu funcția de frecvențe

$$P(X = k) = \frac{e^{-\lambda}\lambda k}{k!\,(1 - e^{-\lambda})} \qquad \begin{matrix} k = 1, 2, \ldots \\ \lambda > 0 \end{matrix}$$

Să se arate că singurul estimator nedeplasat pentru $1 - e^{-\lambda}$ este 0 pentru X un întreg impar și 2 pentru X întreg par.

6. Fie X_1 și X_2 două variabile aleatoare independente având mediile μ_1, respectiv μ_2 și dispersiile σ_1^2, respectiv σ_2^2. Fie $X_{11}, X_{12}, \ldots, X_{1n_1}$ ($X_{21}, X_{22}, \ldots, X_{2n_2}$) o selecție asupra variabilei aleatoare X_1 (X_2). Să se arate că $\overline{X}_{n_1} - \overline{X}_{n_2}$ este un estimator de dispersie minimă pentru $\mu_1 - \mu_2$.

7. Fie $X_1, X_2, \ldots, X_n$ o selecție asupra unei variabile aleatoare X cu densitatea $\theta e^{-\theta x}$, $x>0$, $\theta>0$.

a) Să se arate că variabila aleatoare care ia valoarea 1 cînd $X_1 \geqslant k$ și valoarea 0 cînd $X_1 < k$ este un estimator nedeplasat pentru $\tau(\theta) = e^{-k\theta}$.

b) Să se arate că

$$\begin{cases} 0 & t < k \\ \left(\dfrac{t-k}{t}\right)^{n-1} & t \geqslant k \end{cases}$$

este un estimator nedeplasat de dispersie minimă pentru $\tau(\theta)$.

8. Fie $X_1, X_2, \ldots, X_n$ o selecție asupra unei variabile aleatoare X cu funcția de frecvențe

$$P(X = x) = \frac{a(x)\,\theta^x}{\sum_0^\infty a(x)\,\theta^x}; \qquad \begin{matrix} x = 0, 1, 2, \ldots \\ \theta>0,\ a(x)>0,\ a(0) = 1. \end{matrix}$$

Fie $c(t, n) = \sum_{\substack{x_1,\ldots,x_n \\ x_1+\ldots+x_n=t}} \prod_{i=1}^{n} a(X_i)$.

Să se arate că pentru orice întreg pozitiv r,

$$U_r(t) = \begin{cases} \dfrac{c(t-r, n)}{c(t, n)} & t \geqslant r \\ 0 & t < r \end{cases}$$

este un estimator nedeplasat uniform cu dispersia minimă.

Roy, Mitra (1957)

9. Fie $X_1, \ldots, X_m$ ($Y_1, \ldots, Y_n$) o selecție asupra unei variabile aleatoare X (Y) având funcția de repartiție $F(G)$, X și Y variabile aleatoare independente.

Fie

U = numărul perechilor $(X_{(i)}, Y_{(k)})$ astfel încît $Y_k < X_{(i)}$,

statistica Wilcoxon—Mann-Whitney și

$$\hat{p} = U/mn.$$

Scanned with OKEN Scanner

Să se arate că $\hat{p}$ este un estimator nedeplasat pentru $p = P(Y<X)$ și

$$p = \int_{-\infty}^{\infty} G(s)\, dF(s)$$

$$\hat{p} = \int_{-\infty}^{\infty} G_n(s)\, dF_m(s)$$

unde $F_m(G_n)$ este funcția de repartiție empirică corespunzătoare selecției $X_1, \ldots, X_m (Y_1, \ldots, Y_n)$

Birnbaum, McCarty

10. Fie $X_1, \ldots, X_n$ o selecție asupra unei variabile aleatoare X repartizate Weibull cu densitatea

$$p(x; \rho, \alpha) = \alpha \rho^{\alpha} x^{\alpha-1} e^{-(\rho x)^{\alpha}},$$

$x>0$, $\rho>0$, $\alpha \geqslant 2$ cunoscut.

Să se arate că

a) $t_{n,1} = \dfrac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{1}{\alpha} X}}$

este un estimator nedeplasat pentru ρ

b) $t_{n,2} = \left(\dfrac{\alpha+1}{\alpha}\right)^{1/2} \dfrac{1}{X}$

este un estimator modul-nedeplasat pentru ρ

c) pentru funcția de risc

$$L(\hat{\rho}, \rho) = \left(\frac{1}{\hat{\rho}} - \frac{1}{\rho}\right)^2,$$

$M[L(t_{n,1}, \rho)] > M[L(t_{n,2}, \rho)]$ pentru orice ρ.

11. Să se arate că dacă t_1 este un estimator eficient și t_2 un estimator consistent pentru parametrul θ, cov $(t_1, t_2 - t_1)$ este asimptotic zero.

Fischer (1925)

12. Fie $X_1, \ldots, X_n$ o selecție asupra unei variabile aleatoare $X \sim N(0, \sigma^2)$. Să se arate că

a) $t_{n,1} = \dfrac{\Gamma\left(\dfrac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\dfrac{n+1}{2}\right)} \left(\dfrac{1}{2} \sum_1^n X_i^2\right)^{1/2}$

și

$$t_{n,2} = \frac{\Gamma\left(\dfrac{n-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\dfrac{n}{2}\right)} \left(\frac{1}{2} \sum_1^n (X_i - \bar{X})^2\right)^{1/2}$$

sînt estimatori nedeplasați pentru σ.

b) (44) în general dă o margine mai mare decît (23), care dă $\sigma^2/(2n)$, însă considerînd cazul $n = 2$, $t_{n,1}$ nu atinge nici această margine mai mare.

Chapman, Robbins (1951)

Scanned with OKEN Scanner

13. Fie $X_1, X_2, \ldots, X_n$, $n = v + 1$ o selecție asupra unei variabile aleatoare repartizate $N(\mu, \sigma^2)$.

a) Să se găsească un estimator nedeplasat pentru σ^p (unde $v + p > 0$).

b) Să se găsească un estimator de eroare medie pătratică minimă pentru $\sigma^p \left(p > -\frac{1}{2}(n-1)\right)$.

Alan Stuart (1969)

14. a) Să se arate că

$$\hat{\mu}^m = \frac{(n-m)!}{n!} \sum X_{i_1} X_{i_2} \ldots X_{i_m}; \; i_1 \neq i_2 \neq \ldots \neq i_m, \; m \leqslant n$$

unde suma se extinde asupra tuturor permutărilor de m elemente dintr-o selecție de volum n asupra unei variabile X de medie μ, este un estimator nedeplasat pentru μ^m și să se determine $D^2(\hat{\mu}^m)$.

b) În ce caz $\hat{\mu}^m$ este preferată statisticii $\overline{X}^m$.

c) Să se găsească un estimator pentru $D^2(\hat{\mu}^m)$.

Gerald J. Glasser (1961, 62)

15. Dacă $t_1, t_2, \ldots, t_k$ sînt estimatori nedeplasați și independenți ai parametrului θ de dispersii $\sigma_1^2, \sigma_2^2, \ldots, \sigma_k^2$ să se arate că

$$t = \sum_1^k \frac{t_j}{\sigma_j^2} \Big/ \sum_1^k \frac{1}{\sigma_j^2}$$

este un estimator nedeplasat de dispersie minimă pentru parametrul θ.

Kendall și Stuart (1961)

16. Fie $X_1, X_2, \ldots, X_n$, $n = 2m + 1$, $m = 0, 1, 2, \ldots$ o selecție asupra unei variabile aleatoare X cu densitatea de repartiție

$$p(x) = \frac{1}{\pi\,[1 + (x - \theta)^2]}, \qquad -\infty < x < \infty$$

Să se arate că

$$\frac{1}{n - 2[nk]} \sum_{m-[nk]}^{m+[nk]} X_{(i)}, \qquad 0 \leqslant k \leqslant \frac{1}{2}$$

este un estimator nedeplasat pentru θ cu dispersia asimptotică

$$\frac{1}{nk}\left[\left(\frac{1}{k} - 1\right) \operatorname{tg}^2\left(\frac{1}{2}\pi k\right) + \frac{2}{nk} \operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\pi k\right) - 1\right].$$

Rotherberg, Fischer, Tilanus (1964)

Scanned with OKEN Scanner

Capitolul VII

STATISTICI JACKKNIFE

§1. Reducerea deplasării prin metoda Jackknife

1.1. Introducere

Estimatorii jackknife au fost propuși pentru prima oară de Quenouille (1946) și dezvoltați de același autor în 1956. Tukey (1957) propune că acești estimatori să fie folosiți în aproximarea statisticilor t pentru verificarea ipotezelor statistice sau construirea intervalelor de încredere. Miller (1964, 1968) dă condițiile în care metoda lui Tukey este valabilă. Arversen (1969) aplică tehnica jackknife la U-statistici și la funcții de mai multe U-statistici.

1.2. Estimatori jackknife generalizați

În dezvoltarea acestor estimatori urmăm Schucamy, Gray, Owen (1971).

DEFINIȚIA 1. Fie $\hat{\theta}_1$ și $\hat{\theta}_2$ estimatori pentru θ. Pentru orice număr real $R \neq 1$,

$$G(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2) = \frac{\hat{\theta}_1 - R\hat{\theta}_2}{1 - R} \tag{1}$$

poartă numele de estimator jackknife generalizat.

Observație. Dacă valoarea lui R depinde de n și $\lim_{n\to\infty} R$ există și este diferită de unu, $\hat{\theta}_1$ și $\hat{\theta}_2$ fiind estimatori consistenți pentru θ, atunci $G(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2)$ este estimator consistent pentru θ.

TEOREMA 1. *Dacă*

$$M(\hat{\theta}_k) = \theta + b_k(n, \theta), \quad k = 1,2$$

$$b_2(n, \theta) \neq 0$$

Scanned with OKEN Scanner

şi

$$R = \frac{b_1(n,\theta)}{b_2(n,\theta)} = 1, \tag{2}$$

atunci $M[G(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2)] = \theta$.

Observaţie. Dacă R este cunoscut şi este dat de (2), $G(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2)$ este un estimator nedeplasat pentru θ.

TEOREMA 2. *Dacă*

$$M(\hat{\theta}_k) = \theta + \sum_{j=1}^{\infty} b_{kj}(n, \theta), \quad k = 1,2$$

şi

$$R = \frac{b_{11}(n,\theta)}{b_{21}(n,\theta)}$$

atunci

$$M[G(\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2)] = \theta + \frac{\sum_{j=2}^{\infty} b_{1j}(n,\theta) - R\sum_{j=2}^{\infty} b_{2j}(n,\theta)}{1 - R}. \tag{3}$$

Observaţie (3) ne arată că în anumite cazuri, cu toate că $G(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2)$ nu este estimator nedeplasat, el are o deplasare mai mică decît estimatorii $\hat{\theta}_1$ sau $\hat{\theta}_2$.

Se pune următoarea întrebare: considerînd $G(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_1)$, pentru R cunoscut, un estimator pentru θ, cum alegem estimatorii $\hat{\theta}_1$ şi $\hat{\theta}_2$?

Dacă considerăm drept criteriu de optimalitate pentru un estimator dispersia minimă, ţinînd seama că

$$D^2[G(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2)] = \frac{1}{(1-R)^2}[D^2(\hat{\theta}_1) + R^2 D^2(\hat{\theta}_2) - 2R \operatorname{cov}(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2)], \tag{4}$$

din clasa estimatorilor pentru care R este pozitiv, alegem $\hat{\theta}_1$ şi $\hat{\theta}_2$ cu cea mai mare corelaţie pozitivă.

Faptul că pentru o clasă largă de estimatori R poate fi cunoscut rezultă din următoarele.

Fie $\hat{\theta}_1$ un estimator (bazat pe selecţia $X_1, \ldots, X_n$) astfel încît

$$M(\hat{\theta}_1) = \theta + b(\theta) f_1(n). \tag{5}$$

Fie θ_2 acelaşi estimator (bazat pe subselecţia $X_1, \ldots X_{i-1}, X_{i+1}, \ldots$ $\ldots, X_n$).

Scanned with OKEN Scanner

Atunci

$$(6) \qquad M(\hat{\theta}_2) = \theta + b(\theta) f_1(n-1) \quad \text{şi} \quad R = \frac{f_1(n)}{f_1(n+1)},$$

astfel încît R este cunoscut cînd este cunoscută $f_1(n)$.

1.3. Metoda lui Quenouille

Fie $X_1, \ldots X_N$ o selecţie asupra unei variabile aleatoare X cu funcţia de repartiţie $F(x, \theta)$ unde θ este un parametru necunoscut. Esenţa obţinerii estimatorilor jackknife este următoarea:

Împărţim aceste N observaţii în n grupuri de mărime k ($N = nk$), adică

$$(X_1, \ldots, X_k), \ (X_{k+1}, \ldots, X_{2k}), \ldots, (X_{(n-1)k+1}, \ldots, X_{nk}).$$

Această împărţire poate fi determinată de structura experimentului sau arbitrar de statistician.

Fie $\hat{\theta}_n^0$ un estimator pentru parametrul θ bazat pe toate cele N observaţii şi θ_{n-1}^i, $i = 1,2,\ldots, n$ estimatorul obţinut prin înlăturarea grupului i şi calcularea valorii sale făcîndu-se pe baza celor $(n-1)k$ observaţii rămaxe.

Definiţia 2. (Tukey (1957))

$$(7) \qquad \hat{\theta}_i = n\hat{\theta}_n^0 - (n-1)\,\hat{\theta}_{n-1}^i, \quad i = 1,2,\ldots, n$$

poartă numele de pseudovalori.

Definiţia 3. Estimator jackknife $\hat{\theta}$ al parametrului θ este media pseudo-valorilor $\hat{\theta}_1, \ldots, \hat{\theta}_n$

$$(8) \qquad \hat{\theta} = \frac{1}{n}\sum_1^n \hat{\theta}_i = n\hat{\theta}_n^0 - (n-1)\,\overline{\hat{\theta}}_{n-1}^i; \quad \overline{\hat{\theta}}_{n-1}^i = \frac{1}{n}\sum_1^n \hat{\theta}_{n-1}^i$$

Propoziţia 1. $\hat{\theta}_1, \ldots, \hat{\theta}_n$ *sînt variabile aleatoare interschimbabile* (*pentru fiecare* n).

Observaţie. Estimatorul jackknife este un caz particular al estimatorului jackknife generalizat $G(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2)$; astfel (8) este un $G(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2)$ cu

$$\hat{\theta}_1 = \hat{\theta}_n^0, \quad \hat{\theta}_2 = \overline{\hat{\theta}}_{n-1}^i \quad \text{şi} \quad R(n) = \frac{n-1}{n}.$$

În cele ce urmează vom folosi termenul de estimator jackknife cînd ne referim la $G(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2)$, exceptînd cazurile cînd pot apărea confuzii. În astfel de cazuri folosim termenul de estimator jackknife generalizat.

Scanned with OKEN Scanner

Explicaţia folosirii estimatorului jackknife este următoarea : Presupunem că

$$M\hat{\theta}_n^0 = \theta + \sum_1^\infty \frac{a_j}{N^j} = \theta + \sum_1^\infty \frac{a_j}{n^j k^j},$$

unde a_j poate fi funcţia de θ însă nu şi de N. Atunci

$$M(\bar{\hat{\theta}}_{n-1}^i) = \theta + \sum_1^\infty \frac{a_j}{(N-k)^j} = \theta + \sum_1^\infty \frac{a_j}{(n-1)^j k^j}$$

şi deci

$$M(\hat{\theta}) = \theta - \frac{a_2}{k^2 n(n-1)} - \frac{a_3(2n-1)}{k^3 n^2 (n-1)^2} - \ldots =$$

$$= \theta - \frac{a_2}{N(N-k)} - \frac{a_3(2N-k)}{N^2(N-k)^2} - \ldots.$$

Astfel deplasarea la $\hat{\theta}$ este de ordinul N^{-2} în timp ce la $\hat{\theta}_n^0$ este de ordinul N^{-1} cînd $a_1 \neq 0$. Dacă

$$a_2 = a_3 = \ldots = a_N = \ldots = 0,$$

atunci $\hat{\theta}$ este un estimator nedeplasat.

Exemplul 1. Fie $X_1, \ldots X_N$ o selecţie asupra unei variabile aleatoare $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. Fie

$$\hat{\theta}_N^0 = \frac{1}{N} \sum_1^N (X_j - \bar{X}_N)^2 = \frac{1}{N} \sum_1^N X_j^2 - \bar{X}_n^2$$

un estimator pentru σ^2. Avem

$$M(\hat{\theta}_N^0) = \sigma^2 - \frac{1}{N}\sigma^2$$

Luînd $k = 1$, obţinem

$$\hat{\theta}_{N-1}^i = \frac{1}{N-1} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N X_j^2 - \left(\frac{N\bar{X}_N - X_i}{N-1} \right)^2 =$$

$$= \frac{1}{N-1} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N X_j^2 - \frac{1}{(N-1)^2} (N^2 \bar{X}_N^2 - 2NX_i \bar{X}_N + X_i^2),$$

de unde

$$\bar{\hat{\theta}}_{N-1}^i = \frac{(N-1)^2 - 1}{N(N-1)^2} \sum_1^N X_j^2 + \frac{2N - N^2}{(N-1)^2} \bar{X}_N^2.$$

Scanned with OKEN Scanner

Avem

$$M(\bar{\hat{\theta}}^{i}_{N-1}) = \frac{N^2-2N}{(N-1)^2} M(\hat{\theta}^{0}_{N}) = \frac{N-2}{N-1}\sigma^2 = \sigma^2 - \frac{1}{N-1}\sigma^2$$

și pentru ca G să fie un estimator nedeplasat trebuie să alegem

$$R(N) = \frac{\sigma^2/N}{\sigma^2/(N-1)} = \frac{N-1}{N}.$$

Observație. În acest exemplu estimatorul jackknife coincide cu estimatorul jackknife generalizat.

Avem :

$$G(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2) = \hat{\theta} = N\hat{\theta}^{0}_{N} - (N-1)\,\bar{\hat{\theta}}^{i}_{N-1} = \sum_{1}^{N} X_j^2 - N\bar{X}^2 -$$

$$- \frac{N^2-2N}{(N-1)N}\sum_{1}^{N} X_j^2 - \frac{N^2-2N}{N-1}\bar{X}^2 = \frac{N^2-N-N^2+2N}{(N-1)N}\sum_{1}^{N} X_j^2 -$$

$$- \frac{N^2-N-N^2+2N}{N-1}\bar{X}^2 = \frac{1}{N-1}\sum_{1}^{N}(X_j - \bar{X})^2.$$

Exemplul 2. Fie $X_1, X_2, \ldots, X_N$ o selecție asupra unei variabile aleatoare $X \sim Bi(N, p)$. Ne propunem să găsim un estimator pentru p^2. Deoarece X/N este un estimator nedeplasat pentru p, pentru p^2 considerăm estimatorul

$$\hat{\theta}^{0}_{N} = (X/N)^2$$

Avem

$$M(\hat{\theta}^{0}_{N}) = p^2 + \frac{1}{N}(p - p^2)$$

și deci estimatorul jackknife va fi nedeplasat.

Valoarea estimatorului $\hat{\theta}^{i}_{N-1}$ este una dintre cantitățile

$$\left(\frac{x-1}{N-1}\right)^2 \quad \text{sau} \quad \left(\frac{x}{N-1}\right)^2$$

după cum variabila înlăturată corespunde unui succes, respectiv la un insucces.

Scanned with OKEN Scanner

Deci, al doilea estimator $\hat{\theta}_2$, care este media $\overline{\hat{\theta}}^i_{N-1}$ a celor N valori posibile $\hat{\theta}^i_{N-1}$ este

$$\overline{\hat{\theta}}^i_{N-1} = \frac{1}{N}\left[X\left(\frac{X-1}{N-1}\right)^2 + (N-X)\left(\frac{X}{N-1}\right)^2\right],$$

deoarece sînt X succese şi $N-X$ insuccese care pot fi înlăturate. $\overline{\hat{\theta}}^i_{N-1}$ poate fi scris

$$\overline{\hat{\theta}}^i_{N-1} = \frac{(N-2)X^2 + X}{N(N-1)^2}$$

şi astfel

$$\hat{\theta} = N\hat{\theta}^0_N - (N-1)\overline{\hat{\theta}}^i_{N-1} = \frac{X^2}{N} - \frac{(N-2)X^2 + X}{N(N-1)} = \frac{X(X-1)}{N(N-1)}.$$

Acest estimator este nedeplasat pentru p^2 şi este funcţie de o statistică suficientă.

Observaţie. În exemplele 1 şi 2 am luat $R(N) = (N-1)/N$.

Cu toate că în general nu se face această presupunere, se ia $\theta_2 = \overline{\hat{\theta}}^i_{N-1}$ şi $k = 1$.

Exemplul 3. Fie $X_1, \ldots, X_N$ o selecţie asupra unei variabile aleatoare X cu densitatea de repartiţie

$$p_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\theta}, & 0 < x < \theta \\ 0 \text{ în rest} \end{cases}$$

$\hat{\theta}^0_N = \max(X_1, \ldots, X_N) = X_{(N)}$ este un estimator deplasat pentru parametrul θ cu

$$M(\hat{\theta}^0_N) = \frac{N}{N+1}\theta = \theta - \left(\frac{1}{N+1}\right)\theta.$$

Un estimator nedeplasat pentru θ este $\dfrac{N-1}{N}\hat{\theta}^0_N$. Să cercetăm şi acest caz estimatorul jackknife. Avem

$$\hat{\theta}^i_{N-1} = \begin{cases} X_{(N)} & \text{dacă } X_i \neq X_{(N)} \\ X_{(N-1)} & \text{dacă } X_i = X_{(N)} \end{cases},$$

de unde

$$\overline{\hat{\theta}}^i_{N-1} = \frac{1}{N}\left[(N-1)X_{(N)} + X_{(N-1)}\right].$$

Scanned with OKEN Scanner

Prin urmare metoda lui Quenouille dă

$$\hat{\theta} = N\hat{\theta}_N^0 - (N-1)\bar{\hat{\theta}}_{N-1}^i = NX_{(N)} - \frac{(N-1)^2}{N} X_{(N)} - \frac{N-1}{N} X_{(N-1)} =$$

$$= X_{(N)} + \frac{N-1}{N}[X_{(N)} - X_{(N-1)}].$$

Deoarece

$$M(\hat{\theta}) = \frac{N}{N+1}\,0 + \frac{N-1}{N}\,\frac{\theta}{N+1} = \theta\left[1 - \frac{1}{N(N+1)}\right],$$

se observă că avem o reducere a deplasării.

Raportul deplasărilor estimatorilor $\hat{\theta}_1 = \hat{\theta}_N^0$ și $\hat{\theta}_2 = \bar{\hat{\theta}}_{N-1}^i$ este

$$\frac{b_{\hat{\theta}_1}(\theta)}{b_{\hat{\theta}_2}(\theta)} = \frac{\theta/(N+1)}{\theta/N} = \frac{N}{N+1}$$

Statistica $G(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2)$ cu $R(N) = \dfrac{N}{N+1}$ este un estimator nedeplasat pentru θ.

Avem

$$\hat{\theta}_N^0 = (N+1)\,\hat{\theta}_1 - N\hat{\theta}_2 = (N+1)X_{(N)} - (N-1)X_{(N)} - X_{(N-1)} =$$

$$= X_{(N)} + [X_{(N)} - X_{(N-1)}] = 2X_{(N)} - X_{(N-1)}$$

Dacă luăm $\hat{\theta}_2 = X_{(N-1)}$, atunci deplasarea estimatorului θ_2 este

$$b_{\theta_2}(\theta) = \frac{N-1}{N+1}\,\theta - \theta = \frac{2\theta}{N+1}.$$

Deci pentru ca $G(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2)$ să fie estimator nedeplasat trebuie luat

$$R(N) = \frac{\theta/(N+1)}{2\theta/(N+1)} = 1/2,$$

G căpătînd forma

$$G(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2) = \frac{X_{(N)} - (1/2)\,X_{(N-1)}}{1-(1/2)} = 2X_{(N)} - X_{(N-1)}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Ne propunem să găsim relaţia dintre eroarea medie pătratică (*M.S.E.*) a estimatorului $\hat{\theta}_N^0$ şi a estimatorului $G(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2)$.

Avem

$$M.S.E\,(\hat{\theta}_N^0) = M[(\hat{\theta}_N^0 - \theta)^2] = \frac{2\theta^2}{(N-1)(N+2)}$$

şi deoarece G este un estimator nedeplasat

$$M.S.E\,[G(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2)] = D^2[G(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2)] = \frac{2\theta^2}{(N+1)(N+2)}.$$

Observaţie. Folosind estimtorul jackknife generalizat se elimină total deplasarea, fără a se mări eroarea medie pătratică.

Avem

$$M.S.E\,(\hat{\theta}) = \frac{2\theta^2(N^2 - N + 1)}{N^2(N+1)(N+2)}, \quad N \geqslant 2$$

ceea ce arată că

$$b_{\hat{\theta}}(\theta) < b_{\hat{\theta}_N^0}(\theta)$$

şi

$$M.S.E.\,(\hat{\theta}) < M.S.E.\,(\hat{\theta}_N^0)$$

În cele ce urmează vom lua în expresia estimatorului $G(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2)$

$$\hat{\theta}_1 = \hat{\theta}_N^0 \quad \text{şi} \quad \hat{\theta}_2 = \overline{\hat{\theta}}_{N-1}^i.$$

Definiţia 4. Dacă $\hat{\theta}_1$ şi $\hat{\theta}_2$ sînt estimatori pentru parametrul θ bazaţi pe o selecţie de volum N

$$b_{\hat{\theta}_j}(\theta) = M[\hat{\theta}_j - \theta] \neq 0, \quad j = 1,2$$

şi

$$\left| \lim_{N \to \infty} \frac{b_{\hat{\theta}_1}(\theta)}{b_{\hat{\theta}_2}(\theta)} \right| = 1 \tag{9}$$

vom spune că $\hat{\theta}_1$ şi $\hat{\theta}_2$ sînt estimatori cu acelaşi ordin de deplasare pentru θ.

Scanned with OKEN Scanner

Dacă

$$0 < \left| \lim_{N\to\infty} \frac{b_{\hat{\theta}_2}(\theta)}{b_{\hat{\theta}_2}(\theta)} \right| < 1 \tag{10}$$

vom spune că $\hat{\theta}_1$ şi $\hat{\theta}_2$ au acelaşi ordin de deplasare şi $\hat{\theta}_1$ este mai bun decît $\hat{\theta}_2$.

DEFINIŢIA 5. Cu $\hat{\theta}_1$ şi $\hat{\theta}_2$ ca în definiţia 4, fără condiţia $b_{\hat{\theta}_1}(\theta) \neq 0$ şi

$$\lim_{N\to\infty} \frac{b_{\hat{\theta}_1}(\theta)}{b_{\hat{\theta}_2}(\theta)} = 0 \tag{11}$$

vom spune că $\hat{\theta}_1$ are ordinul de deplasare mai scăzut decît $\hat{\theta}_2$.

Pentru a caracteriza valoarea jackknife ca metodă de micşorare a deplasării, trebuie să găsim o expresie generală pentru deplasarea lui $\hat{\theta}$ în termeni de deplasare lui θ_N^0.

TEOREMA 3. *Fie* $\hat{\theta}_N^0$ *un estimator pentru* θ *şi* $\hat{\theta}_2 = \bar{\hat{\theta}}_{N-1}^i$. *Atunci*

$$M(\hat{\theta}) = \theta + b_{\hat{\theta}_N^0}(\theta) + (N-1)\,\Delta b_{\hat{\theta}_N^0}(\theta), \tag{12}$$

unde

$$\Delta b_{\hat{\theta}_N^0}(\theta) = b_{\hat{\theta}_N^0}(\theta) - b_{\hat{\theta}_{N-1}^0}(\theta). \tag{13}$$

TEOREMA 4. *Dacă există* $p >$ *o astfel încît*

$$\lim_{N\to\infty} N^p\, b(\theta) = c(\theta) \neq 0 \quad \text{sau} \pm \infty$$

şi

$$\lim_{N\to\infty} N^{p+1}\, \Delta b\,(\theta) \text{ există},$$

atunci

i) *dacă* $p = 1$, $\hat{\theta}$ *are ordinul de deplasare mai scăzut decît* $\hat{\theta}_N^0$.

ii) *dacă* $p < 2$ *şi* $p \neq 1$, *atunci* $\hat{\theta}$ *şi* $\hat{\theta}_N^0$ *au acelaşi ordin de deplasare şi* $\hat{\theta}$ *este mai bun decît* $\hat{\theta}_N^0$.

iii) *dacă* $p = 2$, *atunci* $\hat{\theta}$ şi $\hat{\theta}_N^0$ *au acelaşi ordin de deplasare.*

iv) *dacă* $p > 2$, *atunci* $\hat{\theta}$ şi $\hat{\theta}_N^0$ *au acelaşi ordin de deplasare şi* $\hat{\theta}$ *este mai bun decît* $\hat{\theta}_N^0$.

Scanned with OKEN Scanner

Exemplul 4. În exemplul 1 am considerat

$$\hat{\theta}_N^0 = \frac{1}{N} \sum_1^N (X_j - \bar{X}_N)^2$$

ca estimator pentru σ^2. Urmează că

$$b_{\hat{\theta}_N^0}(\sigma^2) = -\frac{1}{N}\sigma^2,$$

astfel că

$$\lim_{N\to\infty} N b_{\hat{\theta}_N^0}(\sigma^2) = -\sigma^2 = c(\sigma^2).$$

Deoarece

$$\lim_{N\to\infty} N^2 \Delta\, b(\theta) \quad \text{există}$$

din teorema 4 punctul i) $\hat{\theta}$ are ordinul de deplsare mai scăzut decît $\hat{\theta}_N^0$; deoarece $\hat{\theta}$ este nedeplasat

$$\lim_{N\to\infty} \frac{b_{\hat{\theta}}(\sigma^2)}{b_{\hat{\theta}_N^0}(\sigma^2)} = \lim_{N\to\infty} \frac{0}{-\frac{1}{N}\sigma^2} = 0,$$

din definiţia 5, urmează că $\hat{\theta}$ are ordinul de deplasare mai scăzut decît $\hat{\theta}_N^0$.

Exemplul 5. În exemplul 3, $\hat{\theta}_N^0 = X_{(N)}$ a fost luat ca estimator pentru θ (punctul de trunchere al repartiţiei uniforme).
Avem

$$b_{X_{(N)}}(\theta) = -\frac{1}{N+1}\theta$$

şi din nou $p = 1$. Din teorema 4 punctul i), $\hat{\theta}$ are ordinul de deplasare mai scăzut decît $\hat{\theta}_N^0$ cu toate că în acest caz $\hat{\theta}$ nu este un estimator nedeplasat.
În particular

$$\lim_{N\to\infty} \frac{b_{\hat{\theta}}(\theta)}{b_{\hat{\theta}_N^0}(\theta)} = \lim_{N\to\infty} \left[-\frac{1}{N(N+1)}\theta \Big/ -\frac{1}{N+1}\theta \right] = 0$$

Exemplul 6. Dacă presupunem că estimatorul $\hat{\theta}_N^0$ este astfel încît

$$b_{\hat{\theta}_N^0}(\theta) = b/N^2$$

Scanned with OKEN Scanner

atunci

$$M(\bar{\hat{\theta}}^{i}_{N-1} - \theta) = b/(N-1)^2$$

și

$$b_{\hat{\theta}}(\theta) = N\frac{b}{N^2} - (N-1)\frac{b}{(N-1)^2} = -\frac{b}{N(N-1)},$$

ceea ce arată că $b_{\hat{\theta}}$ este de semn opus cu $b_{\hat{\theta}^0_N}$ și în valoare absolută este mai mare decît $b_{\hat{\theta}^0_N}$.

Deci trebuie să luăm (după teorema 1) în expresia lui G, $R(N) = (N-1)^2/N^2$ pentru ca G să fie nedeplasat.

Din teorema 4 punctul iii) și din considerațiile anterioare urmează că $\hat{\theta}$ și $\hat{\theta}^0_N$ au același ordin de deplasare

$$\frac{b_{\hat{\theta}}(\theta)}{b_{\hat{\theta}^0_N}(\theta)} = \frac{-\dfrac{b}{N(N+1)}}{\dfrac{b}{N^2}} = -\frac{N}{N+1},$$

astfel încît

$$\lim_{N\to\infty} \frac{b_{\hat{\theta}}(\theta)}{b_{\hat{\theta}^0_N}(\theta)} = 1.$$

§2. Repartiții asimptotice

2.1. Introducere

În paragraful anterior s-a prezentat jackknife ca metodă de reducere a deplasării. Că aceasta a fost motivația pentru jackknife ca metodă statistică, proprietățile sale asimptotice o fac o metodă generală pentru analiza datelor de observație. Tukey (1957) presupune că pseudovalorile $\hat{\theta}_i$ (date de (7)) sînt variabile aleatoare independente și stabilește

TEOREMA 5. *Variabila aleatoare*

$$\sqrt{n}(\hat{\theta} - \theta)\frac{1}{\sqrt{(n-1)^{-1}\sum_{1}^{N}(\hat{\theta}_j - \theta)^2}} \tag{14}$$

este aproximativ, repartizată $t(n-1)$.

Scanned with OKEN Scanner

2.2. Teoremele lui Miller (1964) și estimatorii jackknife generalizați

În cele ce urmează vom presupune $k = 1$ (deci $N = n$); că $\hat{\theta}_N^0$ este un estimator nedeplasat pentru θ și că $g(\hat{\theta}_n^0)$ este o transformare a statisticii θ_n^0. În general $g(\hat{\theta}_n^0)$ va fi un estimator deplasat pentru $g(\theta)$, deplasarea fiind datorită nelinearității transformării. În multe cazuri, deplasarea va fi de ordinul $\frac{1}{n}$. Deci în astfel de cazuri poate fi folosită tehnica jackknife.

Fie

$$\hat{\theta}_i = ng(\bar{X}) - (n-1)g(\bar{X}^i)$$

unde

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_1^N X_j, \quad \bar{X}^i = \frac{1}{n-1}\sum_{j\neq i} X_j \text{ pentru } i = 1,\ldots,n$$

$$\hat{\theta} = \frac{1}{n}\sum_1^n \hat{\theta}_i \quad \text{și} \quad \theta = g(\mu).$$

Au loc teoremele

TEOREMA 6. (Miller (1964). *Fie $\{X_i\}$ un șir de variabile aleatoare, identic repartizate cu media μ și dispersia $\sigma^2 (0 < \sigma^2 < \infty)$. Fie g o funcție definită pe dreapta reală care în vecinătatea lui μ are derivata de ordinul doi mărginită. În aceste condiții, pentru $n \to \infty$*

(15) $$\sqrt{n}(\hat{\theta} - \theta)$$

este repartizată $N(0, \sigma^2(g'(\mu))^2)$.

TEOREMA 7. (Miller (1964)). *Fie $\{X_i\}$ un șir de variabile aleatoare independente, identic repartizate cu media μ și dispersia σ^2, $0 < \sigma^2 < \infty$. Fie g o funcție cu prima derivată continuă în vecinătatea lui μ. În aceste condiții, pentru $n \to \infty$*

(16) $$s_g^2 = \frac{1}{n-1}\sum_1^n (\hat{\theta}_i - \hat{\theta})^2 \xrightarrow{P} \sigma^2 (g'(\mu))^2.$$

Extindem teoremele lui Miller (6 și 7) folosind extimatorii jackknife generalizați.

În acest scop vom nota pseudovalorile asociate cu $G(\hat{\theta}_n^0)$ prin $G_i(\hat{\theta}_n^0)$

(17) $$G_i(\hat{\theta}_n^0) = \frac{\hat{\theta}_n^0 - R(n)\ \hat{\theta}_{n-1}^i}{1 - R(n)}$$

TEOREMA 6'. *Dacă la condițiile teoremei 6, considerăm*

(18) $$\hat{\theta}_n^0 = g(\bar{X}_n)$$

Scanned with OKEN Scanner

(19) $$\alpha = \lim_{n\to\infty} \frac{R(n)}{(n-1)(1-R(n))} \neq \pm\infty, 0,$$

atunci variabila aleatoare

(15′) $$\sqrt{n}\,[G(\hat{\theta}_n^0) - \theta],$$

este asimptotic repartizată $N[0,\ \sigma^2(g'(\mu))^2]$.

Demonstrație. Mai întîi arătăm că cu o probabilitate apropiată de unitate, $\bar{X}_n$ și $\bar{X}_{n-1}^i$ cad simultan într-un interval arbitrar de mic centrat în μ. Fie $I_1 = (\mu - 3\Delta,\ \mu + 3\Delta)$, $\Delta > 0$ orice vecinătate a lui μ în care g'' este mărginită. Putem scrie :

(20) $$P\left[\max_{1\leqslant j\leqslant n} \frac{|X_j|}{n} > \Delta\right] = [1 - F_{|X|}\ (n\Delta)]^n,$$

Pentru a găsi $\lim_{n\to\infty} [1 - F_{|X|}\ (n\Delta)]^n$, considerăm

(21) $$\lim_{t\to\infty} \ln[1 - (1 - F_{|X|}\ (t))]^t =$$
$$= \lim_{t\to\infty} t[-(1 - F_{|X|}(t)) + 0(1 - F_{|X|}(t))^2].$$

Cum pentru $t > 0$,

(22) $$t(1 - F_{|X|}(t)) = t\int_t^\infty dF_{|X|}(x) \leqslant \int_t^\infty x\,dF_{|X|}(x)$$

și $\sigma^2 < \infty$, $M(|X|) < \infty$, (22) există.

Urmează că

$$\lim_{t\to\infty} t(1 - F_{|X|}\ (t)) = 0,$$

ceea ce implică

$$\lim_{t\to\infty} t\{0[(1 - F_{|X|}(t))^2]\} = 0.$$

Deci

$$[F_{|X|}\ (n\Delta)]^n \to 1$$

și

(23) $$\lim_{n\to\infty} P\left[\max_{1\leqslant j\leqslant n} \frac{|X_j|}{n} > \Delta\right] = 0.$$

Deoarece

$$\bar{X}_{n-1}^i = \frac{1}{n-1}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} X_j = \frac{n}{n-1}\bar{X}_n - \frac{1}{n-1}X_i$$

Scanned with OKEN Scanner

urmează că

$$|\bar{X}_{n-1}^{i} - \mu| \leqslant \frac{n}{n-1}\left|\bar{X}_n - \frac{n-1}{n}\mu\right| + \frac{1}{n-1}|X_i| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{n}{n-1}\left[|\bar{X}_n - \mu| + \frac{|\mu|}{n} + \frac{X_i}{n}\right]$$

Dacă punem $I_2 = (-3\Delta, 3\Delta)$, atunci

$$\lim_{n\to\infty} P\left[(\bar{X}_n - \mu) \in I_2, \bigcap_{j=1}^{n} (\bar{X}_{n-1}^{j} - \mu) \in I_2\right] = \lim_{n\to\infty} P\,[\max|\bar{X}_{n-1}^{j} - \mu| <$$

$$< 3\Delta] \geqslant \lim_{n\to\infty} P\left[\frac{n}{n-1}\left(|\bar{X}_n - \mu| + \frac{|\mu|}{n} + \frac{1}{n}\max\{|X_j|\}\right) < 3\Delta\right] =$$

$$= \lim_{n\to\infty} P\left[|\bar{X}_n - \mu| + \frac{1}{n}\max\{|X_j|\} < 3\Delta - \frac{1}{n}(3\Delta + |\mu|\right] \geqslant$$

$$\geqslant \lim_{n\to\infty} P\left[|\bar{X}_n - \mu| + \frac{1}{n}\max\{|X_j|\} < 2\Delta\right] \geqslant$$

$$\geqslant \lim_{n\to\infty} P\left[|\bar{X}_n - \mu| < \Delta, \frac{1}{n}\max\{|X_j\} < \Delta\right] =$$

$$= \lim_{n\to\infty} P\left[\frac{1}{n}\max\{|X_j|\} < \Delta\right] P\left[|\bar{X}_n - \mu| < \Delta, \frac{1}{n}\max\{|X_j|\} < \Delta\right] = 1,$$

deoarece $\bar{X}_n \xrightarrow[P]{} \mu$.

Urmează că

$$\lim_{n\to\infty} P\left[\bar{X}_n \in I_1, \bigcap_{j=1}^{n} \bar{X}_{n-1}^{j} \in I_1\right] = 1 \tag{24}$$

ceea ce permite să scriem

$$g(\bar{X}_{n-1}^{i}) = g(\bar{X}_n) + (\bar{X}_{n-1}^{i} - \bar{X}_n)\, g'(\bar{X}_n) + \frac{(\bar{X}_{n-1}^{i} - \bar{X}_n)^2}{2}\, g''(Y_i).$$

unde Y_i este o variabilă aleatoare astfel incît pentru valori date pentru $\bar{X}_n$ și $\bar{X}_{n-1}^{i}$, Y_i ia valori ce satisfac cu probabilitatea 1, inegalitatea

$$|\bar{x}_n - y_i| < |\bar{x}_n - \bar{x}_{n-1}^{i}|.$$

Scanned with OKEN Scanner

Atunci

$$G(\theta_n^0) = \frac{1}{1 - R(n)} \left\{ g(\bar{X}_n) - R(n) \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} [g(\bar{X}_n) - (\bar{X}_{n-1}^i - \bar{X}_n)] g'(\bar{X}_n) + \right.$$

$$\left. + \frac{(\bar{X}_{n-1}^i - \bar{X}_n)^2}{2} g''(Y_i) \right\} =$$

$$= g(\bar{X}_n) - \frac{R(n)}{2(1 - R(n))n} \sum_{i=1}^{n} (\bar{X}_{n-1}^i - \bar{X}_n)^2 g''(Y_i)$$

și

$$\sqrt{n} [G(\hat{\theta}_n^0) - \theta] = \sqrt{n} [g(\bar{X}_n) - g(\mu)] -$$

$$- \frac{R(n)}{2(1 - R(n)) \sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} (\bar{X}_{n-1}^i - \bar{X}_n)^2 g''(Y_i) = \sqrt{n}[g(\bar{X}_n) - g(\mu)] -$$

$$- \frac{R(n)}{2\sqrt{n}(n-1)^2(1 - R(n))} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X}_n)^2 g''(Y_i).$$

Cu o probabilitate tinzînd către unu

$$g(\bar{X}_n) = g(\mu) + (\bar{X}_n - \mu) g'(Y)$$

unde $|Y - \mu| < |\bar{X}_n - \mu|$, și cum

$$g'(Y) \xrightarrow[n \to \infty]{P} g(\mu),$$

urmează că $\sqrt{n}[g(\bar{X}_n) - g(\mu)]$ este asimptotic $N[0, \sigma^2 (g'(\mu))^2]$.

În cele ce urmează presupunem că pentru toți $t \in I_1$,

$$|g''(t)| < M$$

Atunci pentru $\bar{X}_n$, $\bar{X}_{n-1}^i \in I_1$,

$$\left| \sum_{1}^{n} (x_i - \bar{x}_n)^2 g''(y_i) \right| < M \sum_{1}^{n} (x_i - \bar{x}_n)^2.$$

Cum dispersia de selecție este consistentă și α este finit, obținem

$$\frac{1}{2\sqrt{n}} \left[\frac{R(n)}{(n-1)(1 - R(n))} \right] \left[\frac{1}{n-1} \sum_{1}^{n} (X_i - \bar{X}_n)^2 g''(Y_i) \right] \xrightarrow{P} 0$$

ceea ce arată că $\sqrt{n}[G(\hat{\theta}_n^0) - \theta]$ este asimptotic repartizată $N[0, \sigma^2 (g'(\mu))^2]$.
Cu aceasta teorema este demonstrată.

Scanned with OKEN Scanner

TEOREMA 7'. *Dacă la condițiile teoremei* 7, (16) *trece în*

$$s_g^2 = \frac{1}{n-1} \sum_1^n [G_i(\hat{\theta}_n^0) - G(\hat{\theta}_n^0)]^2, \tag{16'}$$

atunci $s_g^2 \xrightarrow{P} \sigma^2[g'(\mu)]^2\alpha^2$.

Demonstrație. Ca și în teorema 6', egalitatea

$$g(\bar{X}_{n-1}^i) = g(\bar{X}_n) + (\bar{X}_{n-1}^i - \bar{X}_n)\, g'(Y_i)$$

unde

$$|\bar{X}_n - Y_i| < |\bar{X}_n - \bar{X}_{n-1}^i|$$

are loc pentru $n \to \infty$, cu probabilitate tinzînd către unu.

Putem scrie

$$s_g^2 = \frac{1}{(n-1)\,(1-R(n))^2} \sum_{i=1}^n \Big[g(\bar{X}_n) - R(n)\, g(\bar{X}_n^i) - g(\bar{X}_n) +$$

$$+ \frac{R(n)}{n} \sum_{j=1}^n g(\bar{X}_{n-1}^j) \Big]^2 =$$

$$= \left(\frac{R(n)}{1-R(n)}\right)^2 \cdot \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n \left[g(\bar{X}_n^i) - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n g(\bar{X}_{n-1}^j) \right]^2 =$$

$$= \left(\frac{(R(n)}{1-R(n)}\right)^2 \cdot \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n \Big[(\bar{X}_{n-1}^i - \bar{X}_n)\, g'(Y_i) -$$

$$- \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (\bar{X}_{n-1}^j - \bar{X}_n)\, g'(Y_j) \Big]^2 =$$

$$= \left(\frac{R(n)}{1-R(n)}\right)^2 \cdot \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n \Big[-\frac{1}{n-1} (X_i - \bar{X}_n)\, g'(Y_i) + \tag{25}$$

$$+ \frac{1}{n(n-1)} \sum_{j=1}^n (X_j - \bar{X}_n)\, g'(Y_j) \Big]^2 =$$

$$= \left(\frac{R(n)}{1-R(n)}\right)^2 \left(\frac{1}{n-1}\right)^3 \sum_{i=1}^n \Big[(X_i - \bar{X}_n)\, g'(\mu) +$$

$$+ (X_i - \bar{X}_n)\,(g'(Y_i) - g'(\mu)) -$$

$$- \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (X_j - \bar{X}_n)\,(g'(Y_j) - g'(\mu)) \Big]^2 =$$

$$= \left(\frac{1}{n-1}\right)^2 \left(\frac{R(n)}{1-R(n)}\right)^2 [g'(\mu)]^2 \left[\frac{1}{n-1} \sum_1^n (X_i - \bar{X}_n)^2 + \right.$$

$$\left. + \textit{termeni care tind, în probabilitate, către zero} \right],$$

ceea ce demonstrează teorema.

Scanned with OKEN Scanner

Observație. Pentru $R(n) = (n-1)/n$, se obține demonstrația teoremei 7.

TEOREMA 8. *În condițiile teoremei* 6'

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\frac{\alpha[G(\hat{\theta}_n^0) - \theta]\sqrt{n(n-1)}}{\sqrt{\sum_1^n [G_i(\hat{\theta}_n^0) - G(\hat{\theta}_n^0)]^2}} < x\right\} = \Phi(x).$$

Demonstrație. Din teorema 6'

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\frac{\sqrt{n}\,[G(\hat{\theta}_n^0) - \theta]}{\sigma[g'(\mu)]} < x\right\} = \Phi(x)$$

și deci

$$\alpha\sqrt{n}\,[G(\hat{\theta}_n^0) - \theta] \xrightarrow{R} N[0, \alpha^2\sigma^2(g'(\mu))^2].$$

Din teorema 7',

$$s_g^2 \xrightarrow{P} \alpha^2\sigma^2[g'(\mu)]^2,$$

ceea ce demonstrează teorema

2.3. Teoremele lui Miller (1964) și *U*-statisticile

Arvesen (1969) aplică tehnica jackknife la *U*-statistici și la funcții de mai multe *U*-statistici.

Extindem cele două teoreme ale lui Miller la *U*-statistici.

Fie $X_1, \ldots, X_n$ variabile aleatoare independente, identic repartizate și $f(X_1, \ldots, X_m)$ un estimator nedeplasat pentru un parametru η, unde m este cel mai mic număr de observații necesar pentru estimarea parametrului η.

În aceste condiții există o funcție simetrică de

$f(X_1, \ldots, X_m)$ dată de

$$f^*(X_1, \ldots, X_m) = \frac{1}{m!}\Sigma^* f(X_{\beta_1}, \ldots, X_{\beta_m})$$

unde sumarea se face după toate cele $m!$ permutări ale indicilor.

U-statistica pentru parametrul n poate fi scrisă în forma

$$U(X_1, \ldots, X_n) = \frac{1}{C_n^m}\Sigma^{**} f^*(X_{\alpha_1}, \ldots, X_{\alpha_m})$$

unde sumarea se face după toate combinările de m întregi $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ luate din $1, 2, \ldots, n$.

Scanned with OKEN Scanner

U-statistica este nedeplasată şi deci

$$M[U(X_1,\ldots,X_n)] = \eta.$$

Fie

$$f_c^*(x_1,\ldots,x_c) = M[f^*(X_1,\ldots,X_c,\ X_{c+1},\ldots,X_m \mid X_1 = x_1,\ldots,X_c = x_c)]$$

şi

$$\zeta_c = D^2[f_c^*(X_1,\ldots,X_c)],\quad c = 1,\ldots,m;\quad \zeta_0 = 0.$$

TEOREMA 9 (Hoeffding (1948)). *Fie $X_1,\ldots,X_n$ variabile aleatoare independente, identic repartizate. Dacă $f^*(X_1,\ldots,X_m)$ este o statistică cu valori reale, simetrică cu media η şi momentul de ordinul doi finit, atunci, cînd $n\to\infty$, $\sqrt{n}(U-\eta)$ are asimptotic o repartiţie $N(0, m^2\zeta_1)$.*

TEOREMA 10 (Berk (1966)). *Fie $X_1,\ldots,X_n,\ldots$ variabile aleatoare reale, identic repartizate. Dacă $f^*(X_1,\ldots,X_m)$ este o statistică cu valori reale, simetrică, cu media η şi $M|f^*(X_1,\ldots,X_m)| < \infty$, atunci*

$$U(X_1,\ldots,X_n) \xrightarrow[a.s.\ L_1]{n\to\infty} \eta.$$

Demonstraţie. Fie $Y_n=\{X_{(1)},\ldots,X_{(n)}\}$ mulţimea statisticilor de ordine şi $\mathcal{F}_n = \mathcal{B}(Y_n, X_{n+1}, X_{n+2},\ldots)$ σ — cîmpul generat de $Y_n, X_{n+1}, X_{n+2},\ldots$ Punînd

$Z_n = M[f^*(X_1,\ldots,X_m)\,|\,\mathcal{F}_n = U(X_1,\ldots,X_n)$ a.s. şi cum $\mathcal{F}_n \supset \mathcal{F}_{n+1}$ obţinem

$$M[Z_n \mid \mathcal{F}_{n+1}] = M[f^*(X_1,\ldots,X_m) \mid \mathcal{F}_{n+1}|] = Z_{n+1}\ a.s.$$

Deoarece $\{Z_n, \mathcal{F}_n\}$ este o martingală inversă şi din teorema de convergenţă a martingalei există Z_∞ astfel încît

$$U(X_1,\ldots,X_n) = Z_n \xrightarrow[a.s.\ L_1]{} Z_\infty.$$

Dat $\varepsilon > 0$, fie

$$A = [U(X_1,\ldots,X_n) > \eta + \varepsilon].$$

Deoarece orice permutare finită a şirului $X_1,\ldots,X_n,\ldots$ lasă evenimentul A invariant, din teorema Hewitt-Savage (Feller (1966)), $P(A) = 0$ sau 1.

Deoarece

$$M(Z_\infty) = M(Z_m) = \eta,\quad P(A) = 0.$$

Considerînd evenimentul

$$B = [U(X_1,\ldots,X_n) < \eta - \varepsilon]$$

şi procedînd ca pentru evenimentul A, rezultă teorema.

Scanned with OKEN Scanner

Introducem notaţiile

$$U_n^0 = \frac{1}{C_n^m} \Sigma^{**} f^*(X_{\alpha_1}, \ldots, X_{\alpha_m})$$

$$U_{n-1}^i = \frac{1}{C_{n-1}^m} \Sigma^{***} f^*(X_{\beta_1^i}, \ldots, X_{\beta_m^i})$$

unde sumarea se face după toate combinările de m întregi $(\beta_1^i, \ldots, \beta_m^i)$ aleşi din

$$1, \ldots, i-1, \; i+1, \ldots, n.$$

Fie g o funcţie cu valori reale şi

$$\hat{\theta}_n^0 = g(U_n^0), \qquad \hat{\theta}_{n-1}^i = g(U_{n-1}^i)$$

$$\hat{\theta}_i = n\hat{\theta}_n^0 - (n-1)\,\hat{\theta}_{n-1}^i \qquad \text{pentru } i = 1, \ldots, n$$

$$\hat{\theta} = \frac{1}{n} \sum_1^n \hat{\theta}_i, \qquad \theta = g(\eta)$$

$$s_g^2 = \frac{1}{n-1} \sum_1^n (\hat{\theta}_i - \hat{\theta})^2.$$

TEOREMA 11. *Fie $X_1, \ldots, X_n$ variabile aleatoare independente, identic repartizate şi fie $f^*(X_1, \ldots, X_m)$ o statistică cu valori reale cu media η şi momentul de ordinul doi finit. Fie g o funcţie definită pe dreapta reală, care în vecinătatea parametrului η are derivata de ordinul doi mărginită. În aceste condiţii*

$$\sqrt{n}\,(\hat{\theta} - \theta) \xrightarrow[R]{n\to\infty} N(0, m^2\zeta_1[g'(\eta)]^2).$$

Demonstraţie. Fără a micşora generalitatea, presupunem $\eta = 0$. Fie $I = (-3\Delta, +3\Delta)$, $\Delta > 0$ orice vecinătate a lui 0 în care g'' este mărginită. Atunci

$$U_n^0 \xrightarrow[P]{n\to\infty} 0$$

şi deci

$$P\{U_n^0 \in (-\Delta, \; \Delta)\} \to 1. \tag{26}$$

Avem

$$U_{n-1}^i = C_n^m (C_{n-1}^m)^{-1})\, U_n^0 - (C_{n-1}^m)^{-1} \Sigma f^*(X_i, \; X_{\alpha_1^i}, \ldots, X_{\alpha_{m-1}}), \tag{27}$$

unde sumarea se face după toate combinările de $m-1$ întregi $(\alpha_1^i, \ldots, \alpha_{m-1}^i)$ aleşi din $(1, \ldots, i-1, \; i+1, \ldots, n)$.

Scanned with OKEN Scanner

Fie

$$Y_i = (C_{n-1}^{m-1})^{-1} \Sigma f^*(X_i,\ X_{\alpha_1^i}, \ldots, X_{\alpha_{m-1}^i}), \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Pentru n suficient de mare

$$D^2(Y_i) \leqslant \zeta_1 + 1, \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Folosind faptul că $Y_1, \ldots, Y_n$ constituie un şir de variabile aleatoare interschimbabile şi inegalitatea lui Cebîşev găsim

$$P\{\max_{1 \leqslant i \leqslant n} |mY_1|/(n-m), \ldots, |mY_m|/(n-m) > \Delta\} \leqslant$$

$$\leqslant nP\{|mY_1|/(n-m) < \Delta\} \leqslant nm^2(\zeta_1 + 1)/((n-m)^2\Delta^2) \xrightarrow[n \to \infty]{} 0.$$

Din (26), (27) şi (28) urmează că

$$P\{U_n^0,\ U_{n-1}^1, \ldots, U_{n-1}^n \in I \ \textit{simultan}\} \to 1. \tag{29}$$

De asemenea, deoarece dacă

$$P\{E_n\} \to 1, \quad \lim P\{A_n\} = \lim P\{A_n E_n\}$$

putem presupune că (29) are loc.

Putem scrie

$$\hat{\theta}_i = ng(U_n^0) - (n-1)\, g(U_{n-1}^i) = ng(U_n^0) -$$

$$- (n-1)\left\{g(U_n^0) + (U_{n-1}^i - U_n^0)\, g'(U_n^0) + (U_{n-1}^i - U_n^0)^2 \frac{g''(\xi_i)}{2}\right\} \tag{30}$$

unde ξ_i variază între U_n^0 şi U_{n-1}^i, $i = 1, 2, \ldots, n$. Deci

$$\hat{\theta} = n^{-1} \sum_1^n \hat{\theta}_i = g(U_n^0) - (n-1)\, n^{-1} \sum_1^n (U_{n-1}^i - U_n^0)\, g'(U_n^0) -$$

$$- (n-1)\, n^{-1} \sum_1^n g''(\xi_i)\, (U_{n-1}^i - U_n^0)^{2/2} = \tag{31}$$

$$= g(U_n^0) - (n-1)\, n^{-1} \sum_1^n g''(\xi_i)\, (U_{n-1}^i - U_n^0)^{2/2},$$

deoarece

$$n^{-1} \sum_1^n U_{n-1}^i = U_n^0$$

Scanned with OKEN Scanner

(31) se mai poate scrie

$$(32)\quad \sqrt{n}\,(\hat{\theta}-0)=\sqrt{n}\,(g(U_n^0)-g(0))-(n-1)\,n^{-1}\sum_1^n g''(\xi_i)\,(U_{n-1}^i-U_n^0)^{2/2}.$$

Pentru $U_n^0 \in I$,

$$g(U_n^0)=g(0)+U_n^0 g'(\xi)$$

unde ξ variază între U_n^0 şi 0.

Din teorema 9 (Hoeffding (1948)),
asimptotic $\sqrt{n}U_n^0$ este repartizată $N(0, m^2\zeta_1)$ şi

$$g'(\xi) \xrightarrow[P]{} g'(0)$$

cu ξ definit arbitrar dacă $U_n^0 \notin I$.

Din teorema lui Slutsky, primul termen din membrul drept al relaţiei (32) este

$$N(0, m^2\zeta_1\,(g'(0))^2).$$

Aplicînd din nou teorema lui Slutsky

$$(33)\qquad (n-1)^{-\frac{1}{2}}\sum_1^n g''(\xi_i)\,(U_{n-1}^i-U_n^0)^{2/2}\xrightarrow[P]{}0.$$

Considerăm expresia

$$(n-1)\sum_1^n (U_{n-1}^i-U_n^0)^2=(n-1)\left\{\sum_1^n (U_{n-1}^i)^2-n\,(U_n^0)^2\right\}=$$

$$(34)\qquad =(n-1\left[(C_{n-1}^m)^{-2}\sum_{i=1}^n \{\Sigma_i f^*(X_{\alpha_1^i},\ldots,X_{\alpha_m^i})\,f^*(X_{\beta_1^i},\ldots,X_{\beta_m^i})\}\right.$$

$$-n(C_n^m)^{-2}\,\Sigma\, f^*(X_{\alpha_1},\ldots,X_{\alpha_m})\,f^*(X_{\beta_1},\ldots,X_{\beta_m}),$$

unde: Σ_i arată că sumarea se face după toate combinările de m întregi $(\alpha_1^i,\ldots,\alpha_m^i)$ din $(1,\ldots,i-1,\ i+1,\ldots,n)$ şi toate combinările $(\beta_1^i,\ldots,\beta_m^i)$ de m întregi din $(1,\ldots,i-1,\ i+1,\ldots,n)$,

Σ arată că sumarea se face după toate combinările de m întregi $(\alpha_1,\ldots,\alpha_m)$ din $(1,\ldots,n)$ şi toate combinările de m întregi $(\beta_1,\ldots,\beta_m)$ din $(1,\ldots,n)$.

(34) se mai scrie

$$(n-1)\left\{(C_{n-1}^m)^{-2}\sum_{c=0}^m (n-2m+c)\,\Sigma_c f^*(X_{\alpha_1},\ldots,X_{\alpha_m})\,f^*(X_{\beta_1},\ldots,X_{\beta_m})-\right.$$

$$(35)\qquad \left.-n(C_n^m)^{-2}\sum_{c=0}^m \Sigma_c f^*(X_{\alpha_1},\ldots,X_{\alpha_m})\,f^*(X_{\beta_1},\ldots,X_{\beta_m})\right\}=$$

$$=\frac{n-1}{n(C_{n-1}^m)^2}\sum_{c=0}^m (cn-m^2)\,\Sigma_c\{f^*(X_{\alpha_1},\ldots,X_{\alpha_m})\,f^*(X_{\beta_1},\ldots,X_{\beta_m})\},$$

Scanned with OKEN Scanner

unde Σ_c arată că sumarea se face după toate combinările de m întregi $(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$ din $(1, \ldots, n)$ și toate combinările de m întregi $(\beta_1, \ldots, \beta_m)$ din $(1, \ldots, n)$ având exact c membri comuni.

Fie

$$U_c = \frac{1}{C_n^c C_{n-c}^{m-c} C_{m-n}^{m-c}} \Sigma f^*(X_{\alpha_1}, \ldots, X_{\alpha_c}, X_{\beta_1}, \ldots, X_{\beta_{m-c}}) \times$$

(36)

$$\times f^*(X_{\alpha_1}, \ldots, X_{\alpha_c}, X_{\gamma_1}, \ldots, X_{\gamma_{m-c}})$$

unde sumarea se face după toate mulțimile de întregi $(\alpha_1, \ldots, \alpha_c)$, $(\beta_1, \ldots, \beta_{m-c})$, $(\gamma_1, \ldots, \gamma_{m-c})$ disjuncte, alese din $(1, \ldots, n)$.

U_c astfel definită este o U-statistică cu media ζ_c.

Prin ipoteză

$$M(f^*(X_1, \ldots, X_m))^2 < \infty$$

iar din teorema 10 (Berk (1966)) $U_c \xrightarrow[a.s.]{} \zeta_c$ și deci

(37)
$$U_c \xrightarrow[P]{n \to \infty} \zeta_c.$$

Ținînd seama de (36) în (35) și folosind (37) obținem

$$(n-1) \sum_1^n (U_{n-1}^i - U_n^0)^2 = (n-1) n^{-1} (C_{n-1}^m)^{-2} \times$$

(38)

$$\times \sum_{c=0}^{m} (cn - m^2) C_n^c C_{n-c}^{m-c} C_{n-m}^{m-c} U_c \xrightarrow[P]{n \to \infty} m^2 \zeta_1.$$

Dacă (29) are loc

$$g''(\xi_i) < M, \qquad i = 1, \ldots, n$$

pentru $0 < M < +\infty$ și din (33) și (38) rezultă teorema.

TEOREMA 12. *Fie $X_1, \ldots, X_n$ variabile aleatoare independente, identic repartizate și $f^*(X_1, \ldots, X_m)$ o statistică cu valori reale cu media η și momentul de ordinul doi finit. Fie g o funcție definită pe dreapta reală, care în vecinătatea lui η are prima derivată continuă. În aceste condiții*

$$s_g^2 \xrightarrow[P]{n \to \infty} [g'(\eta)]^2 m^2 \zeta_1.$$

Demonstrație. Fără a restrînge generalitatea presupunem $\eta = 0$. (29) are loc. În acest caz

$$g(U_{n-1}^i) = g(U_n^0) - (U_{n-1}^i - U_n^0) g'(\tau_i)$$

pentru $i = 1, \ldots, n$ unde τ_i variază între U_m^0 și U_{n-1}^i.

Scanned with OKEN Scanner

Deci

$$s_g^2 = \frac{1}{n-1} \sum_1^n (\hat{\theta}_i - \hat{\theta})^2 = (n-1) \sum_1^n (\hat{\theta}_{n-1}^i - \hat{\theta}_{n-1})^2,$$

unde

$$\hat{\theta}_{n-1} = n^{-1} \sum_1^n \hat{\theta}_{n-1}^i$$

$$s_g^2 = (n-1) \sum_1^n \left(g(U_{n-1}^i - n^{-1} \sum_1^n g(U_{n-1}^i) \right)^2 =$$

$$= (n-1) \sum_1^n \left((U_{n-1}^i - U_n^0)\, g'(\tau_i) - n^{-1} \sum_1^n (U_{n-1}^j - U_n^0)\, g'(\tau_j) \right)^2 =$$

$$= (n-1) \sum_1^n \Big\{ (U_{n-1}^i - U^0)\, g'(0) + (U_{n-1}^i - U_n^0)\, (g'(\tau_i) - g'(0)) -$$

$$- n^{-1} \sum_1^n (U_{n-1}^j - U_n^0)\, g'(\tau_j) \Big\}^2,$$

sau

$$s_g^2 = [g'(0)]^2 (n-1) \sum_1^n (U_{n-1}^i - U_n^0)^2 +$$

$$+ (n-1) \sum_1^n \Big\{ (U_{n-1}^i - U_n^0)\, (g'(\tau_i) - g'(0)) -$$

$$- n^{-1} \sum_1^n (U_{n-1}^j - U_n^0)\, (g'(\tau_j) - g'(0)) \Big\}^2 + X - \text{termeni produs.}$$

Din (38)

$$[g'(0)]^2 (n-1) \sum_1^n (U_{n-1}^i - U_n^0)^2 \xrightarrow[P]{} [g'(0)]^2 m^2 \zeta_1.$$

Teorema este demonstrată dacă arătăm că al doilea termen din expresia lui $s_g^2 \xrightarrow[P]{} 0$.

Fie $h(x) = g'(x) - g'(0)$. Dacă arătăm că

$$(39) \qquad (n-1) \sum_1^n (U_{n-1}^i - U_n^0)^2 (h(\tau_i))^2 \xrightarrow[P]{n \to \infty} 0$$

al doilea termen din expresia lui $s_g^2 \xrightarrow[P]{} 0$.

Scanned with OKEN Scanner

Deoarece g' este continuă în vecinătatea lui zero, pentru $\varepsilon > 0$ există $\Delta_\varepsilon > 0$ astfel încît pentru $x \in I_\varepsilon = (-\Delta_\varepsilon, \Delta_\varepsilon)$

$$|h(x)| < \varepsilon.$$

Pentru $U_n^0, U_{n-1}^1, \ldots, U_{n-1}^n \in I_\varepsilon$

$$(n-1)\sum_1^n (U_{n-1}^i - U_n^0)^2 (h(\tau_i))^2 \leqslant$$

(40)

$$\leqslant \varepsilon^2 (n-1)\sum_1^n (U_{n-1}^i - U_n^0)^2 \xrightarrow[P]{} \varepsilon^2 m^2 \zeta_1.$$

Deoarece ε este arbitrar, membrul stîng al inegalității anterioare $\xrightarrow[P]{} 0$, ceea ce demonstrează teorema.

Observație. În gruparea $N = nk$, am presupus $k = 1$.

TEOREMA 13. *Fie $X_1, X_2, \ldots, X_N$ variabile aleatoare independente identic repartizate și $f^*(X_1, \ldots, X_m)$ o statistică cu valori reale, simetrică cu media η și momentul de ordinul doi finit. Fie g o funcție definită pe dreapta reală, care în vecinătatea parametrului η are prima derivată continuă.*

Atunci

$$\sqrt{n}(\hat{\theta} - \theta)\frac{1}{s_g} \xrightarrow[R]{} t(n-1). \tag{41}$$

2.4. Estimatori jackknife generalizați și U-statistici

În condițiile § 2.3. premergătoare teoremei 9 fie

$$\theta = g(\eta) \text{ și } \hat{\theta}_n^0 = g(U)$$

unde g este o funcție definită pe dreapta reală, cu a doua derivată mărginită în vecinătatea lui η.

TEOREMA 14. *Variabila aleatoare*

$$\frac{\alpha\sqrt{n(n-1)}\,[G(\hat{\theta}_n^0) - \theta]}{\sqrt{\sum_1^n [G_i(\hat{\theta}_n^0) - G(\hat{\theta}_n^0)]^2}} \xrightarrow[R]{n\to\infty} N(0,1). \tag{42}$$

Observație. Dacă $R(n) = \dfrac{n-1}{n}$, atunci $\dfrac{R(n)}{1-R(n)} \cdot \dfrac{1}{n-1} = 1$ și deci cînd $G(\hat{\theta}_n^0) = \hat{\theta}$, $\alpha = 1$.

Scanned with OKEN Scanner

TEOREMA 15. *Fie* $b(\theta) \neq 0$ *şi presupunem că există* $p > 0$ *astfel încît*

$$\lim_{n\to\infty} n^p\, b(\theta) = c(\theta) \neq 0 \quad \textit{sau} \quad \pm\infty.$$

Atunci dacă

$$R(n) = \left(\frac{n-1}{n}\right)^p$$

$G(\hat{\theta}_n^0)$ *are ordinul de deplasare mai scăzut decît* $\hat{\theta}_n^0$ *şi dacă sînt satisfăcute condiţiile teoremei* 14 *atunci*

$$\frac{[G(\hat{\theta}_n^0) - \theta]\sqrt{n(n-1)}}{p\sqrt{\sum_1^n [G_i(\hat{\theta}_n^0) - \hat{\theta}_n^0]^2}} \xrightarrow{R} N(0,1). \tag{43}$$

Demonstraţie. Faptul că $G(\hat{\theta}_n^0)$ are ordinul de deplasare mai scăzut decit $\hat{\theta}_n^0$ rezultă din teorema 4.

Avem

$$\lim_{n\to\infty} \frac{R(n)}{1-R(n)} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{p},$$

şi restul teoremei rezultă din teorema 14.

TEOREMA 16. *Fie* θ *definit ca în* § 2.4. *premergător teoremei* 14. *Atunci*

$$\frac{[G(\hat{\theta}_n^0) - \theta]\sqrt{n(n-1)}}{\sqrt{\sum_1^n [\hat{\theta}_i - \hat{\theta}]^2}} \xrightarrow[n\to\infty]{R} N(0,1). \tag{44}$$

Demonstraţie. Cînd $G(\hat{\theta}_n^0)$ este definit ca în teorema 7′ putem scrie

$$s_g^2 = \frac{1}{n-1}\sum_1^n [G_i(\hat{\theta}_n^0) - G(\hat{\theta}_n^0)]^2 =$$

$$= \left(\frac{R(n)}{1-R(n)}\right)^2 \frac{1}{n-1}\sum_1^n \left[g(\bar{x}_{n-1}^i) - \frac{1}{n}\sum_1^n g(\bar{x}_{n-1}^j)\right]^2 = \tag{45}$$

$$= \left(\frac{R(n)}{(1-R(n))(n-1)}\right)^2 (n-1)\sum_1^n \left[g(\bar{x}_n^i) - \frac{1}{n}\sum_1^n g(\bar{x}_{n-1}^j)\right]^2.$$

Scanned with OKEN Scanner

Dacă

$$G(\hat{\theta}_n^0) = \hat{\theta}$$

din observaţia următoare teoremei 14 şi din (45), urmează că

$$s_g^2 = (n-1)\sum_1^n \left[g(\bar{x}_n^i) - \frac{1}{n}\sum_1^n g(\bar{x}_{n-1}^j)\right]^2 = \tag{46}$$

$$= \left(\frac{R(n)}{(n-1)(1-R(n))}\right)^2 s_{\hat{\theta}}^2$$

ceea ce demonstrează teorema.

Scanned with OKEN Scanner

Capitolul VIII

ESTIMATORI SUFICIENȚI. STATISTICI COMPLETE

§1. Introducere

Conceptul de suficiență este de o importanță deosebită în statistica matematică. Cînd un cercetător strînge observații privind experimentul său, este pus în situația de a construi o funcție de aceste observații în scopul obținerii anumitor informații. Plecînd de la această observație Fisher (1922, 1925) introduce conceptul de statistică suficientă ca acea statistică care conține toate informațiile asupra parametrului necunoscut. Neyman (1935) dă o metodă pentru obținerea statisticilor suficiente.

§2. Estimatori suficienți

DEFINIȚIA 1. O statistică t este suficientă pentru familia $P = \{p_\theta(x),\ \theta \in \omega\}$ sau suficientă pentru θ, unde t este o funcție borelianã de X și repartiția condiționată $P_\theta(x|t)$ există aproape sigur pentru fiecare θ, dacă repartiția variabilei X, condiționată de $t = y$ este independentă de θ.

DEFINIȚIA 1'. O statistică $t(X_1, X_2, \ldots, X_n) = t_n$ este un estimator suficient pentru parametrul θ dacă

$$P(x_1, x_2, \ldots, x_n;\ \theta | t_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)) = g(x_1, x_2, \ldots, x_n) \tag{1}$$

unde $g(\cdot)$ este o funcție care nu depinde de θ și al cărui interval de definiție nu conține pe θ.

Exemple. Fie $X_1 X_2, \ldots, X_n$ o selecție asupra unei variabile aleatoare X avînd

1) funcția de frecvență

$$P(X = x) = \theta^x(1 - \theta)^{1-x};\quad x = 0,1$$

Funcția de verosimilitate este

$$P(x_1, x_2, \ldots, x_n;\ \theta) = \prod_1^n \theta^{x_j}(1 - \theta)^{1-x_j} = \theta^{\sum_1^n x_j}\ (1 - \theta)^{n - \sum_1^n x_j}$$

17 — c. 2416

Scanned with OKEN Scanner

Statistica

$$t_n = \sum_1^n X_j$$

are funcţia de frecvenţă

$$P(t_n;\ \theta) = C_n^{t_n}\ \theta^{t_n}(1-\theta)^{n-t_n}$$

Urmează că

$$P(x_1, x_2, \ldots, x_n;\ \theta\,|t_n) = \frac{\theta^{t_n}(1-\theta)^{n-t_n}}{C_n^{t_n}\theta^{t_n}(1-\theta)^{n-t_n}} = \frac{1}{C_n^{t_n}}$$

care este independentă de θ.

Prin urmare t_n este un estimator suficient pentru θ.

2) funcţia de frecvenţă

$$P(X = x) = \frac{\theta^x}{x!}e^{-\theta};\quad x = 0,1,\ldots$$

În acest caz funcţia de verosimilitate este

$$P(x_1, x_2, \ldots, x_n;\ \theta) = \prod_{j=1}^n \frac{\theta^{x_j}}{x_j!}e^{-\theta} = e^{-n\theta}\theta^{\sum_1^n x_j}\prod_1^n\left(\frac{1}{x_j!}\right)$$

Statistica

$$t_n = \sum_1^n X_j$$

are funcţia de frecvenţă

$$P(t_n,\ \theta) = \frac{e^{-n\theta}(n\theta)^{t_n}}{t_n!},\quad t_n = 0,1,\ldots$$

Urmează că

$$P(x_1, x_2, \ldots, x_n,\ \theta\,|t_n) = \frac{e^{-n\theta}\theta^{\sum_1^n x_j}\prod_1^n (1/x_j!)}{e^{-n\theta}(n\theta)^{t_n}/t_n!} = \frac{t_n!}{n^{t_n}\prod_1^n x_j!}$$

care este independentă de θ. Prin urmare t_n este un estimator suficient pentru θ.

3) funcţia de frecvenţe

$$p(X_i = k) = \frac{1}{N},\quad k = 1,2,\ldots,N$$

Scanned with OKEN Scanner

Statistica $t_n = \max(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ are funcţia de frecvenţe

$$p(t_n = y) = p(t_n \leqslant y) - p(t_n < y) = \frac{y^n}{N^n} - \frac{(y-1)^n}{N^n}, \quad y = 1,2,\ldots,n.$$

Urmează că

$$P(x_1,\ldots,x_n;\ N \mid t_n = y) = \frac{1/N^n}{(y^n/N^n) - [(y-1)^n/N^n]} = \frac{1}{y^n - (y-1)^n},$$

ceea ce arată $t_n = \max(X_1,\ldots,X_n)$ este un estimator suficient pentru N.

3') prin densitatea de repartiţie

$$f(x,\ \theta) = \frac{1}{\theta},\ 0 < x < \theta.$$

Funcţia de verosimilitate este

$$P(x_1, x_2, \ldots, x_n;\ \theta) = \frac{1}{\theta^n},\quad 0 < x_j < \theta.$$

Statistica

$$t_n = \max(X_1, X_2, \ldots, X_n)$$

are funcţia de repartiţie

$$F(u) = P(t_n < u) = \prod_1^n P(X_j < u) = \frac{u^n}{\theta^n},\ 0 < u < \theta$$

şi densitatea de repartiţie

$$f(u) = \frac{\mathrm{d}F(u)}{\mathrm{d}u} = \frac{nu^{n-1}}{\theta^n},\quad 0 < u < \theta$$

Urmează că

$$P(x_1, x_2, \ldots, x_n;\ \theta \mid t_n) = \frac{1/\theta^n}{nt_n^{n-1}/\theta^n} = \frac{1}{nt_n^{n-1}},\quad 0 < x_i < t_n$$

care este independentă de θ. Prin urmare, t_n este un estimator consistent pentru θ.

Fie

(2) $$f_r(t_n, t_{n1}, \ldots, t_{nr-1};\ \theta),\quad 2 \leqslant r \leqslant n$$

densitatea de repartiţie a r estimatori pentru parametrul θ. Putem scrie

(3) $$f_r(t_n, t_{n1}, t_{n2}, \ldots, t_{nr-1};\ \theta) = g_{r-1}(t_{n1}, \ldots, t_{nr-1} \mid t_n;\ \theta) h(t_n;\ \theta)$$

unde $h(t_n;\ \theta)$ este densitatea marginală a estimatorului t_n în repartiţia comună (2), iar g_{r-1} densitatea de repartiţie a estimatorilor $t_{n1}, t_{n2}, \ldots, t_{nr-1}$ pentru t_n dat.

Scanned with OKEN Scanner

Dacă $g_{r-1}(t_{n1}, \ldots, t_{nr-1} | t_n, \theta)$ nu depinde de θ, ne găsim în situaţia că, dat fiind t_n, mulţimea estimatorilor $t_{n1}, t_{n2}, \ldots, t_{nr-1}$ nu aduce nici o informaţie asupra lui θ. Dacă această situaţie are loc pentru orice r şi orice mulţime de $r-1$ estimatori t_{nj}, $1 \leqslant j \leqslant r-1$, putem spune că t_n conţine toate informaţiile asupra parametrului θ, fapt pentru care-l vom numi estimator suficient pentru θ. Prin urmare are loc

TEOREMA 1. *t_n este un estimator suficient pentru θ, dacă şi numai dacă,*

$$f_r(t_n, t_{n1}, t_{n2}, \ldots, t_{nr-1}; \theta) = g_{r-1}(t_{n1}, \ldots, t_{nr-1} | t_n)\, h(t_n; \theta), \tag{4}$$

$g_{r-1}(t_{n1}, \ldots, t_{nr-1} | t_n)$ fiind independentă de θ, pentru $2 \leqslant r \leqslant n$ şi orice alegere a estimatorilor $t_{n1}, t_{n2}, \ldots, t_{nr-1}$.

Observaţie. (4) pentru funcţia de verosimilitate are forma

$$P(x_1, x_2, \ldots, x_n; \theta) = h(t_n; \theta) g(x_1, x_2, \ldots, x_n) \tag{5}$$

unde $g(\cdot)$ este o funcţie care nu depinde de θ.

Demonstraţie. Presupunem că t_n este un estimator suficient. Atunci

$$P(x_1, \ldots, x_n; \theta | t_n) = g(x_1, \ldots, x_n).$$

Avem

$$\begin{aligned} P(x_1, \ldots, x_n; \theta) &= P(x_1, \ldots, x_n; \theta | t_n)\, P(t_n; \theta) \\ &= g(x_1, \ldots, x_n)\, P(t_n; \theta) \\ &= g(x_1, \ldots, x_n)\, h(t_n, \theta) \end{aligned}$$

unde $h(t_n, \theta) = P(t_n; \theta)$.

Reciproc, presupunem că (5) are loc.

În general

$$P(x_1, \ldots, x_n; \theta | t_n) = \frac{P(x_1, \ldots, x_n; t_n, \theta)}{P(t_n; \theta)}$$

În acest caz deoarece t_n este funcţie numai de $X_1, X_2, \ldots, X_n$, avem

$$\begin{aligned} P(x_1, \ldots, x_n; t_n, \theta) &= P(x_1, \ldots, x_n; \theta) \\ &= g(x_1, \ldots, x_n)\, h(t_n, \theta) \end{aligned}$$

Dacă punem

$$\Omega(t_n) = \{(x_1, \ldots, x_n);\ t_n(x_1, \ldots, x_n) < t_n\}$$

atunci

$$\begin{aligned} F(t_n, \theta) &= \int_{\Omega(t_n)} P(x_1, \ldots, x_n; \theta)\, dv \\ &= h(t_n, \theta) \int_{\Omega(t_n)} g(x_1, \ldots, x_n)\, dv \end{aligned}$$

Scanned with OKEN Scanner

Urmează că

$$P(t_n, \theta) = h(t_n, \theta)\, G(t_n)$$

unde G este o funcţie care depinde numai de t_n.

Deci

$$P(x_1, \ldots, x_n ; \theta)\,|t_n) = \frac{P(x_1, \ldots, x_n ; t_n, \theta)}{P(t_n, \theta)} =$$

$$= \frac{P(x_1, \ldots, x_n ; \theta)}{P(t_n, \theta)} =$$

$$= \frac{g(x_1, \ldots, x_n)\, h(t_n, \theta)}{G(t_n)\, h(t_n, \theta)} =$$

$$= k(x_1, \ldots, x_n),$$

unde k nu este funcţie de θ.

Suficienţa acestei teoreme se datoreşte lui Fisher (1922) iar necesitatea lui Neyman (1935). Teorema 1, spune că t_n este un estimator suficient dacă şi numai dacă densitatea poate fi scrisă ca produsul a două funcţii, dintre care una este funcţia de variabilele de selecţie prin intermediul statisticii t_n, iar cealaltă este independentă de θ.

Exemple. Fie $X_1, X_2, \ldots, X_n$ o selecţie asupra unei variabile aleatoare X

4) repartizate $N(\mu, \sigma^2)$

Funcţia de verosimilitate este

$$P(x_1, \ldots, x_n, \mu) = \frac{1}{(\sigma\sqrt{2\pi})^n} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_1^n (x_j - \mu)^2\right], \quad -\infty < x_j < \infty$$

şi ţinînd seama că

$$\exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_1^n (x_j - \mu)^2\right] =$$

$$= \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_1^n (x_j - \overline{x}_n)^2\right] \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2} n(\overline{x}_n - \mu)^2\right]$$

urmează că $\overline{X}_n$ este un estimator suficient pentru θ.

5) avînd densitatea de repartiţie

$$f(x, \theta) = \frac{1}{\theta}, \quad 0 < x < \theta$$

În acest caz funcţia de verosimilitate are expresia

$$P(x_1, \ldots, x_n ; \theta) = \frac{1}{\theta^n}, \quad 0 < x_j < \theta$$

Scanned with OKEN Scanner

Luînd $t_n = \max(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ găsim

$$P(x_1, \ldots, x_n, \theta) = \frac{1}{\theta^n}\delta(t_n < \theta), \quad 0 < x_j < t_n$$

unde

$$\delta(t_n < \theta) = \begin{cases} 1 & \text{dacă } t_n < \theta \\ 0 & \text{dacă } t_n \geqslant \theta \end{cases}$$

Prin urmare am factorizat $P(x_1, \ldots, x_n; \theta)$ într-un produs de două funcţii dintre care una numai de $x_1, \ldots, x_n$, iar cealaltă de t_n şi θ.

Deci, t_n este un estimator suficient pentru θ.

§3. Estimatori suficienţi şi estimatori nedeplasaţi

Independent unul de celălalt Rao şi Blackwell găsesc o metodă pentru obţinerea de estimatori nedeplasaţi cu dispersia minimă.

TEOREMA 2. (Blackwell (1947), Rao (1949)). *Fie $X_1, X_2, \ldots, X_n$ o selecţie asupra unei variabile aleatoare X a cărei repartiţie depinde de un parametru θ. Fie $'t_n$ orice estimator nedeplasat pentru θ şi fie t_n un estimator suficient pentru θ. De asemenea fie $h(t_n^*) = M('t_n | t_n = t_n^*)$. Atunci*

$$M[h(t_n)] = \theta \text{ şi } D^2[h(t_n)] \leqslant D^2('t_n),$$

ceea ce arată că $h(t_n)$ este de asemenea un estimator nedeplasat pentru θ şi dispersia sa este cel mult egală cu a estimatorului $'t_n$.

Demonstraţie. Avem

$$M['t_n | t_n = t_n^*] = \int u f_{'t_n | t_n}(u | t_n^*)\, du = \int u \frac{f_{'t_n, t_n}(u, t_n^*)}{f_{t_n}(t_n^*)}\, du = h(t_n^*),$$

sau

$$\int u f_{'t_n, t_n}(u, t_n^*) du = h(t_n^*) f_{t_n}(t_n^*)$$

ceea ce permite să scriem

$$M[h(t_n)] = \int \{h(t_n^*) f_{t_n}(t_n^*)\}\, dt_n^* = \int \left\{ \int u f_{'t_n, t_n}(u, t_n^*)\, du \right\} dt_n^* = M('t_n) = \theta;$$

deci $h(t_n)$ este de asemenea un estimator nedeplasat pentru θ.

Prin definiţie şi din proprietăţile mediei

$$\begin{aligned} D^2('t_n) &= M[('t_n - \theta)^2] = M\{[('t_n - h(t_n)) + (h(t_n) - \theta)]^2\} \\ &= M\{['t_n - h(t_n)]^2\} + M\{[h(t_n) - \theta]^2\} + \\ &+ 2M[('t_n - h(t_n))(h(t_n) - \theta)] \end{aligned}$$

Scanned with OKEN Scanner

Cum

$$M[('t_n - h(t_n))(h(t_n) - \theta)] = \iint (u - h(t_n^*))(h(t_n^*) - \theta) f_{'t_n, t_n}(u, t_n^*)\, du\, dt_n^* =$$

$$= \int (h(t_n^*) - \theta) \left\{ \int (u - h(t_n^*)) f_{'t_n|t_n}(u|t_n^*)\, du \right\} f_{t_n}(t_n^*)\, dt_n^* =$$

$$= \int (h(t_n^*) - \theta) \cdot 0 \cdot f_{t_n}(t_n^*)\, dt_n^* = 0,$$

urmează că

$$D^2('t_n) = M\{['t_n - h(t_n)]^2\} + M\{[h(t_n) - \theta]^2\} =$$

$$= M\{['t_n - h(t_n)]^2\} + D^2[h(t_n)]$$

Deoarece

$$M\{['t_n - h(t_n)]^2\} \geqslant 0,$$

$$D^2('t_n) \geqslant D^2[h(t_n)]$$

Observație $D^2('t_n) = D^2[h(t_n)]$ numai cînd

$$M\{['t_n - h(t_n)]^2\} = 0,$$

adică cînd

$$P['t_n = h(t_n)] = 1$$

și estimatorul $'t_n$ este o funcție numai de statistică (estimatorul) suficient, exceptînd pentru mulțimile de măsură nulă.

Exemplul 6. Fie X_1, X_2 o selecție asupra unei variabile aleatoare X avînd densitatea de repartiție

$$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x},\ x > 0,\ \lambda > 0;\ M(X) = 1/\lambda$$

Deoarece $X_{(1)}$ are densitatea de repartiție

$$f_{X_{(1)}}(x) = 2\lambda e^{-2\lambda x},\ x > 0 \text{ și } M(X_{(1)}) = 1/2\lambda$$

urmează că $2X_{(1)}$ este un estimator nedeplasat pentru media variabilei X.

Cum densitatea de repartiție comună a variabilelor X_1 și X_2 este

$$\lambda^2 e^{-\lambda(x_1+x_2)} = (\lambda^2 e^{-\lambda t_2^*}) \cdot 1$$

urmează că $t_2 = X_1 + X_2$ este o statistică suficientă pentru λ.

Pentru a determina densitatea de repartiție comună a variabilelor $X_{(1)}$ și t_2 procedăm în felul următor:

Scanned with OKEN Scanner

Densitatea de repartiţie comună a variabilelor X_1, X_2 este

$$f_{X_1, X_2}(x_1, x_2) = \lambda^2 e^{-\lambda(x_1+x_2)}, \quad x_1, x_2 > 0, \quad \lambda > 0$$

Fie $x_{(1)} = \min(x_1, x_2)$ şi $t_2^* = x_1 + x_2$
În semiplanul în care $x_1 < x_2$

$$x_{(1)} = x_1, \quad t_2^* = x_1 + x_2 \quad \text{şi} \quad J = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

În semiplanul în care $x_1 > x_2$

$$x_{(1)} = x_2, \quad t_2^* = x_1 + x_2 \quad \text{şi} \quad J = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

Deci în fiecare din aceste semiplane $|J| = 1$.

Deoarece transformarea nu este biunivocă, trebuie să transformăm $f_{X_1, X_2}(x_1, x_2)$ în fiecare dintre aceste două semiplane şi să adunăm valorile densităţii în fiecare din aceste două semiplane.

Deoarece $x_{(1)} = \min(x_1, x_2)$, urmează că

$$0 < x_{(1)} < \frac{1}{2} t_2^*$$

Deci, densitatea de repartiţie comună a variabilelor $X_{(1)}$ şi t_2 este

$$f_{X_{(1)}, t_2}(x_1, t_2^*) = 2\lambda^2 e^{-\lambda t_2^*}, \quad 0 < x_{(1)} < \frac{1}{2} t_2^*, \quad t_2^* > 0$$

Densitatea marginală a variabilei t_2 este

$$f_{t_2}(t_2^*) = 2 \int_0^{\frac{1}{2} t_2^*} 2\lambda^2 e^{-\lambda t_2^*} du = \lambda^2 t_2^* e^{-\lambda t_2^*}, \quad t_2^* > 0$$

iar densitatea de repartiţie a variabilei $X_{(1)}$ condiţionate de faptul că $t_2 = t_2^*$ este

$$f_{X_{(1)} | t_2}(x_{(1)} | t_2^*) = \frac{2\lambda^2 e^{-\lambda t_2^*}}{\lambda^2 t_2^* e^{-\lambda t_2^*}} = \frac{2}{t_2^*}, \quad 0 < x_{(1)} < \frac{1}{2} t_2^*$$

Urmează că

$$M(2X_{(1)} | t_2 = t_2^*) = \int_0^{\frac{1}{2} t_2^*} 2x_{(1)} \frac{2}{t_2^*} dx_{(1)} = \frac{t_2^*}{2} = h(t_2^*)$$

şi $h(t_2) = \frac{1}{2} t_2$ va fi de asemenea un estimator consistent pentru θ care conform teoremei 2 va avea dispersia mai mică decît a statisticii $2X_{(1)}$:

$$D^2(2X_{(1)}) = \frac{1}{\lambda^2} > \frac{1}{2\lambda^2} = D^2\left(\frac{1}{2} t_2\right)$$

Scanned with OKEN Scanner

Exemplul 7. Estimaţia funcţiei de frecvenţă

$$P(X = k) = \frac{e^{-\theta}\theta^k}{k!}$$

pentru k general, a fost considerată de Barton (1961) şi de Glasser (1962).

Un estimator nedeplasat pentru

$$\frac{e^{-\theta}\,\theta^k}{k!}$$

este variabila aleatoare Y, definită prin

$$Y = \begin{cases} 1 & \text{dacă } X_1 = k \\ 0 & \text{dacă } X_1 \neq k \end{cases}$$

După teorema 2 estimatorul nedeplasat de minimă dispersie pentru $e^{-\theta}\,\theta^k/k!$ este

$$M[Y|\hat{\theta}] = P[Y = 1|\hat{\theta}] =$$

$$= P[X_1 = k|\hat{\theta}] =$$

$$= P\left[(X_1 = k) \cap \left(\sum_2^n X_j = n\hat{\theta} - k\right)\right] \Big/ P\left[\sum_1^n X_j = n\hat{\theta}\right] =$$

$$= \frac{(e^{-\theta}\,\theta^k/k!)\,(e^{-\theta(n-1)}[(n-1)\theta]^{n\hat{\theta}-k}/(n\hat{\theta} - k)!)}{e^{-n\hat{\theta}}(n\hat{\theta})^n/(n\hat{\theta})!} =$$

$$= C^k_{n\hat{\theta}}\left(\frac{n-1}{n}\right)^{n\hat{\theta}} \frac{1}{(n-1)^k}$$

unde $\hat{\theta} = \frac{1}{n}\sum_1^n X_j$ este estimatorul de maximă verosimilitate pentru parametrul θ bazat pe selecţia $X_1, X_2, \ldots, X_n$.

§4. Forma repartiţiilor ce posedă estimatori suficienţi

Dacă în (5) luăm logaritmii şi derivăm, obţinem

$$\frac{\partial \ln P}{\partial \theta} = \frac{\partial \ln h(t_n, \theta)}{\partial \theta} \tag{6}$$

Scanned with OKEN Scanner

Relaţia (VI.24)* este un caz particular al relaţiei (6) cînd

$$\frac{\partial \ln h(t_n, \theta)}{\partial \theta} = A[t - \tau(\theta)]$$

Oridecîte ori este adevărată relaţia (VI.24) este adevărată şi relaţia (6), în timp ce dacă relaţia (VI.24) nu este adevărată, poate exista un estimator suficient.

4.1. Intervalul de variaţie nu depinde de θ

Din (6) urmează că dacă t_n este un estimator suficient pentru θ atunci

$$\frac{\partial \ln P}{\partial \theta} = \frac{\partial \ln h(t_n, \theta)}{\partial \theta} H(t_n, \theta) \tag{7}$$

Deoarece (7) are loc pentru toţi θ

$$u = \Sigma u(x_i) = g^*(t_n)$$

care leagă statistica t_n de statistica u.

Dacă $g(t_n)$ şi $u(x)$ sînt funcţii derivabile urmează că

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \frac{\mathrm{d}u(x_i)}{\mathrm{d}x_i} = \frac{\mathrm{d}g^*(t_n)}{\mathrm{d}t_n} \cdot \frac{\partial t_n}{\partial x_i}$$

Din (7)

$$\frac{\partial H(t_n, \theta)}{\partial t_n} \cdot \frac{\partial t_n}{\partial x_i} = \frac{\partial^2 \ln f(x_i; \theta)}{\partial \theta \, \partial x_i}$$

Prin urmare pentru toţi i

$$\frac{\partial^2 \ln f(x_i, \theta)}{\partial \theta \, \partial x_i} \Big/ \frac{\mathrm{d}u(x_i)}{\mathrm{d}x_i} = \frac{\partial H(t_n, \theta}{\partial t_n} \Big/ \frac{\mathrm{d}g^*(t_n)}{\mathrm{d}t_n} = \lambda_1(\theta),$$

λ fiind funcţia numai de θ.

Integrînd în raport cu t_n, obţinem

$$G(t_n, \theta) = \lambda_1(\theta)\, g^*(t_n) + \lambda_2(\theta)$$

iar integrarea în raport cu θ conduce la

$$\ln P = \Theta_1 g^*(t_n) + \Theta_2 + k(x_1, \ldots, x_n)$$

---

* este vorba de formula 24 din Cap. VI.

Scanned with OKEN Scanner

sau

$$P = v \exp\ [\Theta_1 g^*(t_n) + \Theta_2], \tag{8}$$

unde $g^*(t_n)$ şi v sînt funcţii numai de $x_1, \ldots, x_n$, iar Θ_1 şi Θ_2 sînt funcţii numai de θ.
(8) nu este o condiţie necesară şi suficientă, deoarece singura condiţie folosită este factorizarea lui P.

În cazul în care există un estimator suficient, repartiţia trebuie să fie necesar de forma (8).

4.2. Una din limitele intervalului de variaţie al variabilei X depinde de θ

Fără a micşora generalitatea putem presupune că $0 \leqslant X \leqslant b$, unde b este fixat. Fie t_n o statistică suficientă pentru θ; deci repartiţia tuturor celorlalte statistici, pentru t_n fixat, este independentă de θ.

Fie $X_{(1)}$ în calitate de altă statistică. Atunci dacă t_n este fixat repartiţia statisticii $X_{(1)}$ este independentă de θ, ceea ce este imposibil, deoarece fixîndu-l pe t_n, am fixat de asemenea şi pe $X_{(1)}$. Aceasta arată că $X_{(1)}$ este funcţie de t_n. Prin urmare dacă există o statistică suficientă, $X_{(1)}$ trebuie să fie funcţie de ea.

Dacă t_n este suficientă pentru θ, repartiţia lui x pentru $X_{(1)}(t_n)$ fixat

$$f(x, \theta) \Big/ \int_{x_{(1)}}^{\infty} f(x, \theta)\,dx$$

este independentă de θ. Aceasta fiind adevărată pentru toţi x_i şi x_j, se poate spune că $f(x_i, \theta)/f(x_j, \theta)$ este independentă de θ. Prin urmare, pentru $n \geqslant 2$, trebuie să avem

$$f(x, \theta) = g(x)/h(\theta), \tag{9}$$

care este o condiţie, mai generală, de existenţă a unei statistici suficiente.

4.3. Amîndouă limitele intervalului de variaţie al variabilei X depind de θ

$X_{(1)}$ şi $X_{(n)}$ sînt o pereche de statistici suficiente pentru θ dacă şi numai dacă

$$f(x, \theta) = g(x)/h(\theta)$$

Prin urmare problema care se pune constă în a şti dacă există o singură statistică suficientă pentru θ.

Presupunem că

$$\theta \leqslant x \leqslant b(\theta)$$

Scanned with OKEN Scanner

unde $b(\theta)$ este o funcţie monoton descrescătoare în θ şi că

$$b(X) = X_{(n)}$$

Fie

$$t = \min\ (X_{(1)}, X)$$

Dacă t este o statistică suficientă

$$t \leqslant X_{(1)},\ b(t) \geqslant X_{(n)}$$

una din inegalităţi fiind o inegalitate strictă

$$t = X_{(1)} \Rightarrow t \geqslant \theta$$

$$b(t) = X_{(n)} \Rightarrow b(t) \leqslant b(\theta)$$

Însă aceste două inegalităţi se implică una pe cealaltă, deoarece $b(\theta)$ este o funcţie monoton descrescătoare. Prin urmare

$$\theta \leqslant t \leqslant X_{(1)} \leqslant X_{(n)} \leqslant b(t) \leqslant b(\theta)$$

Deci dacă t este fixat, repartiţia selecţiei variază într-un interval fixat $(t, b(t))$. Dacă se poate scrie

$$f(x, \theta) = g(x)/h(x), \qquad \theta \leqslant x \leqslant b(\theta)$$

repartiţia selecţiei în intervalul $(t, b(t))$ va fi independentă de θ. Urmează că t este o statistică suficientă.

Exemplul 8. Repartiţia avînd densitatea de repartiţie

$$f(x) = e^{-(x-\alpha)} \qquad \alpha \leqslant x < \infty$$

este de forma (9). Într-adevăr

$$f(x) = e^{-x}/e^{-\alpha},$$

ceea ce arată că $X_{(1)}$ este suficientă pentru limita inferioară α.

Exemplul 9 Repartiţia avînd densitatea de repartiţie

$$\frac{1}{\beta - \alpha}, \qquad \alpha \leqslant x \leqslant \beta$$

se bucură de proprietatea că

— dat β, $X_{(1)}$ este suficientă pentru α

— dat α, $X_{(n)}$ este suficientă pentru β

— densitatea de repartiţie comună a statisticilor $X_{(1)}$, $X_{(n)}$ este

$$f_2(x_{(1)}, x_{(n)}) = n(n-1)(x_{(n)} - x_{(1)})^{n-2}/(\beta - \alpha)^n$$

ceea ce permite să scriem

$$P(x_1, \ldots, x_n;\ \alpha, \beta) = \frac{1}{(\beta - \alpha)^n} = f_2(x_{(1)}, x_{(n)})k(x)$$

şi arată că $(X_{(1)}, X_{(n)})$ este suficientă pentru (α, β)

Scanned with OKEN Scanner

§5. Statistici complete

DEFINIȚIA 2. Familia $\mathfrak{L}$ de măsuri probabilistice P este completă dacă

$$M_P[f(X)] = 0 \text{ pentru toți } P \in \mathfrak{L} \tag{10}$$

implică

$$f(x) = 0 \tag{11}$$

În aplicații $\mathfrak{L}$ va fi familia repartițiilor statisticilor suficiente.

DEFINIȚIA 3. Statistica t este completă dacă măsura probabilistică indusă de t pe spațiul $(\mathfrak{X}, \mathfrak{K})$, unde $\mathfrak{X}$ este spațiul tuturor valorilor statisticii t și $\mathfrak{K}$ este σ — corpul generat de mulțimile Boreliene ale lui $\mathfrak{X}$, este completă.

TEOREMA 3. *Dacă t este completă pentru* $\{p_\theta(\cdot) \mid \theta \in \omega\}$, *atunci orice statistică* t^* *ce depinde de x numai împreună cu t este de asemenea completă pentru* $\{p_\theta(\cdot) \mid \theta \in \omega\}$.

Demonstrație. Fie $t^* = g(t)$. Presupunem că există o funcție h satisfăcînd următoarele proprietăți

i) $h(t^*)$ este măsurabilă

ii) $M_\theta[h(t^*)] = 0$ pentru toți.

Dacă $h(t^*)$ este măsurabilă și $M_\theta\{h[g(t)]\} = 0$, $\theta \in \omega$ implică că funcția $h[g(t)]$ este zero datorită faptului că t este completă.

Astfel $h(t^*) = 0$ a.p.t. în raport cu P, ceea ce demonstrează teorema.

Exemplul 10. Considerăm n probe independente în fiecare probă probabilitatea succesului fiind p și X_i o variabilă aleatoare care poate lua valoarea 1 sau 0 după cum în proba i avem un succes sau insucces. Atunci $t_n = \sum_1^n X_j$ este o statistică suficientă pentru p și familia repartițiilor sale posibile este

$$\mathfrak{L} = \{b(p, n),\ 0 \leqslant p \leqslant 1\} \tag{12}$$

Deci

$$P(t_n ; p) = C_n^{t_n} p^{t_n} (1-p)^{n-t_n}, \qquad t_n = 0,1, \ldots, n$$

Fie $\hat{p}(t_n)$ un estimator care este funcție numai de t_n.

Pentru familia (12), (11) implică

$$M\hat{p} = \sum_{k=0}^{n} \hat{p}(k) C_n^k p^k (1-p)^{n-k} = (1-\theta)^n \sum_{k=0}^{n} \hat{p}(k) C_n^k \left(\frac{p}{1-p}\right)^k = 0$$

sau punînd $\dfrac{\theta}{1-\theta} = \alpha$

$$M\hat{p} = (1-\theta)^n \sum_{k=0}^{n} \hat{p}(k) C_n^k \alpha^k = 0$$

Scanned with OKEN Scanner

Prin urmare

$$\sum_{k=0}^{n} \hat{p}(k) C_n^k \alpha^k = 0 \text{ pentru toți } 0 < \alpha < \infty$$

$$\frac{\partial^n}{\partial \alpha^n} \left[\sum_{k=0}^{n} \hat{p}(k) C_n^k \alpha^k \right] = 0 \Rightarrow n!\ \hat{p}(n) = 0 \text{ sau } \hat{p}(n) = 0$$

Astfel

$$\sum_{k=0}^{n-1} \hat{p}(k) C_n^k \alpha^k = 0$$

În continuare

$$\frac{\partial^{n-1}}{\partial \alpha^{n-1}} \left[\sum_{k=0}^{n-1} \hat{p}(k) C_n^k \alpha^k \right] = 0 \Rightarrow n!\ \hat{p}(n-1) = 0 \text{ sau } \hat{p}(n-1) = 0$$

În general

$$\frac{\partial^{n-r}}{\partial \alpha^{n-r}} \left[\sum_{k=0}^{n-r} \hat{p}(k) C_n^k \alpha^k \right] = 0 \Rightarrow \frac{n!}{r!} \hat{p}(n-r) = 0 \text{ sau } \hat{p}(n-r) = 0$$

și prin urmare

$$\hat{p}(k) = 0, \qquad k = 0,1,2, \ldots, n$$

Exemplul 11. Fie $p_\theta(x)$ familia repartițiilor Poisson, astfel încît $p_\theta(x)$ asociază măsura

$$e^{-\theta} \frac{\theta^x}{x!}$$

la mulțimea de puncte $x = 0,1,2,\ldots$ și măsura zero la complementara acestei mulțimi.

Statistica $t_n = \sum_1^n X_i$ este suficientă pentru θ și are funcția de frecvențe

$$P(t_n ; \theta) = e^{-n\theta} \frac{(n\theta)^{t_n}}{t_n!}, \qquad t_n = 0,1,2, \ldots$$

Dacă $\hat{\theta}(t_n)$ este astfel încît $M\hat{\theta} = 0$, atunci

$$M\hat{\theta} = \sum_{k=0}^{\infty} \hat{\theta}(k)\, e^{-n\theta} \frac{(n\theta)^k}{k!} = 0$$

conduce la

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\hat{\theta}(k)}{k!} (n\theta)^k = 0, \qquad 0 < \theta < \infty$$

Aceasta implică

$$\hat{\theta}(k) = 0, \qquad k = 0,1,2, \ldots$$

și că t_n este o statistică suficient completă.

Scanned with OKEN Scanner

Dacă facem pe $n = 1$, obţinem că familia repartiţiilor Poisson este completă.

Exemplul 12. Fie $X_1 \ldots, X_n$ o selecţie asupra unei variabile aleatoare X cu funcţia de frecvenţe

$$P_N(X = k) = \frac{1}{N}, \qquad k = 1,2, \ldots, N,$$

unde $N \in \omega$, mulţimea întregilor pozitivi. Statistica $t_n = \max(X_1, \ldots, X_n)$ este un estimator suficient pentru N(Exemplul 3) şi are funcţia de frecvenţe

$$p(t_n = y) = \frac{y^n}{N^n} - \frac{(y-1)^n}{N^n}$$

Arătăm că

$$\frac{1}{N^n} \sum_{y=1}^{N} f(y)[y^n - (y-1)^n] = 0 \qquad \text{pentru } N = 1,2, \ldots$$

implică că $f(y) = 0$ pentru $y = 1,2, \ldots, N$. Pentru

$$N = 1 \qquad f(1) = 0$$

$$N = 2 \qquad f(1) = 0, \qquad f(2) = 0$$

Deci familia repartiţiilor indusă de t este completă.

Exemplul 13. Fie $X_1 \ldots, X_n$ o selecţie asupra unei variabile aleatoare X cu densitatea de repartiţie

$$\frac{1}{\theta} \qquad 0 < x < \theta, \qquad \theta \in (0, \infty)$$

Statistica $t_n = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} X_i$ este suficientă prentru θ (Exemplul 3') şi are densitatea de repartiţie

$$f(t_n\,;\,\theta) = \begin{cases} \dfrac{nt_n^{n-1}}{\theta^n}, & 0 < t_n < \theta \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}$$

Dacă $\hat{\theta}(t_n)$ este astfel încît $M\hat{\theta} = 0$, atunci

$$M\hat{\theta} = \int_0^{\theta} \hat{\theta}(z) \frac{nz^{n-1}}{\theta^n} \, dz = 0$$

sau

$$\int_0^{\theta} \hat{\theta}(z) z^{n-1} \, dz = 0, \qquad 0 < \theta < \infty$$

Scanned with OKEN Scanner

care implică $\hat{\theta}(z) = 0$, $0 < z < \theta$

Deci familia repartiţiilor indusă de t este completă.

Exemplul 14. Fie $p_\theta(x)$ familia repartiţiilor normale, astfel încît $p_\theta(x)$ asociază intervalului dx, pentru $-\infty < x < \infty$, măsura

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-(x-\theta)^2/2}\, dx$$

Dacă arătăm că

(13) $$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-\frac{(x-\theta)^2}{2}}\, dx = 0 \Rightarrow f(x) = 0, \quad a.p.t.$$ în raport cu p^x, atunci $p(x)$ este completă.

Din (13) obţinem

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-\frac{x^2}{2}}\, e^{x\theta}\, dx = 0$$

ceea ce arată că transformata Laplace a funcţiei

$$f(x)\, e^{-\frac{x^2}{2}}$$

este identic zero. Dar transformata funcţiei 0 este de asemenea identic zero. Deci, din proprietatea de unicitate a transformatei Laplace, urmează că

$$f(x)\, e^{-\frac{x^2}{2}} = 0$$

şi deci $f(x) = 0$ *a.p.t.* în raport cu măsura Lebesgue. Deci $p(x)$ este o familie de repartiţii completă.

Exemplul 15. Fie X o variabilă aleatoare repartizată $\chi^2(n)$. Din proprietatea de unicitate a transformatei Laplace

$$M[h(X)] = \int_0^{\infty} h(x) \frac{1}{2^n \Gamma(x)} x^{n-1} e^{-\frac{x}{2}}\, dx = 0 \Rightarrow h(x) \frac{1}{2^n \Gamma(n)} x^{n-1} = 0$$

pentru orice x.

Urmează că $h(X) = 0$ *a.p.t.* în raport cu măsura Lebesgue şi deci că X este completă.

Exemplul 16. Fie X o variabilă aleatoare cu densitatea de repartiţie

$$f(x) = \frac{1}{g(T,\theta)\pi\left[1 + \left(\frac{x}{\theta}\right)^2\right]\theta}, \qquad \underset{-\infty<\theta<\infty}{|x| < T}$$

Scanned with OKEN Scanner

unde

$$g(T,\theta)=\int_{-T}^{T}\frac{\mathrm{d}x}{\pi\left[1+\left(\frac{x}{\theta}\right)^2\right]\theta}$$

Dacă $h(X)$ este orice funcţie impară, atunci $M[h(X)]=0$ şi aceasta nu implică că $h(X)=0$ *a.p.t.* în raport cu măsura Lebesgue. Deci X nu este completă.

TEOREMA 4. (Lehmann (1959)). *Fie X un vector aleator cu repartiţia probabilistică*

$$\mathrm{d}P_\theta(x)=c(\theta)\exp\left[\sum_{j=1}^{k}\theta_j T_j(x)\right]\mathrm{d}\mu(x) \tag{14}$$

şi fie $\mathfrak{Q}^T$ familia repartiţiilor statisticii $\mathbf{T}=(T_1(X),\ldots,T_k(X))$, $\boldsymbol{\theta}=(\theta_1,\ldots,\theta_k)$ cînd $\boldsymbol{\theta}$ variază pe mulţimea ω. Dacă ω conţine un dreptunghi k-dimensional, atunci $\mathfrak{Q}^T$ este completă.

Demonstraţie. Printr-o translaţie a spaţiului parametrilor fără a pierde din generalitate, putem presupune că ω conţine dreptunghiul

$$I=\{\theta_1,\ldots,\theta_k):-a\leqslant\theta_j\leqslant a,\ j=1,\ldots,k\}$$

Fie $f(t)=f^+(t)-f^-(t)$ astfel încît

$$M_\theta[f(T)]=0 \qquad \text{pentru toţi } \theta\in\omega$$

Atunci pentru toţi $\theta\in I$, dacă ν reprezintă măsura indusă în spaţiul statisticei T de măsura μ,

$$\int e^{\Sigma\theta_j t_j}f^+(t)\,\mathrm{d}\nu(t)=\int e^{\Sigma\theta_j t_j}f^-(t)\,\mathrm{d}\nu(t)$$

şi deci pentru $\theta=0$

$$\int f^+(t)\,\mathrm{d}\nu(t)=\int f^-(t)\,\mathrm{d}\nu(t)$$

Împărţind f printr-o constantă, putem lua ca valoare comună a acestor integrale 1, astfel încît

$$\mathrm{d}P^+(t)=f^+(t)\,\mathrm{d}\nu(t) \text{ şi } \mathrm{d}P^-(t)=f^-(t)\,\mathrm{d}\nu(t)$$

sînt măsuri probabilistice şi

$$\int e^{\Sigma\theta_j t_j}\,\mathrm{d}P^+(t)=\int e^{\Sigma\theta_j t_j}\,\mathrm{d}P^-(t) \tag{15}$$

pentru toţi θ în I. În cele ce urmează să presupunem că (15) rămîne adevărată cînd θ_j sînt variabile complexe :

$\theta_j = \xi_j + i\,\eta_j$, $j = 1, \ldots, k$. Pentru orice

$$\theta_1, \ldots, \theta_{j-1}, \theta_{j+1}, \ldots, \theta_k$$

fixat, cu partea reală strict cuprinsă între $-a$ și $+a$, din Problema 14 integralele sînt funcții analitice de θ_j în

$$R_j = \{\theta_j \mid -a < \xi_j < a, \ -\infty < \eta_j < \infty\}$$

din planul complex. Pentru $\theta_2 \ldots, \theta_k$ fixați, reali și între $-a$ și a, egalitatea integralelor are loc pe segmentul

$$\{(\xi_1, \eta_1) : \ -a < \xi_1 < a, \eta_1 = 0\}$$

și prin urmare poate fi extinsă la R_1 în care integralele sînt analitice. Acest rezultat poate fi extins, prin inducție, la regiunea complexă

$$\{(\theta_1, \ldots, \theta_k) : (\xi_j, \ \eta_j) \in R_j \qquad \text{pentru } j = 1, \ldots, k\}$$

Deci, punînd $\xi_j = 0$, $j = 1, \ldots, k$, pentru toți reali $(\eta_1, \ldots, \eta_k)$

$$\int e^{i\Sigma\eta_j t_j}\, dP^+(t) = \int e^{i\Sigma\eta_j t_j}\, dP^-(t).$$

Aceste integrale sînt funcțiile caracteristice ale repartițiilor P^+ și respectiv P^- și din teorema de unicitate a funcțiilor caracteristice, cele două repartiții P^+ și P^- coincid. Din definiția acestor repartiții urmează că

$$f^+(t) = f^-(t) \qquad a.p.t. \text{ în raport cu } \nu$$

și deci că

$$f(t) = 0 \qquad a.p.t. \text{ în raport cu } \mathfrak{L}^T.$$

§6. Familii de măsuri probabilistice complete mărginite

În problemele de estimare prezintă importanță problema existenței estimatorilor nedeplasați mărginiți pentru zero.

DEFINIȚIA 4. Familia de măsuri $p(x)$ este completă mărginită dacă

$$\int_R f(x)\,dp_\theta(x) = 0 \qquad \text{pentru toți } \theta \in \omega \tag{16}$$

și $f(x)$ mărginită și reală implică $f(x) = 0$ *a.p.t.* în raport cu $p(x)$.

Exemplul următor arată că o familie de măsuri poate fi complet mărginită fără a fi completă.

Exemplul 17. Fie ω intervalul deschis $0 < \theta < 1$. $p_\theta(x)$ asociază punctelor $x = 0,1, \ldots$ măsura $(1-\theta)^2\,\theta^x$, punctului $x = -1$ măsura θ și măsura zero la complementara acestei mulțimi de puncte.

Scanned with OKEN Scanner

Condiția (16) devine

$$f(-1)\theta + \sum_{x=0}^{\infty} f(x)(1-\theta)^2\theta^x = 0$$

Prin urmare

$$\sum_{x=0}^{\infty} f(x)\theta^x = -f(-1)\theta(1-\theta)^{-2} = -f(-1)\sum_{x=0}^{\infty} x\theta^x \tag{17}$$

și astfel

$$\sum_{x=0}^{\infty} [f(x) + f(-1)x]\theta^x = 0 \tag{18}$$

Ecuația (18) $\Rightarrow f(x) + f(-1)\,x = 0$ pentru $x = -1, 0, 1, \ldots$ și astfel $f(-1)$ nu este zero și $f(x)$ este nemărginită sau $f(x)$ este zero pentru $x = -1, 0, 1, \ldots$ Deci, dacă $f(x)$ est mărginită și satisface (16), atunci $f(x) = 0$, *a.p.t.* în raport cu $p(x)$ și astfel $p(x)$ este completă mărginită. Pe de altă parte, dacă $f(x) = -f(-1)\,x$ și $f(-1) \neq 0$, atunci este satisfăcută (16), însă $f(x) \neq 0$ *a.p.t.* în raport cu $p(x)$ și astfel $p(x)$ nu este completă.

§7. Familii de măsuri probabilistice puternic complete

DEFINIȚIA 5. Familia de măsuri probabilistice

$$p^T = \{p_\theta^T \mid \theta \in \omega\}$$

este puternic completă în raport cu o măsură m pe ω dacă pentru orice submulțime ω^* a lui ω pentru care $m(\omega - \omega^*) = 0$ condiția

$$M_\theta[f(T)] = 0 \tag{19}$$

pentru toți $\theta \in \omega^*$ și orice statistică reală $f(t)$ implică că $f(t) = 0$ *a.p.t.* în raport cu p^T.

Observație. Conceptul de familie de măsuri probabilistice puternic completă cere ca oriee estimator nedeplasat pentru zero pentru o subfamilie de măsuri probabilistice să fie zero *a.p.t.* în raport cu întreaga familie cu condiția ca măsurile omise să formeze o mulțime avînd măsura m zero. Acest concept a condus la următoarea teoremă privind familiile M^x de măsuri m^x (nu necesar măsuri probabilistice).

Cu notațiile :

$\mathbf{x} = (x', x'')$ cu componentele puncte ale spațiului $W^{x'}$, respectiv $W^{x''}$.

$W^{\mathbf{x}} = W^{x'} \times W^{x''}$: întregul spațiu

$F^{\mathbf{x}} = F^{x'} \times F^{x''}$: $F^{\mathbf{x}}$ familie numărabil aditivă de submulțimi ale întregului spațiu $W^{\mathbf{x}}$

Scanned with OKEN Scanner

$\theta = (\theta_1, \theta_2)$

$\omega = \omega' \times \omega''$: spațiu abstract

$\mathfrak{L}^\theta = \mathfrak{L}^{\theta'} \times \mathfrak{L}^{\theta''}$, unde $\mathfrak{L}^{\theta'}$ și $\mathfrak{L}^{\theta''}$ sînt σ — algebrele generate de mulțimile Boreliene ale spațiului ω' respectiv ω''

$L^\theta = L^{\theta'} \times L^{\theta''}$ L măsura Lebesgue

are loc

TEOREMA 5. (Lehmann, Scheffé (1955)). *Presupunem*

$$M^x = \{m_\theta^x, \ \theta \in \omega\} \tag{20}$$

unde $\mathrm{d}m_\theta^x = g_\theta(x)\,\mathrm{d}\mu^x$, μ^x *este* σ — *finită,*

$$g_\theta(x) = g'_{\theta'}(x')g''_{\theta''}(x'')$$

unde $g'_{\theta'}(x')[g''_{\theta''}(x'')]$ *este* $(\mathfrak{L}^{\theta'} \times F^{x'})[(\mathfrak{L}^{\theta''} \times F^{x''})]$ *măsurabilă. Presupunem că există o măsură* $\mu^{x''}$ *pe* $F^{x''}$ *și măsura condiționată* $\mu^{x'|x''}$ *pe* $F^{x'}$ *depinzînd de* x'' *astfel încît ori de cîte ori este definită integrala*

$$\int_{W^x} f(x', x'')g_\theta(x)\,\mathrm{d}\mu^x \tag{21}$$

este egală cu integrala iterată

$$\int_{W^x} F(\theta', x'')g''_{\theta''}(x'')\,\mathrm{d}\mu^{x''} \tag{22}$$

unde

$$F(\theta', x'') = \int_{W^{x'}} f(x', x'')g'_{\theta'}(x')\,\mathrm{d}\mu^{x'|x''} \tag{23}$$

este măsurabilă $\mathfrak{L}^{\theta'} \times F^{x''}$.

În aceste condiții M^x *este puternic completă ou condiția că același lucru este adevărat pentru* $M^{x''} = \{m_{\theta''}, \theta'' \in \omega''\}$ *și* (*a.p.t. în raport cu* $\mu^{x''}$) *pentru*

$$M^{x'|x''} = \{m_{\theta'}^{x'|x''} \mid \theta' \in \omega'\}]$$

unde $\mathrm{d}m_{\theta''}^{x''} = g''_{\theta''}(x'')\,\mathrm{d}\mu^{x''}$ *și* $\mathrm{d}m_{\theta'}^{x'|x''} = g'_{\theta'}(x')\,\mathrm{d}\mu^{x'|x''}$

Demonstrație. Arătăm că dacă integrala (21) se anulează *a.p.t.* în raport cu L^θ, atunci

$$f(x', x'') = 0,$$

a.p.t. în raport cu M^x. Fie N mulțimea din ω pe care integrala (21) nu se anulează, astfel că $N \in \mathfrak{L}^\theta$ și $L^\theta(N) = 0$. Atunci din ipoteza teoremei integrala iteratei (22) există și este egală cu zero pentru $\theta \notin N$. Fie S mulțimea punctelor (θ', x'') astfel că $F(\theta', x'')$ definită în (23) nu se anulează pentru $S \in \mathfrak{L}^{\theta'} \times F^{x''}$. Mai întîi arătăm că măsura produs $L^{\theta'} \times M_{\theta''}^{x''}$ pe S este zero pentru toți $\theta'' \in \omega''$.

Scanned with OKEN Scanner

Fie $N_{\theta'}$ secţiunea lui N prin $\theta' = \text{const.}$, adică

$$N_{\theta'} = \{\theta'' \mid (\theta', \theta'') \in N\}.$$

Deoarece $(L^{\theta'} \times L^{\theta''})(N) = 0$, $L^{\theta''}(N_{\theta'}) = 0$ cu excepţia lui $\theta' \in N'$, unde $N' \in \mathfrak{L}^{\theta'}$ şi $L^{\theta'}(N') = 0$. Pentru $\theta' \notin N'$, avem

$$\int_{W^{x''}} F(\theta', x'')\, dm_{\theta''}^{x''} = 0 \quad a.p.t. \text{ în raport cu } L^{\theta''}$$

şi astfel din faptul că $M^{x''}$ este puternic consistentă, $F(\theta', x'') = 0$. *a.p.t.* în raport cu $M^{x''}$. Astfel toate secţiunile lui S prin $\theta' = \text{const.}$ cu $\theta' \notin N'$ au măsura $m_{\theta''}^{x''}$ zero pentru toţi $\theta'' \in \omega''$. Deci $(L^{\theta'} \times m_{\theta''}^{x''})(S) = 0$ pentru toţi $\theta'' \in \omega''$.

Urmează că dacă $S_{x''}$ reprezintă secţiunea lui S prin $x'' = \text{const.}$, atunci mulţimea N'' din $W^{x''}$ pentru care $L^{\theta'}(S_{x''}) \neq 0$ are măsura $m_{\theta''}^{x''}$ zero pentru toţi $\theta'' \in \omega''$. Astfel spus,

$$F(\theta', x'') = \int_{W^{x'}} f(x', x'')\, dm_{\theta'}^{x'|x''} = 0 \quad a.p.t. \text{ în raport cu } L^{\theta'}$$

cu excepţia $x'' \in N''$, o mulţime nulă a familiei $M^{x''}$.

Deci din faptul că $M^{x'|x''}$ este puternic completă, pentru $x'' \in N''$, avem $f(x', x'') = 0$ *a.p.t.* în raport cu $M^{x'|x''}$ şi din aceasta rezultă $f(x', x'') = 0$ *a.p.t.* în raport cu m^x.

§8. Statistici suficiente în cazul mai multor parametri

Să presupunem că repartiţia depinde de k parametri $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k$

DEFINIŢIA 6. Mulţimea de statistici $T_1, \ldots, T_m$ poartă numele de mulţime minimală de statistici suficiente dacă m este cel mai mic număr pentru care

$$P(\mathbf{x} \mid \theta) = g(T_1, \ldots, T_m \mid \theta)\, h(\mathbf{x} \mid T), \tag{24}$$

unde g este densitatea statisticilor $T_1, \ldots, T_m$, iar h, densitatea observaţiilor date fiind statisticile $T_1, \ldots, T_m$, este independentă de θ.

m poate fi mai mare, egal cu sau mai mic decît k, numărul parametrilor de care depinde P.

Fie

$$P_{ij} = -\frac{\partial \ln P}{\partial \theta_i\, \partial \theta_j} \text{ şi } M(P_{ij}) = I_{ij}$$

DEFINIŢIA 7. Matricea $\mathbf{I} = (I_{ij})_{1 \leqslant i, j \leqslant k}$ poartă numele de matrice informaţională.

Scanned with OKEN Scanner

TEOREMA 6. *Fie* $t_1, \ldots, t_r$ $(r \leqslant k)$ *statistici independente astfel încît*

i) $M(t_i) = \tau_i(\theta_1, \ldots, \theta_k)$

ii) $M(t_i - \tau_i)(t_j - \tau_j) = \sigma_{ij}$ $\qquad 1 \leqslant i, j \leqslant k$

atunci

(*A*) *există mulțimea* $m_1, \ldots, m_r$ *de statistici suficiente astfel încît*

A.1) $M(m_i) = \tau_i(\theta_1, \ldots, \theta_k)$

A.2) *dacă* $\mathbf{U} = (U_{ij})$ *unde* $U_{ij} = M(m_i - \tau_i)(m_j - \tau_j)$ *și* $\Sigma = (\sigma_{ij})$, *atunci matricea* $(\Sigma - \mathbf{U})$ *este pozitiv definită sau semipozitiv definită.*

(B) *Dacă domeniul de integrare nu depinde de parametrii și inversa* $\mathbf{I}^{-1}$ *a matricii* $\mathbf{I}$ *există și* $\Delta = (\partial \tau_i / \partial \theta_j)$, $1 \leqslant i \leqslant r$, $1 \leqslant j \leqslant k$, *atunci matricea* $\Sigma - \Delta \mathbf{I}^{-1} \Delta'$, *unde* Δ' *este transpusa matricii* Δ, *este pozitiv sau semi-pozitiv definită.*

Demonstrație. Deoarece

$$\int t_i P(\mathbf{x} \mid \theta)\, dv = \int g(T \mid \theta)\, dT \int \ldots \int t_i h(x)\, dv' =$$

$$= \int m_i(T)\, g(T \mid \theta)\, dT,$$

urmează că m_i este funcție numai de T astfel încît

$$M(m_i) = M(t_i) = \tau_i \quad , \quad 1 \leqslant i \leqslant r$$

Aceasta demonstrează A.1.

Considerăm $\Sigma l_i t_i$ unde l_i sînt constante arbitrare

$$M(\Sigma l_i t_i) = \Sigma l_i \tau_i = M(\Sigma l_i m_i)$$

$$\int [\Sigma l_i (t_i - \tau_i)^2 P(x \mid \theta)\, dv =$$

$$= \int [\Sigma l_i (t_i - m_i) + \Sigma l_i (m_i - \tau_i)]^2 P(\mathbf{x} \mid \theta)\, dv =$$

$$= \int [\Sigma l_i (t_i - m_i)^2 P(x \mid \theta)\, dv + \int [\Sigma l_i (m_i - \tau_i)]^2 P(\mathbf{x} \mid \theta)\, dv +$$

$$+ 2 \int [(\Sigma l_i (m_i - \tau_i)\, g(T \mid \theta)\, dT \int [\Sigma l_i (t_i - m_i)]\, h(x \mid T)\, dv'$$

Din (25), urmează că ultimul termen este nul, ceilalți termeni fiind pozitivi. Obținem

$$D^2(\Sigma l_i t_i) \geqslant D^2(\Sigma l_i m_i)$$

Scanned with OKEN Scanner

sau

$$\Sigma\Sigma l_i l_j \sigma_{ij} > \Sigma\Sigma l_i l_j U_{ij} \text{ sau } \Sigma\Sigma l_i l_j (\sigma_{ij} - U_{ij}) \geqslant 0$$

Aceasta arată că $(\Sigma - \mathbf{U})$ este pozitivă sau semi-pozitivă, ceea ce demonstrează A.2.

Deoarece

$$\int t_j P(\mathbf{x} \mid \theta)\, dv = v_j$$

$$\int t_j \frac{dP}{d\theta_i}\, dv = \frac{d\tau_j}{d\theta_i},$$

astfel încît considerînd matricea de covarianţe a statisticilor

$$t_1, \ldots, t_r, \frac{\partial \ln P}{\partial \theta_1}, \ldots, \frac{\partial \ln P}{\partial \theta_k},$$

găsim că matricea

$$\left(\begin{array}{c|c} \Sigma & \Delta \\ \hline \Delta' & \mathbf{I} \end{array}\right)$$

este pozitivă sau semipozitivă (A nu se confunda $\mathbf{I}$ cu matricea unitate).

Considerăm determinantul

$$\left|\begin{array}{c|c} \delta_r & -\Delta\mathbf{I}^{-1} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{I}^{-1} \end{array}\right|$$

unde δ_r este matricea unitate de ordin r, care este întotdeauna pozitiv.

Produsul

$$\left|\begin{array}{c|c} \delta_r & -\Delta\mathbf{I}^{-1} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{I}^{-1} \end{array}\right| \left|\begin{array}{c|c} \Sigma & \Delta \\ \hline \Delta' & \mathbf{I} \end{array}\right| = \left|\begin{array}{c|c} \Sigma - \Delta\mathbf{I}^{-1}\Delta' & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{I}^{-1}\Delta' & \delta_r \end{array}\right| \geqslant 0,$$

sau $|\Sigma - \Delta\mathbf{I}^{-1}\Delta'| \geqslant 0$. Acest rezultat este adevărat şi pentru o submulţime de statistici $t_1, \ldots, t_r$, care arată că matricea $\Sigma - \Delta\mathbf{I}^{-1}\Delta'$ este pozitiv sau semi-pozitiv definită, ceea ce demonstrează (B).

COROLARUL 1. *Deoarece matricea* $\Sigma - \mathbf{U}$ este pozitiv sau *semi-pozitiv definită, urmează că* $\sigma_{ii} \geqslant U_{ii}$, $1 \leqslant i \leqslant r$, *care arată că estimaţiile eficiente sînt funcţii explicite de statisticile suficiente.*

COROLARUL 2. *Deoarece matricea* $(\Sigma - \Delta\mathbf{I}^{-1}\Delta')$ *este potiziv sau semi-pozitiv definită, urmează că*

$$|\Sigma| \geqslant |\Delta\mathbf{I}^{-1}\Delta'|$$

DEFINIŢIA 8. Cantitatea $|\Sigma|$ poartă numele de dispersia generalizată a estimaţiilor.

Corolarul 2 arată că $|\Sigma|$ este cel puţin egală cu o cantitate care este definită independent de orice metodă de estimare.

Scanned with OKEN Scanner

COROLARUL 3. *Deoarece* $(\mathbf{\Sigma} - \mathbf{U})$ *este pozitiv sau semi-pozitiv definită, urmează că* $|\mathbf{\Sigma}| \geqslant |\mathbf{U}|$. *Aceasta arată că estimaţiile cu dispersia generalizată minimă sînt funcţii de statisticile suficiente.*

COROLARUL 4. *Considerînd numai elementele diagonale din* $\mathbf{V} - \Delta \mathbf{I}^{-1} \Delta'$ *obţinem*

$$\sigma_{ii} > \Sigma\Sigma\, I^{kn} \frac{\partial \tau_i}{\partial \theta_k} \frac{\partial \tau_i}{\partial \theta_n} \tag{26}$$

unde I^{kn} *sînt elementele matricei inverse a matricei informaţionale* I_{mn}.

Aceasta arată că dispersia estimatorului lui τ_i este cel puţin egală cu o cantitate definită independent de orice metodă de estimare. Dacă $\tau_i = \theta_i$, (26) se reduce la $\sigma_{ii} \geqslant I^{ii}$.

COROLARUL 5. *Dacă*

$$\sigma_{ii} = \Sigma\Sigma\, I^{kn} \frac{\partial \tau_i}{\partial \theta_k} \frac{\partial \tau_i}{\partial \theta_n}$$

în care caz estimaţia lui τ_i *are dispersia minimă, atunci*

$$\sigma_{ij} = \Sigma\Sigma\, I^{kn} \frac{\partial \tau_i}{\partial \theta_k} \frac{\partial \tau_j}{\partial \theta_n}$$

astfel că covarianţa acestei estimaţii şi a oricărei alte estimaţii a oricărei alte funcţii parametrice are o valoare fixă independentă de orice metodă de estimare.

Aceasta rezultă din faptul că determinantul

$$\begin{vmatrix} \sigma_{ii} - \Sigma\Sigma\, I^{kn} \dfrac{\partial \tau_i}{\partial \theta_k} \dfrac{\partial \tau_j}{\partial \theta_n} & \sigma_{ij} - \Sigma\Sigma\, I^{kn} \dfrac{\partial \tau_i}{\partial \theta_k} \dfrac{\partial \tau_j}{\partial \theta_n} \\ \sigma_{ij} - \Sigma\Sigma\, I^{kn} \dfrac{\partial \tau_i}{\partial \theta_k} \dfrac{\partial \tau_j}{\partial \theta_n} & \sigma_{jj} - \Sigma\Sigma\, I^{kn} \dfrac{\partial \tau_j}{\partial \theta_k} \dfrac{\partial \tau_j}{\partial \theta_n} \end{vmatrix}$$

care este un subdeterminant al determinantului $|\Sigma - \Delta \mathbf{I}^{-1} \Delta^{-1}|$ este $\geqslant 0$.

Exemplul 18. Fie $X_1, X_2, \ldots, X_n$ o selecţie asupra unei variabile $N(\mu, \sigma^2)$. În acest caz matricea informaţională corespunzătoare lui μ şi σ^2 este

$$(\mathbf{I}_{\mu, \sigma^2}) = \begin{pmatrix} \dfrac{n}{\sigma^2} & 0 \\ 0 & \dfrac{n}{2\sigma^4} \end{pmatrix}$$

cu inversa

$$(\mathbf{I}^{\mu, \sigma^2}) = \begin{pmatrix} \dfrac{\sigma^2}{n} & 0 \\ 0 & \dfrac{2\sigma^4}{n} \end{pmatrix}$$

Scanned with OKEN Scanner

Deoarece $\bar{X}$ ca o estimaţie a lui μ are cea mai mică dispersie, urmează că corelaţia dintre orice estimaţie a lui σ^2 şi $\bar{X}$ este zero, deoarece $\mathbf{I}^{\mu,\sigma^2} = 0$.

Ca estimaţie a lui σ^2 considerăm

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_1^n (X_i - \bar{X})^2$$

$$M(s^2) = \sigma^2$$

$$D^2(s^2) = \frac{2\sigma^4}{n-1},$$

care arată că dispersia minimă $2\sigma^4/n$ nu este atinsă. Însă aceasta este cea mai mică ce poate fi atinsă. Într-adevăr, dacă altă estimaţie a lui σ^2 diferă de s^2 prin $f(s, \bar{x})$, atunci

$$\int f(s, \bar{x}) \exp\left[-\frac{m(\bar{x}-\mu) + (n-1)s^2}{2\sigma^2} \right] dv = 0 \tag{27}$$

Derivînd (27) de două ori în raport cu μ, obţinem

$$M[(\bar{x}-\mu)^2 f(s, \bar{x})] = 0$$

Derivînd (27) în raport cu σ^2, obţinem

$$M[n(\bar{x}-\mu)^2 f(s, \bar{x}) + (n-1)s^2 f(s, \bar{x})] = 0$$

sau

$$\operatorname{cov}[s^2, f(s, \bar{x})] = 0$$

Avem :

$$D^2[s^2 + f(\bar{x}, s)] = D^2(s) + D^2[f(\bar{x}, s)],$$

care arată că $D^2(s^2)$ este cea mai mică posibilă. Astfel $\bar{x}$ şi s^2 sînt estimaţii eficiente pentru μ şi σ^2.

Koopman (1936) a arătat că în condiţii generale, $f(x_1, \ldots, x_n | \theta_1, \ldots \theta_k)$ admiţînd o mulţime de statistici $T_1, \ldots, T_s$ suficiente pentru $\theta_1, \ldots, \theta_k$ poate fi exprimată sub forma

$$f(x \mid \theta) = \Sigma A_j(\theta) B_j(T) + C(x) + D(T)$$

§9. Statistici minimal suficiente

DEFINIŢIA 8. Vom spune că t este statistică minimal suficientă pentru $P = \{p_\theta \mid \theta \in \omega\}$ dacă t are următoarele proprietăţi

i) t este o statistică suficientă pentru $\{p_\theta \mid \theta \in \omega\}$

ii) Dacă t^* este o statistică suficientă pentru $\{p_\theta \mid \theta \in \omega\}$ există o funcţie s astfel încît $t(x) = s\,[t^*(x)]$ *a.p.t.* în raport cu p_θ, pentru fiecare $\theta \in \omega$.

Scanned with OKEN Scanner

Fie π o familie de măsuri probabilistice indexată de $\Xi = \Theta \times \Omega$ astfel încît pentru fiecare $\xi = (\theta, \tau) \in \Xi$, $F_\xi \in \pi$ este o repartiţie probabilistică a unei variabile reale sau a unui vector real $X \cdot F_\xi$ posedă o densitate în raport cu o măsură λ, σ — finită pentru toţi $\xi \in \Xi$.

DEFINIŢIA 9. Vom spune că t este o statistică suficientă pentru τ dacă t este suficientă în sensul obişnuit (Definiţia 1) pentru subfamilia π_θ pentru fiecare $\theta \in \Theta$ fixat.

Existenţa statisticei minimal suficiente pentru o familie de repartiţii probabilistice indexată de o singură mulţime parametrică Θ a fost stabilită de Dynkin (1951) şi de Bahadur (1954). Definim suficienţa minimală pentru unul dintre parametrii în modelul cu doi parametri.

DEFINIŢIA 10. Vom spune că t este o statistică minimal suficientă pentru τ dacă t este o statistică minimal suficientă pentru fiecare subfamilie $\pi_\theta : \theta \in \Theta$

Din rezultatele lui Dynkin şi Bahadur nu rezultă că există o statistică minimal suficientă pentru τ în sensul definiţiei 10. Adeseori o statistică minimal suficientă pentru π_θ diferă esenţial de o statistică minimal suficientă pentru $\pi_{\theta'}$, unde θ şi θ' sînt două puncte diferite din Θ.

În cazul a doi parametri rezultatele lui Dynkin şi Bahadur arată numai că există o clasă $\{t_\theta \mid \theta \in \Theta\}$ de statistici astfel încît t_θ este minimal suficientă pentru π_θ pentru fiecare $\theta \in \Theta$ fixat. Alt mod de a exprima această situaţie este de a spune că statistica minimal suficientă pentru τ depinde de parametrul θ. În anumite cazuri, există o statistică t care este esenţial egală cu t_θ pentru toţi $\theta \in \Theta$. În acest caz t este minimal suficientă pentru τ în sensul definiţiei 10 şi vom spune că statistica minimal suficientă pentru τ este independentă de θ.

Ne vom ocupa de existenţa şi construcţia statisticilor minimal suficiente pentru o familie de măsuri probabilistice indexată de o singură mulţime de parametri.

Presupunem că toate măsurile probabilistice ale familiei $P = \{p_\theta \mid \theta \in \omega\}$ sînt absolut continui în raport cu o măsură μ pe F care este independentă de θ şi are proprietatea că X este o reuniune numărabilă de mulţimi din F de măsură μ finită. Cu alte cuvinte, există $p_\theta(x)$ pentru fiecare $\theta \in \omega$ astfel încît

$$p_\theta(A) = \int_A p_\theta(x)\, d\mu \quad \text{pentru toţi } A \in \mathcal{F}$$

ceea ce arată că $p_\theta(x)$ este o densitate probabilistică generalizată în raport cu μ. Putem obţine statistici minimal suficiente pentru P prin aplicarea unei operaţii U la familia $\{p_\theta(x) \mid \theta \in \omega\}$. Definim operaţia U.

Fie $\mathcal{F}$ familia funcţiilor cu valori reale definite pe X şi presupunem că aceste funcţii sînt indexate de un parametru θ luînd valori în A, astfel că $\mathcal{F} = \{f_\theta \mid \theta \in A\}$. Rezultatul aplicării operaţiei U la $\mathcal{F}$ este descompunerea lui X, notată $U(\mathcal{F})$. Pentru orice punct x^0 din R, elementul D din $U(\mathcal{F})$ conţinînd pe x^0, notat $D(x^0)$, este definit ca mulţimea tuturor punctelor x pentru care există o funcţie $k(x, x^0) \neq 0$, ce nu depinde de θ şi astfel încît

$$f_\theta(x) = k(x, x^0) f_\theta(x^0) \quad \text{pentru toţi } \theta \in A.$$

Scanned with OKEN Scanner

Dacă x' este în $D(x^0)$, atunci x^0 este în $D(x')$.

$$L^0 = \{x \mid f_0(x) = 0 \quad pentru \quad toți \quad \theta \in A\}$$

este un element al $U(\mathcal{F})$.

TEOREMA 7. (Lehmann, Scheffé (1950)). *Fie P mulțimea măsurilor numărabile pe F ce posedă densități probabilistice $p_\theta(x)$, $\theta \in \omega$ în raport cu μ. Dacă operația U este aplicată la o determinare particulară a familiei $\{p_\theta(x)\}$, descompunerea ce rezultă este F-măsurabilă și este asociată cu o statistică minimal suficientă pentru P.*

Probleme

1. Fie $X_1, X_2, \ldots, X_n$ o selecție asupra unei variabile aleatoare X având densitatea de repartiție

$$f(x, \theta) = e^{-(x-\theta)}, \quad x > \theta.$$

Să se arate că $t_n = \min X_i$ este o statistică suficientă pentru θ și să se determine repartiția variabilei $2n(t_n - \theta)$.

2. Fie $X_1, X_2, \ldots, X_n$ o selecție asupra unei variabile aleatoare X având densitatea de repartiție

$$f(x, \theta) = \frac{1}{2\theta} e^{-|x|/\theta}, \quad \theta > 0,$$

Să se arate că $t_n = \sum_1^n |X_i|$ este o statistică suficientă pentru θ și să se determine repartiția variabilei $2t_n/\theta$.

3. Fie $X_1, X_2, \ldots, X_n$ o selecție asupra unei variabile aleatoare X având densitatea de repartiție

$$f(x, \theta) = \frac{\alpha}{\theta} x^{\alpha-1} e^{-x^\alpha/\theta}, \quad x > 0, \quad \theta > 0$$

cu $\alpha > 0$ cunoscut.

Să se arate că $t_n = \sum_1^n X_i^\alpha$ este o statistică suficientă pentru θ și să se determine repartiția variabilei $2t_n/\theta$.

4. Fie $X_1, X_2, \ldots, X_n$ o selecție asupra unei variabile aleatoare X având densitatea de repartiție

$$f(x, \theta) = \theta x^{\theta-1}, \quad 0 < x < 1, \quad \theta > 0$$

Să se arate că $t_n = -\sum_1^n \ln X_i$ este o statistică suficientă pentru θ și să se determine repartiția variabilei $2\theta t_n$.

5. Densitatea de repartiție a unei variabile aleatoare depinde de doi parametrii reali θ_1 și θ_2. Să se arate că dacă t_1 este suficientă pentru θ_1 cînd θ_2 este cunoscut și t_2 este suficientă pentru θ_2 cînd θ_1 este cunoscut, atunci (t_1, t_2) este suficient pentru (θ_1, θ_2).

6. Fie $X_1, X_2, \ldots, X_n$ o selecție asupra unei variabile aleatoare X repartizate uniform pe intervalul $(0, \beta)$.

Să se arate că

a) $\frac{n-1}{n} X_{(n)}$ este un estimator nedeplasat pentru β.

b) $X_{(n)}$ este un estimator suficient pentru β.

Scanned with OKEN Scanner

7. Fie $X_1, \ldots, X_n$ o selecție asupra unei variabile aleatoare X avînd o repartiție uniformă în intervalul (α, β). Să se arate că

a) $(X_{(n)}, X_{(1)})$ constituie o mulțime de statistici suficientă pentru α și β.

b) Statisticile

$$t_1 = \frac{n}{n-1}\left(X_{(n)} - \frac{X_{(1)}}{n}\right)$$

și

$$t_2 = \frac{n}{n-1}\left(X_{(1)} - \frac{X_{(n)}}{n}\right)$$

sînt estimatori nedeplasați pentru α și respectiv β.

c) Statisticile

$$\frac{1}{2}(X_{(1)} + X_{(n)}) \text{ și } \frac{n+1}{n-1}(X_{(n)} - X_{(1)})$$

sînt estimatori nedeplasați pentru

$$\frac{1}{2}(\alpha + \beta) \text{ și respectiv } (\beta - \alpha).$$

8. Fie $X_{(1)}, X_{(2)}, \ldots, X_{(n)}$ statisticile de ordine corespunzătoare unei selecții asupra unei variabile aleatoare X avînd densitatea de repartiție

$$\frac{1}{c} e^{-\frac{x-m}{c}}, \text{ pentru } x \geqslant m$$

a) Să se arate că $(\overline{X}_n, X_{(1)})$ și deci $(X_{(1)}, \overline{X} - X_{(1)})$ constituie o statistică suficient completă pentru (m, c).

b) Să se arate că $2n(\overline{X}_n - m)/c$ $[2n(X_{(1)} - m)/c]$ este repartizată $\chi^2(2n)$ $[\chi^2(2)]$.

c) Să se arate că $2n(\overline{X} - X_{(1)})/c$ este repartizată $\chi^2(2(n-1))$ și independentă de $X_{(1)}$

d) Să se arate că indicatorul mulțimii $(x, +\infty)$ este o estimație nedeplasată pentru

$$S(x) = P(X > x) = \begin{cases} \exp\left[-\frac{1}{c}(x-m)\right] & x \geqslant m \\ 0 & \text{în rest} \end{cases}$$

Laurent, 1963.

9. Să se arate că familia de repartiții avînd densitatea de repartiție

$$P(x_1, \ldots, x_n; \theta) = \frac{1}{2^n \theta^n}, \quad -\theta < x_i < \theta.$$

nu este completă.

10. Fie $X_1, X_2, \ldots, X_n$ o selecție asupra unei variabile aleatoare X avînd funcția de frecvență

$$P_j = P(X = j) = \frac{a_j \theta^j}{f(\theta)} \quad (j = 0, 1, \ldots; \theta > 0) \tag{28}$$

unde $a_j \geqslant 0$ și $f(\theta) = \sum_0^\infty a_j \theta^j$

Scanned with OKEN Scanner

Să se arate că

a) Statistica $T = \sum_1^n X_j$ este suficientă pentru θ

b) Statistica T este suficient completă pentru θ

c)
$$\begin{cases} b\left(\sum_1^n X_j - 1\right)/b\left(\sum_1^n X_j\right) & \text{dacă} \quad \sum_1^n X_j > 0 \\ & \text{dacă} \quad \sum_1^n X_j = 0 \end{cases}$$

unde $b(k)$ este coeficientul lui θ^k din dezvoltarea $(f(\theta))^n$,
este un estimator nedeplasat de minimă dispersie pentru θ.

Roy și Mitra (1957)

11. Fie $X_1, \ldots, X_n$ o selecție asupra unei variabile aleatoare $X \sim N(0, \sigma^2)$, $\sigma^2 \in \omega$, mulțimea numerelor reale pozitive.

Să se arate că $t_n(X_1, \ldots, X_n) = \sum_1^n X_i^2$ este completă.

12. Fie X_1, X_2 variabile aleatoare independente $X_j \sim Bi(n, p_j)$, $j = 1, 2$, și $(p_1, p_2) = \omega$, interiorul pătratului unitate. Să se arate că $t(X_1, X_2) = (X_1, X_2)$ este completă.

13. Fie $X_1, X_2, \ldots, X_n$ o selecție asupra unei variabile aleatoare X repartizată

a) $N(a\ \sigma,\ \sigma^2)$ cu a fixat $0 < \sigma < \infty$

b) uniform $R\left(\theta - \frac{1}{2},\ \theta + \frac{1}{2}\right) - \infty < \theta < \infty$

c) uniform $R(\theta_1,\ \theta_2)$, $-\infty < \theta_1 < \theta_2 < \infty$

1. Să se arate că pentru aceste familii de repartiții următoarele statistici sînt suficiente:

a) $T = (\Sigma X_i,\ \Sigma X_i^2)$

b) și c) $T = \left(\min_{1 \leqslant j \leqslant n} X_j,\ \max_{1 \leqslant j \leqslant n} X_j\right)$

2. Să se arate că familia repartițiilor statisticii T este completă pentru cazul c), însă pentru a) și b) nu este completă, sau chiar completă mărginită.

14. Fie Φ orice funcție măsurabilă mărginită pe spațiul probabilistic. Se se arate că

$$\int \Phi(x) \exp\left[\sum_1^k \theta_j T_j(x)\right] d\mu(x)$$

considerată ca funcție de variabilele complexe $\theta_j = \xi_j + i\eta_j (j = 1, \ldots, k)$ este o funcție analitică în fiecare dintre aceste variabile în spațiul parametric euclidian și că poate fi derivată de orice ordin în raport cu θ sub semnul integrală.

Lehmann (1959), T.9 cap. 2

15. Să se arate că dacă familia măsurilor $p(x)$ este completă, atunci ea este completă mărginită.

Scanned with OKEN Scanner

Capitolul IX

METODA VEROSIMILITĂȚII MAXIME

§1. Introducere

Metoda verosimilității maxime este una dintre cele mai vechi și totodată una dintre cele mai importante metode de estimare. Această metodă a fost folosită de Gauss atunci cînd a dezvoltat metoda celor mai mici pătrate și reintrodusă în 1912 de Fisher.

Metoda verosimilității maxime posedă proprietăți satisfăcătoare în cazul selecțiilor de volum mare.

Această metodă constă în găsirea unei valori a parametrului θ care să facă maximă funcția de verosimilitate. În presupunerile :

— funcția de verosimilitate este pozitivă și derivabilă în raport cu θ

— maximul nu se realizează pe frontiera mulțimii tuturor valorilor admisibile ale parametrului θ,

estimatorul de maximă verosimilitate este soluția ecuației de verosimilitate

$$\frac{\partial P}{\partial \theta} = 0 \tag{1}$$

sau echivalent a ecuației

$$\frac{\partial \ln P}{\partial \theta} = 0 \tag{1'}$$

Vom înlătura soluțiile care sînt independente de variabilele de selecție, adică soluțiile constante.

Exemplul 1. Dacă $X_1, \ldots, X_n$ este o selecție asupra unei variabile aleatoare $X \sim N(\theta, \sigma^2)$, atunci $\overline{X}_n$ și m_2 sînt estimatori de maximă verosimilitate pentru θ și respectiv σ^2.

Observație. $\overline{X}_n$ este un estimator nedeplasat pentru parametrul θ, în timp ce m_2 nu este un estimator nedeplasat pentru σ^2.

Exemplul 2. Fie $X_1, \ldots, X_n$ o selecție asupra unei variabile aleatoare $\chi^2(\nu, \lambda)$. Dacă ν este cunoscut, estimatorul de maximă verosimilitate $\hat{\lambda}$ al parametrului λ trebuie să satisfacă ecuația

$$\sum_{i=1}^{n} \left\{ \frac{\sum_{j=0}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\hat{\lambda}} \left[\frac{\left(\frac{1}{2}\hat{\lambda}\right)^{j-1}}{(j-1)!} - \frac{\left(\frac{1}{2}\hat{\lambda}\right)^{j}}{j!} \right] p_{\chi^2(\nu+2j)}(X_i)}{\sum_{j=0}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\hat{\lambda}} \frac{\left(\frac{1}{2}\hat{\lambda}\right)^{j}}{j!} p_{\chi^2(\nu+2j)}(X_i)} \right\} = 0 \tag{2}$$

Scanned with OKEN Scanner

sau

$$(2') \qquad \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{\sum_{j=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\hat{\lambda}\right)^{j-1}}{(j-1)!} p_{\chi^2(\nu+2j)}(X_i)}{\sum_{j=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\hat{\lambda}\right)^{j}}{j!} p_{\chi^2(\nu+2j)}(X_i)} \right] = 0$$

dacă această ecuație are rădăcină pozitivă. Această ecuație nu se rezolvă ușor.

Meyer (1967) a arătat că, pentru $\nu = 2$, această ecuație are o soluție pozitivă dacă $\sum_{1}^{n} X_i^2 > 2n$, în rest estimatorul de maximă verosimilitate are valoarea zero.

De asemenea, a arătat că.

$$(3) \qquad \lim_{n\to\infty} P\left[\sum_{1}^{n} X_i^2 > 2n\right] = 1$$

§2. Selecții grupate

Presupunem că variabilele de selecție cad într-un interval (z_0, z_n), $-\infty \leqslant z_0 \leqslant z_n \leqslant \infty$ și că acest interval este împărțit în n intervale.

$$(4) \qquad (z_0, z_1), (z_1, z_2), \ldots, (z_{n-1}, z_n)$$

Selecțiile parțial grupate sînt acelea în care fiecare interval cade într-una din mulțimile A și B. Pentru observațiile din orice interval A se înregistrează valoarea exactă a observației, în timp ce pentru intervalele din B se înregistrează numărul total de observații.

Vom nota observația k din intervalul j prin x_{jk} și numărul total de observații din intervalul j prin m_j. Probabilitatea ca o observație să cadă în intervalul j este

$$(5) \qquad p_j = F(z_j) - F(z_{j-1})$$

și funcția de verosimilitate este

$$(6) \qquad P(\theta) = \prod_{A} \prod_{k=1}^{m_j} f(x_{jk}) \prod_{B} p_j^{m_j}$$

Teorema 1 (Kulldorff (1961)). *Dacă sînt satisfăcute următoarele patru condiții:*

i) $\frac{\partial \ln p_j}{\partial \theta}$, $\frac{\partial^2 \ln p_j}{\partial \theta^2}$ *există pentru orice* θ, *într-un interval deschis și pentru fiecare interval din* B *în care o observație a fost înregistrată.*

Scanned with OKEN Scanner

ii) $\frac{\partial \ln f(x_{jk})}{\partial \theta}$, $\frac{\partial^2 \ln f(x_{jk})}{\partial \theta^2}$ *există pentru orice interval din* A *pentru* $k = 1, 2, \ldots, m_j$

iii) $\sum_A \sum_{k=1}^{m_j} \frac{\partial \ln f(x_{jk})}{\partial \theta} + \sum_B m_j \frac{\partial \ln p_j}{\partial \theta_j}$

este pozitivă în extremitatea stîngă şi negativă în cea dreaptă a intervalului.

iv) $\sum_A \sum_{k=1}^{m_j} \frac{\partial^2 \ln f(x_{jk})}{\partial \theta^2} + \sum_B \frac{\partial^2 \ln p_j}{\partial \theta^2}$

este negativă pentru orice θ *satisfăcînd ecuaţia de verosimilitate*

$$(7) \qquad \sum_A \sum_{k=1}^{m_j} \frac{\partial \ln f(x_{jk})}{\partial \theta} + \sum_B \frac{\partial \ln p_j}{\partial \theta} = 0,$$

atunci ecuaţia de verosimilitate (7) *are o singură rădăcină, şi această rădăcină este estimatorul de maximă verosimilitate pentru* θ.

DEFINIŢIA 1. Vom spune că şirul de estimatori $\{t_n\}$ este eficient în sens strict dacă

$$\lim_{n\to\infty} P(c_n(\theta)(t_n - \theta) < y) = \Phi(y)$$

unde

$$c_n(\theta) = M\left(\frac{\partial \ln P}{\partial \theta}\right)^2$$

TEOREMA 2. *Dacă sînt satisfăcute condiţiile*

i) $\frac{\partial \ln P_i}{\partial \theta}$ *există pentru orice* $\theta \in \Omega_0$ *pentru* $i = 1, \ldots, k$

ii) $\frac{\partial^2 \ln P_i}{\partial \theta^2}$ *există pentru orice* $\theta \in \Omega_0$ *pentru* $i = 1, \ldots, k$

iii) $\frac{\partial^3 \ln P_i}{\partial \theta^3}$ *există pentru orice* $\theta \in \Omega_0$ *pentru* $i = 1, \ldots, k$

iv) $\sum_1^k \frac{\partial P_i}{\partial \theta} = 0$ *pentru* $\theta = \theta_0$

v) $\sum_1^k \frac{\partial^2 P_i}{\partial \theta^2} = 0$ *pentru* $\theta = \theta_0$

vi) $-\infty < \sum_1^k P_i \frac{\partial^2 \ln P_i}{\partial \theta^2} < 0$ *pentru* $\theta = \theta_0$

Scanned with OKEN Scanner

vii) *Există o funcție* $g(\theta)$ *care este pozitivă și derivabilă de două ori pentru fiecare* $\theta \in \Omega_0$ *și o mulțime de numere* H_i *(independentă de* θ *dar putînd să depindă de* θ_0*) astfel încît*

a) $$\left| \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \left[g(\theta) \frac{\partial \ln P_i}{\partial \theta} \right] \right| < H_i ; \; i = 1, \ldots, k$$

b) $$\sum_1^k p_i(\theta) H_i < \infty$$

atunci estimatorul de maximă verosimilitate este consistent și asimptotic în sens strict pentru θ.

Exemplul 3. Fie $X_1, X_2, \ldots, X_n$ o selecție asupra unei variabile aleatoare X cu densitatea de repartiție

$$p_X(x) = \alpha e^{-\alpha x}, \; \alpha > 0$$

Se înregistrează valoarea exactă a fiecărei valori de selecție mai mici decît M și se numără toate valorile de selecție $\geqslant M$. Probabilitatea unei valori de selecție mai mare decît M este

$$p_M = \int_M^\infty \alpha e^{-\alpha x} = e^{-\alpha M}.$$

și în presupunerea că s-au înregistrat valorile $x_1, \ldots, x_m$ și că $n-m$ observații sînt mai mari sau egale cu M

$$P(\alpha) = \left[\prod_{j=1}^m \alpha e^{-\alpha x_j} \right] (e^{-\alpha M})^{n-m} .$$

Urmează că

$$\frac{\partial \ln P}{\partial \alpha} = 0 \Rightarrow \hat{\alpha} = \frac{m}{\sum_1^m x_j + M(n-m)}.$$

Exemplul 4. Fie $X_1, X_2, \ldots, X_n$ o selecție asupra unei variabile aleatoare avînd densitatea

$$g_X\left(x ; \frac{1}{\lambda}\right) = (2\pi x^3)^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{\lambda}\right)^{-\frac{1}{2}} \exp\left[- \frac{1}{2x(1/\lambda)} \right], \qquad x > 0$$

Arătăm că estimatorul de maximă verosimilitate pentru $1/\lambda$ este consistent și asimptotic eficient în sens strict. În acest scop verificăm condițiile teoremei 2.

Scanned with OKEN Scanner

Avem

$$\lg_x\left(x;\frac{1}{\lambda}\right)=-\frac{1}{2}\ln 2\pi-\frac{1}{2}\ln\frac{1}{\lambda}-\frac{3}{2}\ln x-\frac{1}{2x(1/\lambda)}$$

$$\frac{\partial \ln g_x}{\partial(1/\lambda)}=-\frac{1}{2(1/\lambda)}+\frac{1}{2x(1/\lambda)^2} \tag{8}$$

$$\frac{\partial^2 \ln g_x}{\partial(1/\lambda)^2}=\frac{1}{2(1/\lambda)^2}-\frac{1}{x(1/\lambda)^3} \tag{9}$$

$$\frac{\partial^3 \ln g_x}{\partial(1/\lambda)^3}=\frac{1}{(1/\lambda)^3}+\frac{3}{x(1/\lambda)^4}$$

ceea ce arată că

i) $\dfrac{\partial \ln g_x}{\partial(1/\lambda)}$ există pentru fiecare $\lambda\in(0,\infty)$ și aproape pentru toți x.

ii) $\dfrac{\partial^2 \ln g_x}{\partial(1/\lambda)^2}$ există pentru fiecare $\lambda\in(0,\infty)$ și aproape pentru toți x.

iii) $\dfrac{\partial^3 \ln g_x}{\partial(1/\lambda)^3}$ există pentru fiecare $\lambda\in(0,\infty)$ și aproape pentru toți x.

Avem :

$$\frac{\partial g_x}{\partial(1/\lambda)}=(2\pi x^3)^{-\frac{1}{2}}\exp\left[-\frac{1}{2x(1/\lambda)}\right]\left(\frac{1}{\lambda}\right)^{-\frac{1}{2}}\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\lambda}\right)^{-1}+\frac{1}{2x(1/\lambda)}\right]$$

$$\frac{\partial^2 g_x}{\partial(1/\lambda)^2}=(2\pi x^3)^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{\lambda}\right)^{-\frac{1}{2}}\exp\left[-\frac{1}{2x(1/\lambda)}\right]\times$$

$$\times\left[\frac{3}{4}\left(\frac{1}{\lambda}\right)^{-2}+\frac{1}{4x^2(1/\lambda)^4}-\frac{3}{2x(1/\lambda)^3}\right]$$

și deci

$$\text{iv)}\int_0^\infty\frac{\partial g_x}{\partial(1/\lambda)}\,dx=-\frac{\lambda}{2}\int_0^\infty g_x\,dx+\frac{\lambda^2}{2}M\left(\frac{1}{X}\right)=$$

$$=-\frac{\lambda}{2}+\frac{\lambda^2}{2}\cdot\frac{1}{\lambda}=0\text{ pentru orice }\lambda\in(0,\infty)$$

$$\text{v)}\int_0^\infty\frac{\partial^2 g_x}{\partial(1/\lambda)^2}\,dx=\frac{3\lambda^2}{4}\int_0^\infty g_x\,dx+\frac{\lambda^4}{4}M\left(\frac{1}{X^2}\right)-\frac{3\lambda^3}{2}M\left(\frac{1}{X}\right)=$$

$$=\frac{3\lambda^2}{4}+\frac{\lambda^4}{4}\frac{3}{\lambda^2}-\frac{3\lambda^3}{2}\cdot\frac{1}{\lambda}=0\text{ pentru orice }\lambda\in(0,\infty)$$

Scanned with OKEN Scanner

De asemenea

$$\int_0^\infty \frac{\partial^2 \ln g_x}{\partial(1/\lambda)^2} g_x \mathrm{d}x = \frac{\lambda^2}{2}\int_0^\infty g_x \mathrm{d}x - \lambda^3 M\left(\frac{1}{X}\right) =$$

$$= \frac{\lambda^2}{2} - \lambda^3 \frac{1}{\lambda} = -\frac{\lambda^2}{2}$$

ceea ce arată că

$$\text{vi)} \quad -\infty < \int_0^\infty g \frac{\partial^2 \ln g_x}{\partial(1/\lambda)^2} \mathrm{d}x < 0.$$

Fie $h(1/\lambda) = (1/\lambda)^2$. Atunci

$$\frac{\partial^2}{\partial(1/\lambda)^2}\left[\left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 \frac{\partial \ln g_x}{\partial(1/\lambda)}\right] = \frac{\partial^2}{\partial(1/\lambda)^2}\left(-\frac{1}{2}\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{2x}\right) = 0.$$

Urmează că

vii) Există o funcție $h(1/\lambda)$ care este pozitivă și de două ori derivabilă pentru fiecare $\lambda \in (0, \infty)$ și o funcție H (egală cu orice constantă pozitivă) independentă de $(1/\lambda)$ astfel încît

$\left|\frac{\partial^2}{\partial(1/\lambda)^2}\left[h\left(\frac{1}{\lambda}\right)\frac{\partial \ln g_x}{\partial(1/\lambda)}\right]\right| < H$ pentru fiecare $\lambda \in (0, \infty)$ și astfel încît

$$\int_0^\infty H g_x(x, \lambda)\, \mathrm{d}x < \infty$$

Din aceste 7 condiții rezultă afirmația făcută.

Exemplul 5. Arătăm că în condițiile exemplului 4 ecuația verosimilității maxime are o singură rădăcină și că această rădăcină este estimatorul de maximă verosimilitate pentru $1/\lambda$.

În acest scop vedem dacă sînt satisfăcute condițiile teoremei lui Kulldorff. Din ecuațiile (8) și (9).

i) $\frac{\partial \ln g_x}{\partial(1/\lambda)}$ și $\frac{\partial^2 \ln g_x}{\partial(1/\lambda)^2}$ există pentru fiecare $\lambda \in (0, \infty)$ și aproape pentru toți x.

Ecuația verosimilității maxime este

$$\frac{\partial \ln P}{(\partial(1/\lambda)} = \frac{-n\lambda}{2} + \frac{\lambda^2}{2}\sum_1^n \frac{1}{x_i} = 0.$$

Urmează că

$$\text{ii)} \quad \frac{\partial^2 \ln P}{\partial(1/\lambda)^2}\Big|_{1/\lambda} = \left[\frac{n}{2(1/\lambda)^2} - \frac{1}{(1/\lambda)^3}\sum_1^n \frac{1}{x_i}\right]_{1/\lambda} =$$

$$= \frac{n^3}{2}\left(\sum_1^n \frac{1}{x_i}\right)^{-2} - n^3\left(\sum_1^n \frac{1}{x_i}\right)^{-2} = -\frac{n^3}{3}\left(\sum_1^n \frac{1}{x_i}\right)^{-2} < 0.$$

Din i) și ii) și din soluția ecuației de verosimilitate, obținem rezultatul dorit.

Scanned with OKEN Scanner

TEOREMA 3. *Dacă există un estimator eficient, atunci ecuația de verosimilitate are o soluție unică.*

Demonstrație. Un estimator este eficient, dacă

$$\frac{\partial \ln P}{\partial \theta} = A[t - \tau(\theta)]$$

astfel că soluțiile ecuației de verosimilitate sînt de forma

$$t = \tau(\hat{\theta}) \tag{10}$$

Derivînd (VI. 24) în raport cu θ, obținem

$$\frac{\partial^2 \ln P}{\partial \theta^2} = A'(\theta)[t - \tau(\theta)] - A(\theta)\,\tau'(\theta)$$

și ținînd seama că

$$D^2(t) = \tau'(\theta)/A(\theta) \qquad \text{(VI.26)}$$

rezultă

$$A(\theta)\,\tau'(\theta) = A^2(\theta)\,D^2(t)$$

Din (10), găsim

$$A'(\hat{\theta})[t - \tau(\hat{\theta})] = 0$$

de unde

$$\left(\frac{\partial^2 \ln P}{\partial \theta^2}\right)_{\theta=\hat{\theta}} = -A^2(\theta)D^2(t) < 0 \tag{11}$$

Din (11) orice soluție a ecuației $\dfrac{\partial \ln P}{\partial \theta} = 0$ este un maxim al funcției de verosimilitate. În condițiile de regularitate trebuie să existe un minim între două maxime. Deoarece nu este un minim, urmează că nu poate fi mai mult de un maxim, ceea ce rezultă din unicitatea estimatorului de dispersie minimă.

TEOREMA 4. *Dacă există o statistică suficientă, atunci orice soluție a ecuației de verosimilitate va fi funcție numai de această statistică.*

Demonstrație. Teorema VIII.1 ne spune că t_n este o statistică suficientă pentru θ dacă

$$P(x_1, \ldots, x_n;\ \theta) = h(t_n, \theta)\, g(x_1, \ldots, x_n)$$

unde $g(.)$ este o funcție care nu depinde de θ.

Prin urmare a alege $\hat{\theta}$ astfel încît $P(x_1, \ldots, x_n;\ \theta)$ să fie maximă este echivalent cu a alege $\hat{\theta}$ astfel încît $h(t_n, \theta)$ să fie maximă, deci $\hat{\theta}$ va fi funcție de t_n.

Scanned with OKEN Scanner

§4. Proprietăți asimptotice ale estimatorilor de maximă verosimilitate

TEOREMA 5. *Şirul estimatorilor de maximă verosimilitate este consistent.*

Demonstrație. Estimatorul de maximă verosimilitate $\hat{\theta}$ satisface inegalitatea

$$\ln P(\mathbf{x}|\hat{\theta}) \geqslant \ln P(\mathbf{x}|\theta) \tag{12}$$

pentru orice valoare admisibilă θ a parametrului.

Fie θ_0 valoarea adevărată a parametrului θ.

Deoarece media geometrică a unei repartiţii nedegenerate este mai mică decît media sa aritmetică, urmează că pentru orice $\theta^* \neq \theta_0$

$$M_{\theta_0}\left[\ln \frac{P(\mathbf{x}|\theta^*)}{P(\mathbf{x}|\theta_0)}\right] < \ln M_{\theta_0}\left[\frac{P(\mathbf{x}|\theta^*)}{P(\mathbf{x}|\theta_0)}\right] \tag{13}$$

Avem

$$M_{\theta_0}\left[\frac{P(\mathbf{x}|\theta^*)}{P(\mathbf{x}|\theta_0)}\right] = \int \frac{P(\mathbf{x}|\theta^*)}{P(\mathbf{x}|\theta_0)} P(\mathbf{x}|\theta_0)\, dv = 1,$$

de unde

$$\ln M_{\theta_0}\left[\frac{P(\mathbf{x}|\theta^*)}{P(\mathbf{x}|\theta_0)}\right] < 0$$

$$M_{\theta_0}\left[\frac{1}{n}\ln P(\mathbf{x}|\theta^*)\right] < M_{\theta_0}\left[\frac{1}{n}\ln P(\mathbf{x}|\theta_0)\right] \tag{14}$$

cu condiţia ca $M_{\theta_0}[\ln P(\mathbf{x}|\theta_0)]$ să existe.

Pentru orice

$$\ln P(\mathbf{x}|\theta) = \sum_1^n \ln f(x_i|\theta),$$

astfel încît $\frac{1}{n}\ln P(\mathbf{x}|\theta)$ este media a n variabile aleatoare independente identic repartizate, cu media

$$M_{\theta_0}[\ln f(x_i|\theta)] = M_{\theta_0}\left[\frac{1}{n}\ln P(\mathbf{x}|\theta)\right].$$

Din legea tare a numerelor mari

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{1}{n}\ln P(\mathbf{x}|\theta) - M_{\theta_0}\left[\frac{1}{n}\ln P(\mathbf{x}|\theta)\right]\right| \leqslant \varepsilon\right\} = 1$$

Scanned with OKEN Scanner

Din (14), pentru valori mari ale lui n,

$$\lim_{n\to\infty} P[\ln P(\mathbf{x}|\theta^*) < \ln P(\mathbf{x}|\theta_0)] = 1 \tag{15}$$

Pe de altă parte din (12) cu $\theta = \theta_0$, obținem

$$\ln P(\mathbf{x}|\hat{\theta}) \geqslant \ln (P(\mathbf{x}|\theta_0) \tag{16}$$

Ținînd seama de (15), (16) poate avea loc, pentru $\theta^* \neq \theta_0$, numai cu probabilitatea 0. Urmează că

$$\lim_{n\to\infty} P(|\hat{\theta} - \theta_0| < \varepsilon) = 1$$

Observații. i) Această demonstrație nu cere nici o condiție de regularitate pentru $f(x|\theta)$.

ii) Această teoremă rămîne adevărată dacă interpretăm parametrul θ ca un vector de componente (parametrii) $\theta_1, \ldots, \theta_k$ și $\hat{\theta}$, θ^* ca vectori estimatori pentru θ. Prin urmare mulțimea estimatorilor de maximă verosimilitate converge în probabilitate către mulțimea parametrilor ce constituie componentele valorii adevărate θ_0.

TEOREMA 6. *Dacă sînt satisfăcute condițiile de regularitate, pentru valori mari ale lui n, estimatorul consistent de maximă verosimilitate este unic.*

Demonstrație. Deoarece $\hat{\theta}$ converge în probabilitate către θ_0, urmează că

$$\frac{1}{n}\left[\frac{\partial^2 \ln P(\mathbf{x}|\theta)}{\partial\theta^2}\right]_{\theta=\hat{\theta}} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{n}\left[\frac{\partial^2 \ln P(\mathbf{x}|\theta)}{\partial\theta^2}\right]_{\theta=\theta_0} \tag{17}$$

Cum

$$\frac{1}{n}\frac{\partial^2 \ln P(\mathbf{x}|\theta)}{\partial\theta^2} = \frac{1}{n}\sum_1^n \frac{\partial^2 \ln f(x_i|\theta)}{\partial\theta^2}$$

este media aritmetică a n variabile aleatoare independente, identic repartizate, din legea tare a numerelor mari, converge în probabilitate către valoarea sa medie.

Astfel (17) se poate scrie :

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left[\frac{\partial^2 \ln P(\mathbf{x}|\theta)}{\partial\theta^2}\right]_{\theta=\hat{\theta}} = M_{\theta_0}\left[\frac{\partial^2 \ln P(\mathbf{x}|\theta)}{\partial\theta^2}\right]_{\theta=\hat{\theta}_0}\right\} = 1 \tag{18}$$

În condițiile de regularitate are loc

$$I(\theta) = M\left[\frac{\partial^2 \ln P(\mathbf{x}|\theta)}{\partial\theta^2}\right] = -M\left[\left(\frac{\partial \ln P(\mathbf{x}|\theta)}{\partial\theta}\right)^2\right] < 0,$$

Scanned with OKEN Scanner

ceea ce permite să scriem (18) sub forma

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left[\frac{\partial^2 \ln P(\mathbf{x}|\theta)}{\partial\theta^2}\right]_{\theta=\hat{\theta}} < 0\right\} = 1 \tag{19}$$

Presupunem că $\hat{\theta}_1$ și $\hat{\theta}_2$ sînt astfel încît

$$\left[\frac{\partial \ln P(\mathbf{x}|\theta)}{\partial\theta}\right]_{\theta=\hat{\theta}_1} = \left[\frac{\partial \ln P(\mathbf{x}|\theta)}{\partial\theta}\right]_{\theta=\hat{\theta}_2} = 0$$

$$\left[\frac{\partial^2 \ln P(\mathbf{x}|\theta)}{\partial\theta^2}\right]_{\theta=\hat{\theta}_1} < 0, \quad \left[\frac{\partial^2 \ln P(\mathbf{x}|\theta)}{\partial\theta^2}\right]_{\theta=\hat{\theta}_2} < 0$$

Deoarece $\ln P(\mathbf{x}|\theta)$ admite derivată de ordinul doi, trebuie să existe un minim între maximele $\hat{\theta}_1$ și $\hat{\theta}_2$. Fie $\hat{\theta}_3$ acest minim. Atunci

$$\left[\frac{\partial^2 \ln P(\mathbf{x}|\theta)}{\partial\theta^2}\right]_{\theta=\hat{\theta}_3} \geqslant 0 \tag{20}$$

Cum $\hat{\theta}_1$ și $\hat{\theta}_2$ sînt estimatori consistenți, $\hat{\theta}_3$ care variază între ei, trebuie să fie de asemenea consistent și să satisfacă (19), care este în contradicție cu (20). Urmează că poate exista numai un singur estimator consistent.

TEOREMA 7. (Cramér (1946)). *Dacă primele două derivate ale funcției de verosimilitate în raport cu* θ *există într-un interval* R *ce conține valoarea adevărată* θ_0, *și dacă*

$$-M\left(\frac{\partial^2 \ln P(\mathbf{x}|\theta)}{\partial\theta^2}\right) = M\left(\frac{\partial \ln P(\mathbf{x}|\theta)}{\partial\theta}\right)^2$$

există și este ne-nulă pentru toți θ *din intervalul* R, *atunci estimatorul de maximă verosimilitate este asimptotic repartizat* $N\left(\theta_0, 1/M\left(\frac{\partial \ln P(\mathbf{x}|\theta)}{\partial\theta}\right)^2_{\theta_0}\right)$

Demonstrație. Din teorema lui Taylor, găsim

$$\left(\frac{\partial \ln P}{\partial\theta}\right)_{\hat{\theta}} = \left(\frac{\partial \ln P}{\partial\theta}\right)_{\theta_0} + (\hat{\theta} - \theta_0)\left(\frac{\partial^2 \ln P}{\partial\theta^2}\right)_{\theta^*} \tag{21}$$

unde θ^* este o valoare între $\hat{\theta}$ și θ. În condițiile de regularitate $\hat{\theta}$ este rădăcina ecuației (1'), astfel încît membrul drept al relației (21) este zero. (21) se poate scrie

$$\hat{\theta} - \theta_0 = \frac{\left(\frac{\partial \ln P}{\partial\theta}\right)_{\theta_0}}{-\left(\frac{\partial^2 \ln P}{\partial\theta^2}\right)_{\theta^*}}$$

Scanned with OKEN Scanner

sau

$$(22)\qquad (\hat{\theta}-\theta_0)\sqrt{I(\theta_0)}=\frac{\left(\frac{\partial \ln P}{\partial \theta}\right)_{\theta_0}\Big/\sqrt{I(\theta_0)}}{-\left(\frac{\partial^2 \ln P}{\partial \theta^2}\right)_{\theta^*}\Big/ I(\theta_0)}$$

Deoarece $\hat{\theta}$ este un estimator consistent pentru θ_0 și θ^* variază între $\hat{\theta}$ și θ_0, din (18) și din definiția lui I

$$(23)\qquad \lim_{n\to\infty} P\left[\frac{\partial^2 \ln P}{\partial \theta^2}\Big|_{\theta^*} = -I(\theta_0)\right]=1,$$

astfel că numitorul din (22) converge către unu. Numărătorul membrului drept al relației (22) este cîtul dintre o sumă de n variabile aleatoare independente, identic repartizate (și anume $\ln f(x_t|\theta_0)$ de medie zero și dispersie $I(\theta_0)$ și $\sqrt{I(\theta_0)}$. Teorema limită centrală ne spune că numărătorul este o variabilă $N(0,1)$ și deci întreg membrul drept al relației (22) este o variabilă $N(0,1)$. Urmează că membrul drept al acestei relații este o variabilă $N(0,1)$, ceea ce demonstrează teorema.

Observații. i) Teorema 7 care dă estimatorului de maximă verosimilitate o dispersie asimptotică egală cu (VI. 23) implică că în aceste condiții de regularitate estimatorul de maximă verosimilitate este eficient. Deoarece inegalitatea (VI.23) se transformă în egalitate numai în cazul unei statistici suficiente, putem afirma că estimatorul de maximă verosimilitate este „asimptotic suficient".

ii) Fie $X_1,\ldots,X_n$ o selecție asupra unei variabile aleatoare $N(\theta,1)$. Estimatorul de maximă verosimilitate al parametrului θ este $\bar{X}_n\cdot\bar{X}_n$ are dispersia egală cu marginea inferioară a dispersiei estimatorului pentru θ. Considerăm estimatorul t_n definit prin

$$(24)\qquad t_n=\begin{cases}\bar{X}_n & \text{dacă } |\bar{X}_n|>n^{-1/4}\\ \alpha\bar{X}_n & \text{dacă } |\bar{X}_n|\leqslant n^{-1/4}\end{cases}$$

unde α este o constantă arbitrară. Dispersia asimptotică a estimatorului t_n este

$$(25)\qquad D^2(t_n)=\begin{cases}1 & \text{dacă } \theta\neq 0\\ \alpha^2 & \text{dacă } \theta=0\end{cases}$$

și poate fi luată arbitrar de mică pentru valoarea $\theta=0$ a parametrului (Le Cam (1953)).

Le Cam (1953) a arătat de asemenea că este posibil să se construiască estimatori (estimatori super eficienți) a căror dispersie este inferioară valorii considerată ca margine inferioară pe o mulțime de măsură Lebesgue nulă și această mulțime nu poate fi un interval.

În următoarele condiții de regularitate

1. *Mulțimea Θ este un interval al dreptei reale (cu sau fără una dintre extremități).*

Scanned with OKEN Scanner

Fie $\overline{\Theta}$ *orice interval care conţine extremităţile intervalului* Θ *ca puncte interioare.*

2. *Aproape peste tot* (μ), *derivatele*

$$\frac{\partial \ln f(x|\theta)}{\partial \theta}, \quad \frac{\partial^2 \ln f(x|\theta)}{\partial \theta^2} \text{ şi } \frac{\partial^3 \ln f(x|\theta)}{\partial \theta^3}$$

există pentru orice θ *din* $\overline{\Theta}$. *Pentru orice* n *şi aproape pentru toţi* $(x_1, \ldots, x_n)(\mu^{(n)})$, *estimatorul de maximă verosimilitate* $\hat{\theta}_n(x_1, \ldots, x_n)$ *există şi este rădăcina ecuaţiei de verosimilitate, unde* $\mu^{(n)}$ *reprezintă* $\mu \times \mu \times \ldots \times \mu$ *pe spaţiul n-dimensional.*

3. *Pentru fiecare* θ *în* $\overline{\Theta}$ *aproape pentru fiecare* $x(\mu)$, *avem*

$$\left|\frac{\partial^i f(x|\theta)}{\partial \theta^i}\right| < F_i(x), \; i = 1, 2; \quad \left|\frac{\partial^3 \ln f(x|\theta)}{\partial \theta^3}\right| < H(x)$$

unde

$$\int_{-\infty}^{\infty} F_i(x)\, d\mu(x) < \infty, \; i = 1, 2$$

şi pentru fiecare θ

$$\int_{-\infty}^{\infty} H(x) f(x|\theta)\, d\mu(x) < M, \text{ o constantă, } I(\theta) \geqslant m < 0.$$

4. *Orice condiţii* (a se vedea Chung (1950)) *care să asigure că, pentru orice* $\varepsilon > 0$

$$P\left\{\left|n^{-1} \sum_1^n \frac{\partial^2 \ln f(X_i|\theta)}{\partial \theta^2} + I(\theta)\right| > \varepsilon \,|\, \theta\right\}$$

şi

$$P\left\{n^{-1} \sum_1^n H(X_i) > 2M \,|\, \theta\right\}$$

tind uniform către zero în $\theta \in \overline{\Theta}$.

5. *Orice condiţii care asigură convergenţa uniformă în* $\theta \in \overline{\Theta}$ *a funcţiei de repartiţie a variabilei*

$$(n\, I(\theta))^{-1/2} \sum_1^n \frac{\partial \ln f(X_i|\theta)}{\partial \theta}$$

la $\Phi(.)$ (convergenţa uniformă avînd de asemenea loc şi în argumentul funcţiei Φ). De exemplu, Teorema Berry-Essen implică că este suficient ca

$$\{M[|Y(\theta)|^3 \,|\theta]\}\{M[(Y(\theta))^2|\theta]\}^{-3/2} < M', \text{ o constantă unde}$$

$$Y(\theta) = \frac{\partial \ln f(X_1|\theta)}{\partial \theta},$$

Scanned with OKEN Scanner

Wolfowitz (1965) urmînd demonstraţia Teoremei 7 arată că pentru $n \to \infty$ funcţia de repartiţie a variabilei $\sqrt{n}\,(\hat{\theta}_n - \theta)$ converge uniform în Θ către funcţia de repartiţie a unei variabile $N\,(0, 1/I(\theta))$ (convergenţa uniformă avînd de asemenea loc şi în argumentul funcţiei Φ).

Motivul pentru care se cere convergenţa uniformă este următorul: Dacă convergenţa (pentru $n \to \infty$) repartiţia estimatorului nu este uniformă în $\theta(\theta \in \Theta)$ şi în argumentul funcţiei de repartiţie, deoarece experimentatorul nu cunoaşte valoarea parametrului θ nu va cunoaşte dacă repartiţia actuală este suficient de aproximată de repartiţia asimptotică. Pe de altă parte, dacă convergenţa este uniformă şi n este suficient de mare, putem folosi repartiţia asimptotică pentru obţinerea de intervale de încredere pentru θ.

§5. O metodă iterativă pentru obţinerea estimatorilor de maximă verosimilitate

Adeseori ecuaţia de maximă verosimilitate este atît de complicată încît pentru obţinerea soluţiei trebuiesc folosite, pornind de la o valoare observată a unui estimator consistent, care nu este însă suficient, metode iterative. În selecţii de volum mare, estimaţia astfel obţinută va fi destul de apropiată de valoarea estimatorului de maximă verosimilitate.

Dezvoltînd $\dfrac{\partial \ln P}{\partial \theta}$ în serie Taylor în jurul unei estimaţii t, obţinem

$$\left(\frac{\partial \ln P}{\partial \theta}\right)_{\hat{\theta}} = \left(\frac{\partial \ln P}{\partial \theta}\right)_{t} + (\hat{\theta} - t)\left(\frac{\partial^2 \ln P}{\partial \theta^2}\right)_{\theta^*} \tag{26}$$

unde $\hat{\theta} < \theta^* < t$. Deoarece t şi $\hat{\theta}$ sînt estimatori consistenţi, θ^* va converge în probabilitate către θ_0.

$\dfrac{\partial^2 \ln P}{\partial \theta^2}$ va converge în probabilitate către valoarea sa medie, care, după (VI. 26) este

$$\frac{1}{D^2(\hat{\theta})} \tag{27}$$

Asimptotic, din (27) şi (28) obţinem

$$\hat{\theta} = t + \left(\frac{\partial \ln P}{\partial \theta}\right)_{t} D^2(\hat{\theta}) \tag{28}$$

Observaţie. Procedeul descris nu garantează că rădăcina ecuaţiei de verosimilitate astfel obţinută va corespunde la maximul absolut al funcţiei de verosimilitate, acest fapt trebuind verificat în fiecare caz.

Scanned with OKEN Scanner

§6. Metoda verosimilității maxime în cazul în care θ este un vector k-dimensional

În cazul în care $\boldsymbol{\theta}$ este un vector, alegem o mulțime de valori admisibile pentru parametrii $\theta_1, \ldots, \theta_k$ care realizează un maxim absolut pentru funcția de verosimilitate. Condiția necesară ca funcția de verosimilitate să prezinte un punct staționar este ca

$$\frac{\partial \ln P(\mathbf{x}; \theta_1, \ldots, \theta_k)}{\partial \theta_j} = 0, \quad 1 \leqslant j \leqslant k \tag{29}$$

și o condiție suficientă ca aceasta să fie un maxim este ca matricea

$$(P_{ij})_{1 \leqslant i, j \leqslant k} \tag{30}$$

să fie negativ definită. Soluțiile celor k ecuații (29) reprezintă estimatorii $\hat{\theta}_1, \ldots, \hat{\theta}_k$ de maximă verosimilitate ai parametrilor $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k$.

TEOREMA 8. *Dacă există o mulțime de s statistici $t_1, \ldots, t_s$ care este suficientă pentru $\theta_1, \ldots, \theta_k$, atunci estimatorii de maximă verosimilitate $\hat{\theta}_1, \ldots, \hat{\theta}_k$ sînt funcții de statisticile suficiente.*

Demonstrația rezultă din (VIII. 24).

$$P(\mathbf{x} \mid \theta_1, \ldots, \theta_k) = g(t_1, \ldots, t_s)\, h(x) \tag{31}$$

datorită faptului că $h(x)$ este independentă de $\theta_1, \ldots, \theta_k$.

TEOREMA 9. *Dacă există o mulțime de s statistici $t_1, \ldots, t_s$ care este suficientă pentru $\theta_1, \ldots, \theta_k$ și dacă $s = k$, atunci ecuațiile de verosimilitate au o soluție unică.*

Demonstrație. Cea mai generală formă a repartiției ce admite o mulțime de k statistici suficiente are funcția de verosimilitate al cărei logaritm este

$$\ln P = \sum_{j=1}^{k} A_j \sum_{i=1}^{n} B_j(x_i) + \sum_{i=1}^{n} C(x_i) + nD(\boldsymbol{\theta})$$

unde $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \ldots, \theta_k)$ și x poate fi un vector.

Ecuațiile de verosimilitate sînt

$$\frac{\partial \ln P}{\partial \theta_r} = \sum_j \frac{\partial A_j}{\partial \theta_r} \sum_i B_j(x_i) + n \frac{\partial D}{\partial \theta_r} = 0, \quad r = 1, \ldots, k \tag{32}$$

și o soluție $\hat{\boldsymbol{\theta}} = (\hat{\theta}_1, \ldots, \hat{\theta}_k)$ a sistemului (32) este un maxim dacă

$$(P_{rs})_{\hat{\theta}} = \left(\frac{\partial^2 \ln P}{\partial \theta_r \partial \theta_s}\right)_{\hat{\theta}} = \sum_j \left(\frac{\partial^2 A_j}{\partial \theta_r \partial \theta_s}\right)_{\hat{\theta}} \sum_i B_j(x_i) + n \left(\frac{\partial^2 D}{\partial \theta_r \partial \theta_s}\right)_{\hat{\theta}}, \tag{33}$$

constituie elementele unei matrici negativ definite.

Scanned with OKEN Scanner

Din (VI. 18) avem

$$(34) \qquad M\left(\frac{\partial \ln P}{\partial \theta_r}\right) = \Sigma \frac{\partial A_j}{\partial \theta_r} M\left(\sum_i B_j(x_i)\right) + n\frac{\partial D}{\partial \theta_r} = 0$$

şi deci

$$(35) \qquad M\left(\frac{\partial^2 \ln P}{\partial \theta_r \partial \theta_s}\right) = \sum_j \frac{\partial^2 A_j}{\partial \theta_r \partial \theta_s} M\left(\sum_i B_j(x_i)\right) + n\frac{\partial^2 D}{\partial \theta_r \partial \theta_s}$$

(34) şi (35) au exact aceeaşi formă ca (32) şi (33), numai că $T = \sum_i B_j(x_i)$ este înlocuit prin media sa şi $\hat{\theta}$ prin valoarea adevărată θ. Dacă eliminăm T din (33) folosind (32) şi înlocuind $\hat{\theta}$ prin θ obţinem acelaşi rezultat dacă eliminăm $M(T)$ din (35) folosind (34). Avem

$$(36) \qquad \left(\frac{\partial^2 \ln P}{\partial \theta_r \partial \theta_s}\right)_{\hat{\theta}=\theta} = M\left(\frac{\partial^2 \ln P}{\partial \theta_r \partial \theta_s}\right),$$

$$M\left(\frac{\partial^2 \ln P}{\partial \theta_r^2}\right) = -M\left(\frac{\partial \ln P}{\partial \theta_r}\right)^2$$

şi

$$M\left(\frac{\partial^2 \ln P}{\partial \theta_r \partial \theta_s}\right) = -M\left(\frac{\partial \ln P}{\partial \theta_r} \cdot \frac{\partial \ln P}{\partial \theta_s}\right).$$

Urmează că matricea

$$(37) \qquad \left\{M\left(\frac{\partial^2 \ln P}{\partial \theta_r \partial \theta_s}\right)\right\} = -\left\{M\left(\frac{\partial \ln P}{\partial \theta_r} \cdot \frac{\partial \ln P}{\partial \theta_s}\right)\right\} =$$

$$= -\left\{\operatorname{cov}\left(\frac{\partial \ln P}{\partial \theta_r}, \frac{\partial \ln P}{\partial \theta_s}\right)\right\}$$

este negativ definită sau semidefinită. Însă (37) este matricea de covarianţe $\mathcal{C}$ a vectorului de componente $\dfrac{\partial \ln P}{\partial \theta_r}$ şi aceasta este negativ definită deoarece pentru orice variabilă x_r forma pătratică

$$(38) \qquad M\left\{\sum_1^k [x_r - M(x_r)]\, u_r\right\}^2 = \mathbf{u}'\mathcal{C}\mathbf{u} \geqslant 0,$$

unde $\mathbf{u}$ este un vector aleator oarecare. Astfel matricea de covarianţe $\mathcal{C}$ este ne-negativ definită. Dacă $\mathcal{C}$ este pozitiv definită, matricea din stînga egalităţii (38) este negativ definită. Astfel din (37), matricea

$$\left\{M\left(\frac{\partial^2 \ln P}{\partial \theta_r \partial \theta_s}\right)_{\hat{\theta}=\theta}\right\}$$

Scanned with OKEN Scanner

este de asemenea negativ definită, şi prin urmare orice soluţie a ecuaţiei (32) este un maxim. Dar în condiţiile de regularitate, trebuie să fie un minim între orice două maxime. Însă aceasta nefiind un minim, maximul este unic, ceea ce demonstrează teorema.

TEOREMA 10. *Repartiţia comună a estimatorilor de maximă verosimilitate, este, asimptotic, normală k-dimensională cu matricea de covariante* Σ, *astfel încît*

$$\Sigma_{rs}^{-1} = -M\left(\frac{\partial^2 \ln P}{\partial\theta_r\,\partial\theta_s}\right) = M\left(\frac{\partial \ln P}{\partial\theta_r}\,\frac{\partial \ln P}{\partial\theta_s}\right) \tag{39}$$

Demonstraţie. Folosind analogul dezvoltării Taylor, obţinem

$$\left(\frac{\partial \ln P}{\partial\theta_r}\right)_{\theta_0} = \sum_{s=1}^{k}(\hat{\theta}_s - \theta_{s0})\left(-\frac{\partial^2 \ln P}{\partial\theta_r\,\partial\theta_s}\right)_0, \quad r = 1, 2, \ldots, k \tag{40}$$

Deoarece $\theta^* \xrightarrow{P} \theta_0$ şi derivatele de ordinul doi din membrul drept al relaţiei (40) converg în probabilitate către mediile lor, putem privi (40) ca o mulţime de ecuaţii lineare în cantităţile $(\hat{\theta}_s - \theta_{s0})$. Deci punînd

$$\mathbf{y} = \frac{\partial \ln P}{\partial\theta}, \quad \mathbf{z} = \hat{\theta} - \theta_0$$

(40) se scrie

$$\mathbf{y} = \Sigma^{-1}\mathbf{z} \tag{41}$$

Din teorema limită centrală multidimensională, dacă

$$M\left(\frac{\partial \ln P(\mathbf{x}|\,\theta)}{\partial\theta_r}\right) = 0$$

pentru fiecare θ_r, $\mathbf{y}$ tinde către un vector normal multidimensional de vector valoare medie zero; prin urmare aceeaşi afirmaţie este adevărată şi pentru $\mathbf{z}$. Matricea de covarianţe a vectorului $\mathbf{y}$, după (39) este Σ^{-1}, astfel încît exponentul repartiţiei normale multidimensionale este forma pătratică

$$-\frac{1}{2}\mathbf{y}'\,\Sigma\,\mathbf{y} \tag{42}$$

Transformarea (41) asociază vectorului $\mathbf{z}$ forma pătratică

$$-\frac{1}{2}\mathbf{z}'\,\Sigma^{-1}\mathbf{z}$$

astfel încît $\mathbf{z}$ are matricea de covarianţe $(\Sigma^{-1})^{-1} = \Sigma$

Scanned with OKEN Scanner

Exemplul 6. Repartiţia Poisson-binomială considerată de Skellam (1952) şi folosită de Mc. Guire, Brindley şi Bancroft (1957) are un număr în continuă creştere de aplicaţii.

Această repartiţie rezultă din

$$Bi\,(N, p) \underset{\frac{N}{n}}{\wedge} Po\,(\lambda)$$

şi are funcţia de frecvenţe

$$P_k = P(X = k) = e^{-\lambda} \sum_{j \geqslant \frac{k}{n}} C_{nj}^k p^k q^{nj-k} \frac{\lambda^j}{j!}$$

(43)
$$= e^{-\lambda} \left(\frac{p}{q}\right)^k \frac{1}{k!} \sum_{j \geqslant \frac{k}{n}} (nj)^{(k)} [(\lambda q^n)^j / j!]$$

Funcţia generatoare de probabilităţi este

(44)
$$M\,[(q + pt)^{nj}] = \exp[\lambda\{(q + pt)^n - 1\}],$$

unde j are o repartiţie $Po\,(\lambda)$.

Din (44) pentru $t = 0$, obţinem

$$P_0 = \exp[-\lambda(1 - q^n)]$$

Derivînd (44) în raport cu t şi apoi făcînd $t = 0$, obţinem

$$P_1 = n\lambda p q^{n-1} \exp[-\lambda(1 - q^n)]$$

Analog, găsim

$$P_2 = \frac{1}{2} n\lambda p^2 [n - 1 + n\lambda q^n]\, q^{n-2} \exp[-\lambda(1 - q^n)]$$

Dacă $n\lambda p q^{n-1} < 1$ însă $n - 1 + n\lambda q^n > 2\frac{q}{p}$,

atunci

$$P_0 > P_1 < P_2$$

astfel încît P_1 este un minim local ($k = 1$).

Are loc următoarea relaţie de recurenţă

(45)
$$P_k = \frac{n\,\lambda\,p}{k+1} \sum_{j=0}^{k} C_{n-1}^j p^j q^{n-j-1} P_{k-j}$$

Scanned with OKEN Scanner

Pentru a evita acumularea erorilor posibile, Shumway și Gurland (1960) propune să se folosească (43) în forma

$$P_k = \exp[-\lambda(1-q^n)] \left(\frac{p}{q}\right)^k \frac{1}{k!} \mu'_{(k)} \tag{46}$$

unde $\mu'_{(k)}$ este momentul factorial de ordin k al variabilei nj (unde j este o variabilă $Po\,(\lambda\, q^n)$).

Valoarea medie și primele trei momente centrate ale repartiției Poisson-binomială sînt

$$\mu'_1 = n\lambda p \tag{47}$$

$$\mu_2 = n^2p^2\,\lambda + npq\lambda \tag{48}$$

$$\mu_3 = n^3p^3\lambda + 3n^2p^2q\lambda + npq(q-p)\,\lambda \tag{49}$$

$$\mu_4 = 3(n^2p^2\lambda + npq\lambda)^2 + 6n^3p^3q\lambda + n^2p^2q(7-11p)\,\lambda + \\ + npq(1-6pq)\lambda \tag{50}$$

Dacă $X_1, X_2, \ldots, X_m$ este o selecție asupra variabilei aleatoare X avînd funcția de frecvențe (43) atunci ecuațiile satisfăcute de estimatorii de maximă verosimilitate $\hat{\lambda}$, $\hat{p}$ pentru λ, p (n fiind presupus cunoscut) sînt (Sprott (1958))

$$\bar{X} = \frac{1}{m}\sum_1^m X_j = n\,\hat{\lambda}\,\hat{p} \tag{51}$$

$$\sum_{j=1}^{m} (X_j+1)\,(\hat{P}_{X_{j+1}}/\hat{P}_{X_j}) = mn\,\hat{\lambda}\,\hat{p} \tag{52}$$

unde $\hat{P}_k = P_k$ cu λ, p înlocuite prin $\hat{\lambda}$ și respectiv $\hat{p}$.

Aceste ecuații se rezolvă iterativ. O soluție inițială $\hat{\lambda}_1, \hat{p}_1$ se obține egalînd primele două momente ale selecției cu ale populației.

$$\hat{p}_1 = (s^2 - \bar{X})\,/[(n-1)\,\bar{X}] \tag{53}$$

$$s^2 = \frac{1}{m-1}\sum_1^m (X_i - \bar{X})^2$$

$$\hat{\lambda}_1 = \bar{X}\,/\,(n\hat{p}_1) \tag{54}$$

Scanned with OKEN Scanner

Avem

$$D^2(\hat{p}) \simeq \frac{q^2 A + [np + (n-1)pq](n\lambda)^{-1}}{\left[n\lambda\left(n + \frac{q}{p}\right)A - (n-1)^2\right]m} \tag{55}$$

$$D^2(\hat{\lambda}) \simeq \frac{n^2\lambda^2 A - n\lambda\left(n - 1 + \frac{1}{p}\right)}{\left[n\lambda\left(n + \frac{q}{p}\right)A - (n-1)^2\right]m} \tag{56}$$

$$\operatorname{cov}(\hat{\lambda}, \hat{p}) = -\frac{-n\lambda q A + nq + p}{\left[n\lambda\left(n + \frac{q}{p}\right)A - (n-1)^2\right]m} \tag{57}$$

unde

$$A = -1 + \left[\sum_{j=0}^{\infty}(j+1)^2\left(\frac{P_{j+1}^2}{P_j}\right)\right](n\lambda p)^{-2} \tag{58}$$

TEOREMA 11. *Fie X o variabilă aleatoare a cărei funcție de repartiție depinde de k parametrii necunoscuți $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k$ și fie $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ r noi parametrii, fiecare dintre ei fiind funcție de $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k$, adică*

$$\lambda_i = h_i(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k), \quad i = 1, 2, \ldots, r, \quad r \leqslant k$$

În aceste condiții, dacă $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \ldots, \hat{\theta}_k$ sînt estimatorii de maximă verosimilitate ai parametrilor $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k$, atunci $\hat{\lambda}_i = h_i(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \ldots, \hat{\theta}_k)$, $i = 1, 2, \ldots, r$ sînt estimatori de maximă verosimilitate pentru $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$.

Demonstrație. Definind $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ ca funcții de $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k$ am definit un nou spațiu al parametrilor Ω_λ de valori pentru λ_i care este un spațiu transformat al spațiului inițial Ω_θ de valori pentru θ_i.

Deoarece P este o funcție de elemente ale spațiului Ω_θ

$$M(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r) = \max_{\lambda_i = h_i(\theta_1, \ldots, \theta_k)} P(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k)$$

este funcția de verosimilitate pentru $\omega \in \Omega_\lambda$. Se observă că la același punct $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ putem avea mai mult decît o mulțime de valori pentru $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k$ care să corespundă; deci, vom avea, mai multe valori ale lui P pentru acest punct și, în astfel de cazuri, luăm M ca cea mai mare dintre aceste valori. Dacă transformarea de la Ω_θ la Ω_λ este biunivocă, deci $r = k$, atunci există numai o valoare a lui P pentru fiecare punct în Ω_λ și luăm M egal cu această valoare. Urmează (trivial) că dacă $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \ldots, \hat{\theta}_k$ maximizează P, atunci

$$\hat{\lambda}_i = h_i(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \ldots, \hat{\theta}_k), \quad i = 1, 2, \ldots, r$$

maximizează M, ceea ce demonstrează teorema.

Scanned with OKEN Scanner

Această teoremă are variate aplicații. De exemplu, în cazul unei populații normale, estimatorul de maximă verosimilitate pentru σ este

$$\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{1}^{n}(X_i - \bar{X})^2}$$

Un alt exemplu este

Exemplul 7. Presupunem că este dată o anumită populație de insecte și un agent chimic care este toxic pentru această populație de insecte dacă este aplicat într-o concentrație mare acesteia. Deoarece concentrația folosită poate varia continuu, ese interesant de a cunoaște ce proporție din populația de insecte va muri cînd concentrația se schimbă. Cînd concentrația se apropie de zero, proporția insectelor moarte se va apropia de asemenea de zero. Astfel, concentrația c putînd fi modificată după voința experimentatorului se pune problema care este proporția $p(c)$ a populației care va muri la această concentrație.

Se presupune că $p(c)$ variază cu $\ln c$ după o funcție de repartiție normală.

Adică se presupune că există o variabilă aleatoare U repartizată normal astfel încît

$$P(U \leqslant \ln c) = p(c)$$

Această presupunere corespunde la o creștere a concentrației de la c_1 la $c_2 > c_1$ și determină o creștere a proporției insectelor, egală cu aria de sub curba normală între $\ln c_1$ și $\ln c_2$.

Nici media și nici dispersia acestei repartiții nu sînt cunoscute, aceste cantități putînd fi făcute să varieze în orice mod schimbînd unitățile folosite în măsurarea

Deoarece

$$P(U \leqslant \ln c) = P\left(Z \leqslant \frac{\ln c - \mu_U}{D(U)}\right) = p(c),$$

unde Z este o variabilă $N(0, 1)$, sau

$$\Phi\left(\frac{\ln c - \mu_U}{D(U)}\right) = p(c),$$

avem

$$\frac{\ln c - \mu_U}{D(U)} = \Phi^{-1}(p(c)) \tag{59}$$

Punînd $\alpha = -\frac{\mu_U}{D(U)}$, $\beta = 1/D(U)$, (59) se mai scrie

$$\Phi^{-1}(p((c)) = \alpha + \beta \ln c \tag{59'}$$

și reprezintă ecuația unei drepte.

Dat fiind felul insectei și toxicidul, prezintă importanță estimarea parametrilor α și β ai acestei drepte.

Vom estima acești parametri prin metoda verosimilității maxime.

Scanned with OKEN Scanner

Presupunem că sînt folosite concentraţiile $c_1, c_2, \ldots, c_k$, concentraţia c_i fiind aplicabilă la un lot de n_i insecte de un tip dat, $i = 1, 2, \ldots, k$.

Fie $p_i = \Phi(\alpha + \beta c_i)$ proporţia adevărată a insectelor din populaţie ce vor muri la concentraţia c_i şi f_i proporţia observată de insecte moarte la concentraţia c_i. (Astfel, dacă x_i este numărul de insecte moarte, $f_i = \frac{x_i}{n_i}$, $x_i = 0, 1, \ldots, n_i$). Urmează că $n_i f_i = x_i$ este o variabilă binomială cu parametrii n_i şi p_i, $i = 1, 2, \ldots, k$ dacă presupunem că fiecare dintre insecte este moartă sau nu, independent de dozajul dat. De asemenea, observaţiile pe loturi sînt independente, fiind tratate separat.

În aceste condiţii funcţia de verosimilitate este

$$P = \prod_{i=1}^{k} C_{n_i}^{n_i f_i} p_i^{n_i f_i} (1 - p_i)^{n_i(1-f_i)}$$

Avem

$$\ln P = \sum_{i=1}^{k} \{\ln C_{n_i}^{n_i f_i} + n_i f_i \ln p_i + n_i(1 - f_i) \ln (1 - p_i)\},$$

de unde

$$\frac{\partial \ln P}{\partial \alpha} = \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial \ln P}{\partial p_i} \cdot \frac{\partial p_i}{\partial \alpha}, \quad \frac{\partial \ln P}{\partial \beta} = \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial \ln P}{\partial p_i} \cdot \frac{\partial p_i}{\partial \beta},$$

$$\frac{\partial p_i}{\partial \alpha} = \frac{\partial}{\partial \alpha}(\Phi(\alpha + \beta \ln c_i)) = \varphi(\alpha + \beta \ln c_i)$$

$$\frac{\partial p_i}{\partial \beta} = \varphi(\alpha + \beta \ln c_i) \ln c_i,$$

$$\frac{\partial \ln P}{\partial p_i} = \frac{n_i(f_i - p_i)}{p_i(1 - p_i)}$$

Urmează că ecuaţiile ce trebuiesc rezolvate pentru a găsi estimatorii pentru α şi β sînt

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{n_i(f_i - p_i)}{p_i(1 - p_i)} \varphi(\alpha + \beta \ln c_i) = 0$$

(60)

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{n_i(f_i - p_i)}{p_i(1 - p_i)} \ln c_i \, \varphi(\alpha + \beta \ln c_i) = 0$$

Ecuaţiile (60) nefiind lineare, soluţiile lor se determină mai dificil. În general se reprezintă punctele $(\ln c_i, \Phi^{-1}(f_i))$, se tratează o linie dreaptă pentru a determina valorile iniţiale α_1 şi β_1, pentru α şi β şi atunci se aplică o tehnică iterativă, care converge la valorile $\hat{\alpha}$ şi $\hat{\beta}$ care satisfac ecuaţiile (60). Odată determinate valorile $\hat{\alpha}$ şi $\hat{\beta}$, estimaţiile de maximă verosimi-

Scanned with OKEN Scanner

litate pentru μ_Z și $D(Z)$ sînt $\hat{\mu}_Z = -\hat{\alpha}/\hat{\beta}$, $\hat{D}(Z) = 1/\hat{\beta}$ ținînd seama de teorema 11.

Metoda iterativă, obișnuită, ce se aplică pentru rezolvarea ecuațiilor :

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{n_i(f_i - p_i)}{p_i(1 - p_i)} \cdot \frac{\partial p_i}{\partial \alpha} = 0,$$

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{n_i(f_i - p_i)}{p_i(1 - p_i)} \cdot \frac{\partial p_i}{\partial \beta} = 0,$$

unde $\frac{\partial p_i}{\partial \alpha} = g(\alpha, \beta)$, $\frac{\partial p_i}{\partial \beta} = h(\alpha, \beta)$ este următoarea :

Folosind dezvoltarea în serie Taylor pentru o funcție de două variabile, putem scrie

$$g(\alpha, \beta) = g(\alpha_1, \beta_1) + (\alpha - \alpha_1)\frac{\partial^2 p_i}{\partial \alpha^2} + (\beta - \beta_1)\frac{\partial^2 p_i}{\partial \alpha\, \partial \beta}$$

$$h(\alpha, \beta) = h(\alpha_1, \beta_1) + (\alpha - \alpha_1)\frac{\partial^2 p_i}{\partial \alpha\, \partial \beta} + (\beta - \beta_1)\frac{\partial^2 p_i}{\partial \beta^2}$$

derivatele și p_i fiind evaluate în (α_1, β_1).

Înlocuind $\frac{\partial p_i}{\partial \alpha}$ și $\frac{\partial p_i}{\partial \beta}$ prin aceste dezvoltări în serie Taylor, avem două ecuații lineare cu două necunoscute α și β care pot fi rezolvate pentru a obține o a doua aproximație α_2, β_2. Aceste cantități sînt folosite în locul cantităților α_1 și β_1, ca mai înainte, și se obțin a treia aproximație, etc. Cînd două mulțimi de soluții succesive sînt esențial egale, procedeul este terminat.

Exemplul 8. Să presupunem că timpul de defectare al unui anumit tip de tranzistor este o variabilă aleatoare exponențială de parametru λ, unde $\lambda > 0$ este necunoscut.

Pentru a estima parametrul λ putem proceda după cum urmează :

Punem n din acești tranzistori să funcționeze în condiții asemănătoare condițiilor în care vor funcționa în realitate

a) așteptăm pînă ce toți acești n tranzistori se defectează iar apoi folosim această selecție de n observații și metoda verosimilității maxime pentru estimarea parametrului λ. Cu toate că λ este destul de mic, această metodă poate implica o cantitate considerabilă de timp, fiind obligați să așteptăm pînă se defectează și ultimul dintre cei n tranzistori.

b) așteptăm să se defecteze un tranzistor și pe baza acestei informații estimăm pe λ; despre ceilalți $n - 1$ tranzistori avem numai o informație parțială.

În acest caz funcția de verosimilitate este

$$P(\cdot, \lambda) = C_n^1 \lambda e^{-\lambda x}[1 - F(x)]^{n-1} = n\lambda e^{-n\lambda x}$$

unde : x este timpul de defectare observat pentru primul tranzistor, $\lambda\, e^{-\lambda x}$ este densitatea pentru un timp de defectare observat,

Scanned with OKEN Scanner

$[1 - F(x)]^{n-1}$ este probabilitatea ca toţi ceilalţi $n - 1$ transistori rămaşi să aibe un timp de defectare mai mare decît x ore, iar C_n^1 apare în expresia funcţiei de verosimilitate deoarece oricare dintre cei n transistori se poate defecta primul.

$\hat{\lambda} = 1/nx$ este în acest caz estimaţia de maximă verosimilitate a parametrului λ.

§7. Metoda verosimilităţii maxime în estimarea parametrilor de poziţie şi de împrăştiere

Fie $X_1, \ldots, X_n$ o selecţie asupra unei variabile aleatoare X pentru care

$$dF(x) = f\left(\frac{x-\alpha}{\beta}\right) d\left(\frac{x-\alpha}{\beta}\right), \quad \beta > 0 \tag{61}$$

TEOREMA 12 (Fisher) 1921 a)). *Inversa matricei de covarianţe a estimatorilor de maximă verosimilitate pentru parametrii α şi β este*

$$\Sigma^{-1} = -\frac{n}{\beta^2} M \begin{pmatrix} g'' & g''y \\ g''y & g''y^2 - 1 \end{pmatrix} \tag{62}$$

unde $y = \dfrac{x-\alpha}{\beta}$ şi $g(y) = \ln f(y)$

Demonstraţie. Logaritmul funcţiei de verosimilitate fiind

$$\ln P(\mathbf{x} \mid \alpha, \beta) = \sum_1^n g(y_i) - n \ln \beta, \tag{63}$$

ecuaţiile de verosimilitate sînt

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln P}{\partial \alpha} &= -\frac{1}{\beta} \Sigma g'(y_i) = 0 \\ \frac{\partial \ln P}{\partial \beta} &= -\frac{1}{\beta} [\Sigma y_i g'(y_i) + n] = 0 \end{aligned} \tag{64}$$

(64) are loc dacă putem deriva sub semnul integrală
(64) se mai poate scrie

$$M[g'(y)] = 0 \tag{65}$$

$$M[yg'(y)] = -1 \tag{66}$$

În cazul în care

$$M\left(\frac{\partial^2 \ln P}{\partial \theta_r \, \partial \theta_s}\right) = -M\left(\frac{\partial \ln P}{\partial \theta_r} \cdot \frac{\partial \ln P}{\partial \theta_s}\right)$$

Scanned with OKEN Scanner

elementele matricei Σ^{-1} sînt

$$M\left(\frac{\partial^2 \ln P}{\partial \alpha^2}\right) = \frac{n}{\beta^2} M(g'')$$

(67)

$$M\left(\frac{\partial^2 \ln P}{\partial \beta^2}\right) = \frac{n}{\beta^2} M(g'' y^2 + 2g'y + 1)$$

sau ţinînd sema de (66),

(68) $$M\left(\frac{\partial^2 \ln P}{\partial \beta^2}\right) = \frac{n}{\beta^2} M(g'' y^2 - 1)$$

şi

$$M\left(\frac{\partial^2 \ln P}{\partial \alpha \, \partial \beta}\right) = \frac{n}{\beta^2} M(g^2 + g''y)$$

sau ţinînd seama de (65)

(69) $$M\left(\frac{\partial^2 \ln P}{\partial \alpha \, \partial \beta}\right) = \frac{n}{\beta^2} M(g''y),$$

ceea ce demonstrează teorema.

Observaţii. i) Dacă $g(y)$ este o funcţie pară în argumentele sale, adică repartiţia este simetrică faţă de α, atunci

$$g(y) = g(-y)$$

(70) $$g'(y) = -g'(-y)$$

$$g''(y) = g''(-y)$$

şi

(71) $$M[g''(y)\, y] = 0,$$

astfel încît (62) este o matrice diagonală. Urmează că estimatorii de maximă verosimilitate pentru parametrii de poziţie şi de împrăştiere pentru orice repartiţie simetrică vor fi asimptotic necorelaţi şi deoarece asimptotic au o repartiţie normală bidimensională (Teorema 10) sînt independenţi.

ii) Chiar dacă repartiţia este asimetrică, prin schimbarea

(72) $$z = y - \frac{M(g''y)}{M(g'')}$$

pentru care

$$M(g''y) = M\left\{g''\left[z + \frac{M(g''y)}{M(g'')}\right]\right\} = M(g''z) + M(g''y)$$

şi deci

$$M(g''z) = 0,$$

Scanned with OKEN Scanner

(62) este de asemenea o matrice diagonală. Originea care conduce la estimatori necorelaţi poartă numele de centrul de poziţie al repartiţiei.

Exemplul 9. Fie $X_1, \ldots, X_n$ o selecţie asupra unei variabile aleatoare X pentru care

$$dF(x) = \frac{1}{\Gamma(p)} \left(\frac{x-\alpha}{\beta}\right)^{p-1} \exp\left\{-\frac{(x-\alpha)}{\beta}\right\} d\left(\frac{x-\alpha}{\beta}\right) \tag{73}$$

$$\alpha \leqslant x < \infty, \quad \beta > 0; \quad p > 2$$

Domeniul de definiţie al variabilei X depinde de α, (73) este zero pentru $x = \alpha$, iar derivata în raport cu α în limita inferioară, pentru $p > 2$, este zero; prin urmare condiţiile de regularitate sînt satisfăcute.

Avem : $g(y) = -\ln \Gamma(p) + (p-1) \ln y - y$ şi

$$M(g'') = M\left[-\frac{(p-1)}{y^2}\right] = -\frac{1}{p-2}$$

$$M(g''y) = M\left[-\frac{(p-1)}{y}\right] = -1,$$

$$M(g''y^2) = M\{-(p-1)\} = -(p-1)$$

Din (72) obţinem că centrul de poziţie este

$$\frac{M(g''y)}{M(g'')} = p - 2$$

Avem

$$\Sigma^{-1} = \frac{n}{\beta^2} \begin{pmatrix} \frac{1}{p-2} & 1 \\ 1 & p \end{pmatrix} \tag{74}$$

de unde matricea de covarianţe a estimatorilor $\hat{\alpha}$ şi $\hat{\beta}$

$$\Sigma = \frac{(p-2)\beta^2}{2n} \begin{pmatrix} p & -1 \\ -1 & \frac{1}{p-2} \end{pmatrix} \tag{75}$$

Dacă considerăm măsurătorile de la centrul de poziţie, pentru estimatorii necorelaţi $\hat{\alpha}$ şi $\hat{\beta}$ avem

$$D^2(\hat{\alpha}_{nec}) = (p-2)\beta^2/n$$

$$D^2(\hat{\beta}_{nec}) = \beta^2/(2n) \tag{76}$$

Comparînd (76) cu (75) şi (74), rezultă că $D^2(\hat{\beta})$ rămîne neschimbat la schimbarea originii.

Scanned with OKEN Scanner

§8. Estimarea parametrilor structurali. Estimatori condiționați de maximă verosimilitate

Fie $X_1, X_2, \ldots$ un șir de variabile aleatoare independente, astfel încît repartiția variabilei X_i depinde de parametrii θ și τ_i, unde valoarea lui θ este independentă de i, în timp ce valoarea parametrului τ_i se schimbă cu i.

DEFINIȚIA 2. (Neyman, Scott (1948)) θ poartă numele de parametru structural iar τ_i de parametrii incidentali.

Neyman și Scott (1948) și Kiefer și Wolfowitz (1955) au obținut estimatori consistenți pentru parametrul structural în prezența unui număr infinit de parametrii incidentali.

În cele ce urmează vom presupune că atît θ cît și τ_i iau valori în intervale deschise ale dreptei reale și că variabila aleatoare X_i posedă o densitate $f(x_i|\theta, \tau_i)$ în raport cu o măsură λ, σ-finită.

De asemenea vom presupune că pentru fiecare $i = 1, 2, \ldots$ există o statistică minimal suficientă pentru τ_i care este independentă de θ. Fie $T_i = T(X_i)$ o statistică minimal suficientă pentru τ_i și pentru n fixat considerăm repartiția vectorului $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ condiționată de $T_1 = t_1, T_2 = t_2, \ldots, T_n = t_n$. De asemenea vom presupune că funcția de repartiție a statisticii T_i are densitatea $g(t_i|\theta, \tau_i)$.

Densitatea de repatiție a vectorului $(X_1, \ldots, X_n)$ pentru $T_1, \ldots, T_n$ dați este dată de

$$\mathcal{O}(x_1, \ldots, x_n|\theta, t_1, \ldots, t_n) = \prod_{i=1}^{n} \mathcal{O}(x_i|\theta, t_i) =$$

(77)

$$= \prod_{i=1}^{n} f(x_i|\theta, \tau_i)/g(t_i|\theta, \tau_i)$$

Membrul sting al acestei ecuații este independent de τ, deoarece T_i este suficientă pentru τ_i.

DEFINIȚIA 3. (Andersen (1970)). Dacă există o singură valoare $\hat{\theta}_n$ a lui θ care maximizează (77), vom spune că $\hat{\theta}_n$ este estimatorul condiționat de maximă verosimilitate.

Motivul pentru care folosim statistici minimal suficiente rezultă din faptul că densitatea condiționată (77) conține mai puține informații despre θ în cazul în care T nu sînt minimale.

TEOREMA 13. (Andersen (1970)). *În presupunerile:*

1. $\ln \mathcal{O}(x_i|\theta, t_i)$ *este o funcție de* θ *derivabilă și există o mulțime* B *de valori ale lui* t *cu* $P_{\theta_0,\tau}(T^{-1}B) > 0$ *pentru toți* τ *și un interval deschis* Θ_0 *care conține pe* θ_0 *astfel încît pentru orice* $t \in B$ *funcțiile* $\mathcal{O}(x|\theta, t)$ *și* $\mathcal{O}(x|\theta', t)$ *nu sînt identice pentru orice pereche* $\theta \in \Theta_0$; $\theta' \in \Theta_0$ *unde* θ_0 *este valoarea adevărată.*

2. *Ecuația verosimilității maxime:*

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \ln \mathcal{O}(x_i|\theta, t_i)}{\partial \theta} = 0 \tag{78}$$

are pentru toți n *și aproape pentru toate valorile vectorului* $(t_1, \ldots, t_n)$ *o soluție unică* $\hat{\theta}_n \in \Theta$.

Scanned with OKEN Scanner

3.

(79) $$\sum_{i=1}^{\infty} \sigma^2(\delta, \tau_i)/i^2 < \infty$$

pentru toţi δ *într-un interval deschis ce conţine pe* 0, *unde*

$$\sigma^2(\delta, \tau_i) = D^2_{\theta_0,\tau_i}\{\ln \mathcal{O}(X_i|\theta_0 + \delta, T_i) - \ln \mathcal{O}(X_i|\theta_0, T_i)\},$$

estimatorul condiţionat de maximă verosimilitatea $\hat{\theta}_n$ *converge aproape sigur către valoarea adevărată* θ_0.

Demonstraţie. Demonstraţia se bazează pe următoarea inegalitate (Rao (1965), p. 47). Dacă f şi g sînt densităţi în raport cu aceeaşi măsură μ, σ — finită, atunci

(80) $$M_f\{\ln (g/f)\} = \int \{\ln g(x) - \ln f(x)\} f(x)\, d\mu(x) \leqslant 0$$

egalitatea avînd loc dacă şi numai dacă $g \equiv f$.

Dacă aplicăm (80) la densitatea condiţionată $\mathcal{O}(x_i|\theta, t_i)$ pentru două valori distincte θ_0 şi $\theta_0 + \delta'$ ale lui θ găsim că

(81) $$M_{\theta_0}\{\ln \mathcal{O}(X_i|\theta_0 + \delta', t_i) - \ln \mathcal{O}(X_i|\theta_0, t_i)|\, t_i\} \leqslant 0$$

pentru $\delta' \neq 0$. În (81) $M_{\theta_0}\{\cdot\,|t_i\}$ reprezintă valoarea medie condiţionată dat $T_i = t_i$ pentru valoarea θ_0 a parametrului.

Din presupunerea 1, (81) este inegalitate strictă pentru toţi δ' dintr-un interval deschis ce conţine pe zero, exceptînd

$$t_i \notin B \text{ cu } P_{\theta_0,\tau_i}(T^{-1}B) > 0$$

Din (81), luînd media în raport cu repartiţia lui t_i, obţinem

(82) $$M_{\theta_0,\tau_i}\{\ln \mathcal{O}(X_i|\theta_0 + \delta', T_i) - \ln \mathcal{O}(X_i|\theta_0, T_i)\} < 0$$

pentru $\delta' \neq 0$. În (82) avem inegalitate deoarece mulţimea unde (81) are inegalitate strictă are probabilitatea mai mare ca zero. Din (82) şi din independenţa statisticilor t_i urmează că

(83) $$M_{\theta_0,\tau_1,\ldots,\tau_n}\{\ln \mathcal{O}(X_1, \ldots, X_n)|\theta_0 + \delta', T_1, \ldots, T_n) - \ln \mathcal{O}(X_1, \ldots, X_n)|\theta_0, T_1, \ldots, T_n)\} < 0$$

În presupunerea 3 putem aplica legea tare a numerelor mari şirului $Z_1, Z_2, \ldots$, unde

$$Z_i = \ln \mathcal{O}(X_i|\theta_0 + \delta', T_i) - \ln \mathcal{O}(X_i|\theta_0, T_i)$$

Scanned with OKEN Scanner

Urmează că, pentru $n \to \infty$

$$n^{-1}\left(\sum_1^n Z_i - \sum_1^n M[Z_i]\right)$$

converge aproape sigur către 0, și deoarece conform relației (83), $\Sigma M[Z_i] < 0$ urmează că există un n_0 astfel încît cu probabilitatea 1

$$\ln \mathcal{O}(X_1, \ldots, X_n | \theta_0 + \delta';\ T_1, \ldots, T_n) < \ln \mathcal{O}(X_1, \ldots, X_n | \theta_0;\ T_1, \ldots, T_n)$$

pentru $n \geqslant n_0$.

Repetînd raționamentul pentru $-\delta'$ urmează că pentru un n_0

$$\ln \mathcal{O}(X_1, \ldots, X_n | \theta_0;\ T_1, \ldots, T_n) > \ln \mathcal{O}(X_1, \ldots, X_n | \theta_0 + \delta;\ T_1, \ldots, T_n)$$

pentru $\delta = \pm\delta'$.

Deci din condiția de derivabilitate din presupunerea 1 urmează că pentru $n \geqslant n_0$ $\ln \mathcal{O}(X_1, \ldots, X_n | \theta;\ T_1, \ldots, T_n)$ are un maxim local în

$$(\theta_0 - \delta',\ \theta_0 + \delta')$$

și că

$$\frac{\partial \ln \mathcal{O}(X_1, \ldots, X_n | \theta;\ T_1, \ldots, T_n)}{\partial \theta} = 0$$

în acest maxim local.

Din presupunerea 2 urmează că maximul local din $(\theta_0 - \delta', \theta_0 + \delta')$ este maxim global. Deoarece δ' este arbitrar, făcînd pe $\delta' \to 0$ găsim că estimatorul de maximă verosimilitate condiționat $\hat{\theta}_n$ converge, cînd $n \to \infty$, aproape sigur către θ_0. Teorema este demonstrată.

Observații. i) Presupunerile 1 și 2 pot fi înlocuite prin condiții mai slabe. O teoremă puțin mai generală decît teorema 13 se obține dacă în locul proprietății că ecuația verosimilității maxime (78) are o rădăcină unică considerăm proprietatea că există un maxim absolut, aceasta incluzînd cazurile cînd ecuația verosimilității maxime are cel puțin o soluție sau cazurile cînd maximul nu este o soluție a ecuației de verosimilitate.

ii) O versiune mai puternică și totodată mai simplă a presupunerii 3, cere continuitatea pentru $\sigma^2(\delta, \tau)$ și existența unui interval I închis al dreptei reale astfel încît $\tau_i \in I$ pentru toți i.

TEOREMA 14. (Andersen (1970)). *In presupunerile 1 la 5, unde 4. Primele trei derivate ale funcției* $\ln \mathcal{O}(x | \theta, t)$ *în raport cu* θ *există pentru toți* θ *dintr-un interval* Θ_0 *ce conține pe* θ_0, *și pentru toți* τ *și pentru toți* $\theta \in \Theta_0$ *avem*

$$M_{\theta,\tau}\left\{\frac{\partial \ln \mathcal{O}(X | \theta, T)}{\partial \theta}\right\} = 0 \tag{84}$$

și

$$M_{\theta,\tau}\left\{-\frac{\partial^2 \ln \mathcal{O}(X | \theta, T)}{\partial \theta^2}\right\} = M_{\theta,\tau}\left[\left\{\frac{\partial \ln \mathcal{O}(X | \theta, T)}{\partial \theta}\right\}^2\right] = B^2(\theta, \tau) \tag{85}$$

Scanned with OKEN Scanner

Presupunem că există o funcție $h(x)$ pozitivă și integrabilă astfel încît

$$\left|\frac{\partial^3 \ln \mathcal{O}(x|\theta, T(x))}{\partial \theta^3}\right| \leqslant h(x) \tag{86}$$

pentru toți $\theta \in \Theta_0$ și astfel că $M_{\theta_0,\tau}\{h(X)\}$ și $D^2_{\theta_0,\tau}\{h(X)\}$ sînt funcții continui de τ

5. *Pentru toți x, $f(x|\theta, \tau)$ este o funcție continuă de τ. In plus*

$$D^2_{\theta_0,\tau}\left\{\frac{\partial^2 \ln \mathcal{O}(X|\theta_0, T)}{\partial \theta^2}\right\} \text{ și } B^2(\theta_0, \tau)$$

sînt funcții continui de τ și

$$B^2(\theta_0, \tau) > 0$$

pentru toți τ,

și pentru orice șir $\tau_1, \tau_2, \ldots$, mărginit, $\hat{\theta}_n$ este asimptotic repartizată $N(\theta_0, \sigma_n^2)$, unde

$$\sigma_n^{-2} = \sum_1^n B^2(\theta_0, \tau_i), \tag{87}$$

sau cu alte cuvinte $(\hat{\theta}_n - \theta_0)/\sigma_n \sim N(0,1)$.

Observație. Presupunerea 4 privește condițiile de regularitate ale funcției $\ln \mathcal{O}(x_i|\theta, t_i)$ ca funcție de θ și sînt acelea ale lui Cramer (1946) (Teorema 7).

Demonstrație. Ca și în teorema 7 considerăm o dezvoltare Taylor a logaritmului funcției de verosimilitate în θ_0. Cu notațiile

$$B_n^2(\theta) = \sum_1^n B^2(\theta, \tau_i), \quad \mathcal{O}_i = \mathcal{O}(x_i|\theta, t_i)$$

găsim

$$0 = \Sigma\left(\frac{\partial \ln \mathcal{O}_i}{\partial \theta}\right)_{\theta=\theta_0} + (\hat{\theta}_n - \theta_0)\,\Sigma\left(\frac{\partial^2 \ln \mathcal{O}_i}{\partial \theta^2}\right)_{\theta=\theta_0} + \tag{88}$$

$$+ \frac{1}{2}(\hat{\theta}_n - \theta_0)^2\,\Sigma\left(\frac{\partial^3 \ln \mathcal{O}_i}{\partial \theta^3}\right)_{\theta=\theta'},$$

unde

$$|\theta' - \theta_0| \leqslant |\hat{\theta}_n - \theta_0|$$

Ecuația (88) mai poate fi scrisă

$$\Sigma\left(\frac{\partial \ln \mathcal{O}_i}{\partial \theta}\right)_{\theta=\theta_0} B_n^{-1}(\theta_0) = (\hat{\theta}_n - \theta_0)\,B_n(\theta_0) \times \tag{89}$$

$$\times\left[1 + Y_n/\{n^{-1}B_n^2(\theta_0)\} + \frac{1}{2}(\hat{\theta}_n - \theta_0)Z_n(\theta')/B_n^2(\theta_0)\right]$$

Scanned with OKEN Scanner

unde

$$Y_n = n^{-1} \Sigma \left(- \frac{\partial^2 \ln \emptyset_i}{\partial \theta^2} \right)_{\theta=\theta_0} - n^{-1} B_n^2(\theta_0)$$

și

$$Z_n(\theta') = - \Sigma \left(\frac{\partial^3 \ln \emptyset_i}{\partial \theta^3} \right)_{\theta=\theta'}$$

Mai întîi vom arăta că putem aplica teorema limită centrală membrului stîng al relației (89). Deoarece, din Presupunerea 5, $B^2(\theta_0, \tau)$ este continuă și τ sînt mărginite, există τ_0 astfel încît

$$B^2(\theta_0, \tau_i) \geqslant B^2(\theta_0, \tau_0) = b^2(\theta_0) > 0$$

pentru toți i.

Deci pentru orice $\varepsilon > 0$ avem o margine superioară dată de criteriul Lindberg-Feller

(90)

$$B_n^{-2}(\theta_0) \sum_{i=1}^{n} \int_{|y| \geqslant \varepsilon B_n(\theta_0)} y^2 \mathrm{d}F'(y|\theta_0, \tau_i) \leqslant n^{-1} b^{-2}(\theta_0) \sum_{i=1}^{n} \int_{|y| \geqslant \varepsilon \sqrt{n} b(\theta_0)} y^2 \mathrm{d}F'(y|\theta_0, \tau_i),$$

unde F' este funcția de repartiție a variabilei $\partial \ln \emptyset (X_i|\theta_0, T_i)/\partial \theta_0$

Fie

$$\alpha_n(\theta_0, \tau) = \int_{|y| \geqslant \varepsilon \sqrt{n} b(\theta_0)} y^2 \, \mathrm{d}F'(y|\theta_0, \tau)$$

Deoarece X admite densitatea $f(x|\theta_0, \tau)$ în raport cu λ și din Presupunerea 5 f este continuă în τ, din teorema lui Scheffé (Scheffé (1947)) urmează că pentru $\tau' \to \tau$

$$\int_A f(x|\theta_0, \tau') \mathrm{d}\lambda(x) \to \int_A f(x|\theta_0, \tau) \mathrm{d}\lambda(x)$$

pentru orice mulțime măsurabilă A.

În particular

$$F'(y|\theta_0, \tau) = P\left\{ \frac{\partial \ln \emptyset(X|\theta_0, T)}{\partial \theta_0} \leqslant y \right\}$$

și

$$F_c'(y|\theta_0, \tau) = P\left\{ \frac{\partial \ln \emptyset(X|\theta_0, T)}{\partial \theta_0} \geqslant y \right\}$$

sînt funcții continui de τ pentru toți y.

Scanned with OKEN Scanner

Punînd

$$g(y) = \begin{cases} y^2 , & |y| < \varepsilon \sqrt{n}\, b(\theta_0) \\ \varepsilon^2 n b^2(\theta_0), & |y| \geqslant \varepsilon \sqrt{n}\, b(\theta_0), \end{cases}$$

din continuitatea funcţiei F' şi din teorema Helly-Bray urmează că

$$\int g(y)\, dF'(y \mid \theta_0, \tau) = \int_{|y| < \varepsilon \sqrt{n}\, b(\theta_0)} y^2\, dF'(y \mid \theta_0, \tau) + \varepsilon^2 n\, b^2(\theta_0) \times$$

$$\times \{F'_c(\varepsilon \sqrt{n} b(\theta_0) \mid \theta_0, \tau) + F'(-\varepsilon \sqrt{n}\, b(\theta_0) \mid \theta_0, \tau)\}$$

este continuă în τ, iar din continuitatea funcţiilor F'_c şi F' tragem concluzia că

$$\int_{|y| < \varepsilon \sqrt{n}\, b(\theta_0)} y^2\, dF'(y \mid \theta_0, \tau) = B^2(\theta_0, \tau) - \alpha_n(\theta_0, \tau)$$

este continuă în τ.

Deoarece, din Presupunerea 5, $B^2(\theta_0, \tau)$ este continuă în τ urmează că $\alpha_n(\theta_0, \tau)$ este continuă în τ. Deoarece, pe de altă parte,

$$\alpha_n(\theta_0, \tau) \geqslant \alpha_{n+1}(\theta_0, \tau) \text{ şi } \lim_{n \to \infty} \alpha_n(\theta_0, \tau) = 0$$

pentru toţi τ, prin reducerea la absurd, urmează că $\alpha_n(\theta_0, \tau)$ converge uniform către 0 pentru $|\tau| \leqslant k$. Deci

$$\sup_{|\tau| \leqslant k} \alpha_n(\theta_0, \tau) \to 0 \text{ cînd } n \to \infty \text{ pentru orice } k > 0.$$

Urmează că membrul drept al relaţiei (90)$\to$0.

Deci, se poate aplica teorema Lindeberg-Feller şi astfel membrul stîng al relaţiei (89) converge către o repartiţie normală redusă. Astfel dacă putem arăta că termenii din { } membrului drept converg către unu urmează că $(\hat{\theta}_n - \theta_0)$ are asimptotic o repartiţie normală cu dispersia $B_n^{-2}(\theta_0)$. În Presupunerea 5 se aplică legea numerelor mari la Y_n şi $n^{-1}B_n^2(\theta_0)$ rămîne mărginit cînd $n \to \infty$.
Deci

$$Y_n / \{n^{-1} B_n^2(\theta_0)\} \xrightarrow[n \to \infty]{p} 0$$

Din Presupunerile 4 şi 5 urmează că pentru $n \geqslant$ un anumit n_0, $Z_n(\theta')/B_n^2(\theta_0)$ rămîn mărginiţi cu probabilitatea 1 şi deoarece $\hat{\theta}_n \to \theta_0$ aproape singur (Teorema 13), obţinem

$$\frac{1^*}{2} (\hat{\theta}_n - \theta_0)\, Z_n(\theta') / B_n^2(\theta_0) \xrightarrow[n \to \infty]{p} 0,$$

ceea ce demonstrează teorema.

Scanned with OKEN Scanner

§9. Estimarea vectorilor structurali

Teoremele 13 şi 14 pot fi generalizate în cazul în care θ este un vector ($\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_m)$). Deoarece metoda de demonstrare este aceeaşi ca pentru cazul unidimensional, vom prezenta numai presupunerile în care se lucrează.

Fie $\hat{\theta}_n = (\hat{\theta}_{n1}, \ldots, \hat{\theta}_{nm})$ estimatorul condiţionat de maximă verosimilitate.

Presupunerea 1'. Identică cu presupunerea 1 cu θ înlocuit prin θ şi „un interval Θ_0 deschis" înlocuit de un cub Θ_θ deschis în spaţiul euclidian m-dimensional.

Presupunerea 2'. Identică cu presupunerea 2 cu θ înlocuit prin θ şi $\hat{\theta}_n$ prin $\hat{\theta}_n$.

Presupunerea 3'. Pentru toţi $\delta \in \Delta$ unde Δ este un cub deschis ce conţine pe 0, avem

$$\sum_{i=1}^{\infty} \sigma^2(\delta, \tau_i)/i^2 < \infty,$$

unde

$$\sigma^2(\delta, \tau_i) = D^2_{\theta,\tau_i}\{\ln \mathcal{O}(X_i|\theta_0 + \delta, T_i) - \ln \mathcal{O}(X_i|\theta_0, T_i)\}$$

Fie

$$b^2_{jk}(\theta, \tau) = M_{\theta,\tau}[\{\partial \ln \mathcal{O}(X|\theta, T)/\partial\theta_i\}/\{\partial \ln \mathcal{O}(X|\theta, T)/\partial\theta_k\}]$$

Presupunerea 4'. Mulţimea derivatelor parţiale de ordinul 1, doi şi trei ale funcţiei $\mathcal{O}\{x|\theta, T(x)\}$ în raport cu $\theta_1, \ldots, \theta_m$ există pentru toţi θ dintr-un cub Θ_0 deschis ce conţine pe θ_0 şi pentru toţi r şi toţi $\theta \in \Theta_0$, avem

$$M_{\theta,\tau}\{\partial \ln \mathcal{O}(X|\theta, T)/\partial\theta_j\} = 0$$

şi

$$M_{\theta,\tau}[\partial^2 \ln \mathcal{O}(X|\theta, T)/(\partial\theta_j\partial\theta_k)] = -b^2_{jk}(\theta, \tau)$$

Există o funcţie pozitivă $h_{jk}(x)$ integrabilă astfel încît

$$|\partial^3 \ln \mathcal{O}\{x|\theta, T(x)\}/(\partial\theta_j\partial\theta_k\partial\theta_p)| \leqslant h_{jk}(x) \quad p = 1, \ldots, m$$

pentru toţi $\theta \in \Theta_0$ astfel încît $M_{\theta_0,\tau}\{h_{jk}(X)\}$ şi $D^2_{\theta_0,\tau}\{h_{jk}(X)\}$ sînt funcţii continui de τ.

Presupunerea 5'. Pentru toţi x, $f(x|\theta, \tau)$ este o funcţie continuă de τ şi pentru $j, k = 1, \ldots, m$

$$D^2_{\theta_0,\tau}[\partial^2 \ln \mathcal{O}(X|\theta_0, T)/(\partial\theta_j\partial\theta_k)] \text{ şi } b^2_{jk}(\theta_0, \tau)$$

sînt funcţii continui de τ.

Matricea $B^2(\theta_0, \tau)$ cu elementele $b_{jk}(\theta_0, \tau)$ $(j, k = 1, \ldots, m)$ este nesingulară pentru toţi τ.

Scanned with OKEN Scanner

În Presupunerile 1′, 2′ și 3′ are loc următoarea versiune multidimensională a teoremei 13.

TEOREMA 15. *Estimatorul condiționat de maximă verosimilitat* $\hat{\boldsymbol{\theta}}_n$ *este un estimator consistent pentru* $\boldsymbol{\theta}$, *adică* $\hat{\boldsymbol{\theta}}_n = (\hat{\theta}_{n1}, \ldots, \hat{\theta}_{nm})$ *converge aproape singur către* $\boldsymbol{\theta}_0 = (\theta_{01}, \ldots, \theta_{0m})$ *cînd* $n \to \infty$

În Presupunerile 1′ la 5′ are loc următoarea teoremă

TEOREMA 16. *Pentru orice șir* $\tau_1, \tau_2, \ldots$ *mărginit,* $\hat{\theta}_n$ *este repartizat asimptotic normal m-dimensional cu media* $\boldsymbol{\theta}_0$ *și matricea de covariațe* $\{B_n^2(\boldsymbol{\theta}_0)\}^{-1}$, *unde* $B_n^2(\boldsymbol{\theta}_0)$ este o matrice cu elementele

$$b_{jk}^2(\theta_0, \tau_1) + \ldots + b_{jk}^2(\theta_0, \tau_n)$$

§10. Aplicarea metodei verosimilității maxime la modelele ce implică un număr mare de parametri

10.1. Introducere

Presupunem că X_t este o variabilă aleatoare a cărei repartiție depinde de o mulțime de parametri structurali θ și o mulțime de parametri incidentali $\tau_1, \tau_2, \ldots$ În cele ce urmează vom aplica metoda verosimilității maxime la cazul în care densitatea variabilei X_t depinde numai de θ și τ_t. Aceasta este o clasă de probleme caracterizate de faptul că introducerea unei noi variabile introduce de asemenea și noi parametri. Astfel numărul de parametrii tinde către infinit cînd volumul selecției tinde către infinit.

Se pune problema să eliminăm parametrii nedoriți astfel încît să putem face presupuneri asupra parametrilor ce prezintă interes. Prezentăm, după Kalbfleisch și Sprott (1970), metode de eliminare a parametrilor din funcția de verosimilitate.

10.2. Verosimilități integrate

Fie $X_1, \ldots, X_n$ o selecție asupra unei variabile aleatoare X cu densitatea de repartiție $f(x; \theta, \beta)$, unde θ și β pot fi vectori. Repartiția comună a variabilelor de selecție este

$$f(x_1, \ldots, x_n; \theta, \beta) = \Pi f(x_i; \theta, \beta)$$

Dacă θ este parametrul asupra căruia dorim să obținem informații, atunci trebuiesc găsite metode pentru eliminarea parametrului β din funcția de verosimilitate. Dacă β are o densitate apriorică $p(\beta, \theta)$ cunoscută, aceasta poate fi combinată cu funcția de verosimilitate și o metodă pentru eliminarea parametrului β constă în integrarea în raport cu β, ceea ce conduce la o funcție de θ. Avem :

$$I(\theta : x_1, \ldots, x_n) = \int_\beta f(x_1, \ldots, x_n : \theta | \beta)\, p(\beta ; \theta)\, d\beta \tag{91}$$

Scanned with OKEN Scanner

DEFINIȚIA 4. Funcția (91) poartă numele de funcția de verosimilitate integrată.

Dacă funcția de verosimilitate integrată este standardizată în raport cu valoarea sa maximă, rezultă funcția de θ

$$IR(\theta;\ x_1,\ldots,x_n) = I(\theta : x_1,\ldots,x_n)/\sup_{\theta} I(\theta,\ x_1,\ldots,x_r) \tag{92}$$

DEFINIȚIA 5. Funcția (92) poartă numele de funcția de verosimilitate integrată relativă.

Situațiile în care putem obține o densitate apriorică reală sînt ilustrate de Fisher (1956, 1962) și Sportt și Kalbfleisch (1969).

Dificultatea acestei metode de eliminare a parametrilor constă în faptul că ea depinde de tipul precis de informație apriorică care nu este întotdeauna cunoscut.

Exemplul 10. Fie $X_1,\ldots,X_n$ o selecție asupra unei variabile aleatoare $X \sim N(\xi, 1)$ și $Y_1,\ldots,Y_m$ o selecție asupra unei variabile aleatoare $Y \sim N(\nu, 1)$, Ne propunem să estimăm $\theta = \nu/\xi$.

Variabilele aleatoare independente $\bar{X}_n$ și $\bar{Y}_m$ sînt suficiente comune pentru ξ și θ.

Dacă θ nu este cunoscut, $\bar{X}_n$ este o statistică suficientă pentru ξ. Probabilitatea elementară a statisticii $\bar{X}_n$ este

$$\sqrt{n/(2\pi)}\ \exp\left[-\frac{n}{2}(\bar{x}_n - \xi)^2\right] \mathrm{d}\bar{x}_n.$$

Această probabilitate elementară poate fi inversată pentru a obține repartiția marginală a lui ξ. Obținem :

$$\sqrt{n/(2\pi)}\ \exp\left\{-\frac{n}{2}(\xi - \bar{x}_n)^2\right\} \mathrm{d}\xi. \tag{93}$$

Probabilitatea elementară a statisticii $\bar{Y}_m$ este

$$f(\bar{y};\ \theta \mid \xi) = \sqrt{m/(2\pi)}\ \exp\left\{-\frac{m}{2}(\bar{y} - \theta\xi)^2\right\} \mathrm{d}\bar{y} \tag{94}$$

unde notația de condiționare este folosită pentru a arăta că ξ este o variabilă aleatoare.

Din combinarea lui (93) cu (94) și prin integrare în raport cu ξ obținem verosimilitatea integrată (91) a parametrului θ ca fiind proporțională cu

$$I(\theta) = (n + m\theta^2)^{-1/2} \exp\{-mn(\bar{y} - \theta\bar{x})^2/2(n + m\theta^2)\}.$$

Pentru a obține repartiția comună fiducială, vom inversa ecuația (94) pentru a obține repartiția lui θ pentru ξ dat și atunci o vom combina cu ecuația (93).

Dacă $D^2(X_i) = D^2(Y_i) = \sigma^2$, atunci în absența cunoașterii lui ξ și θ

$$V^2 = \Sigma(X_i - \bar{X})^2 + \Sigma(Y_i - \bar{Y})^2$$

Scanned with OKEN Scanner

este suficientă pentru σ^2. Atunci σ^2 poate fi eliminat prin folosirea repartiției sale marginale (fiduciale) și dă verosimilitatea integrată proporțională cu

$$(n + m\theta^2)^{-1/2}\left\{1 + \frac{mn(\bar{y} - \theta\bar{x})^2}{(n + m\theta^2)\, V^2}\right\}^{-(n+m-1)/2}$$

10.3. Verosimilități relative maxime

Funcția de verosimilitate comună a parametrilor θ și β este proporțională cu densitatea selecției, $f(x_1,\ldots,x_n;\ \theta,\ \beta)$. O metodă pentru eliminarea parametrului β este de a obține funcția de verosimilitate relativă maximă pentru θ. Aceasta implică înlocuirea parametrului β prin estimația sa $\beta' = \beta'(\theta)$ obținută prin metoda verosimilității maxime, pentru o valoare specificată a lui θ. Obținem

$$f(x_1,\ldots,x_n,\ \theta,\ \beta'(\theta)) = \sup_{\beta} f(x_1,\ldots,x_n;\ \theta,\ \beta) \tag{95}$$

care prin standardizare cu maximul ei după θ dă funcția de verosimilitate relativă maximă

$$R_M(\theta) = f(x_1,\ldots,x_n;\ \theta,\ \beta'(\theta))/\sup_{\theta} f(x_1,\ldots x_n;\ \theta,\ \beta'(\theta)).$$

Această funcție are proprietatea că oricare ar fi β, verosimilitatea relativă a $(\theta,\ \beta)$ nu poate să depășească $R_M(\theta)$ (Box și Cox (1964), Sprott și Kalbfleisch (1969)).

Din nefericire, folosirea funcției $R_M(\theta)$ poate da o măsură necorespunzătoare a nesiguranței în θ cînd dimensiunea lui β este mare deoarece această metodă presupune efectiv că pentru θ fixat, β este egal cu estimația sa de maximă verosimilitate.

Astfel verosimilitatea relativă maximă nu ia în considerare lipsa cunoașterii lui β și astfel putem să greșim atît în precizie cît și în poziție.

O astfel de situație este ilustrată în

Exemplul 11. $\{X_j\}_1^n$ sînt variabile aleatoare independente repartizate $N\left(\sum_{i=1}^{k} \beta_i u_{ij},\ \theta\right)$. Funcția de verosimilitate relativă maximă a lui θ este

$$R_M(\theta :\ x_1,\ldots,x_n) = (S^2/n\theta)^{n/2} \exp\left\{\frac{1}{2}n - (S^2/2\theta)\right\}, \tag{96}$$

unde

$$S^2 = \sum_{j=1}^{n}\left(x_j - \sum_{i=1}^{k} b_i u_{ij}\right)^2 \tag{97}$$

și unde b_i este estimația de verosimilitate maximă a parametrului β_i, $i = 1,\ldots,k$. Nu s-a ținut seama de pierderea a k grade de libertate folosite în estimarea parametrilor β. Această pierdere este considerabilă dacă k este apropiat de n; presupunerile asupra lui θ bazate pe $R_M(\theta)$ nu vor fi precise.

Scanned with OKEN Scanner

§11. Statistici ancilare

DEFINIȚIA 6. (Fisher (1925). Vom numi statistică ancilară o statistică a cărei repartiție este aceeași pentru toare valorile posibile ale parametrului necunoscut.

Exemplul 12. Fie X și Y două variabile aleatoare independente repartizate $N(\theta, 1)$, θ necunoscut.

Deoarece repartiția statisticii $X - Y$ este independentă de θ, urmează că $X-Y$ este o statistică ancilară.

Deoarece $X-Y$ și $Y-X$ sînt identic repartizate $[N(0,2)]$ și fiecare este independentă de $X + Y$, urmează că

$$F_c = F_c(X, Y) = \begin{cases} X-Y, & X+Y < c \\ Y-X, & X+Y \geqslant c \end{cases}$$

este independentă de $X + Y$ și are aceeași repartiție ca $X - Y$. Astfel F_c este ancilară pentru fiecare c.

Se recomandă folosirea statisticii ancilare în acele probleme de estimare, în care estimatorul de maximă verosimilitate T al parametrului θ nu este o statistică suficientă. Folosirea statisticii T ca un estimator al parametrului θ, va antrena o pierdere de informație, care după Fisher, cel puțin în cazul selecțiilor de volum mare, poate fi măsurată. Astfel informația conținută în întreg spațiul X este definită de

$$I(\theta) = M\left[-\frac{\partial^2 \ln f(X|\theta)}{\partial \theta^2} \,|\, \theta\right] \tag{98}$$

unde $f(x|\theta)$ este o densitate de repartiție pentru X. Similar informația conținută în statistica T este măsurată de funcția

$$I(\theta) = M\left[-\frac{\partial^2 \ln g(T|\theta)}{\partial \theta^2} \,|\, \theta\right] \tag{99}$$

unde $g\,(t|\theta)$ este densitatea estimatorului T. Diferența

$$\lambda(\theta) = I(\theta) - J(\theta) \tag{100}$$

poate fi luată ca măsură a informației pierdute.

Are loc

TEOREMA 17. (i) $\lambda(\theta) \geqslant 0$ *pentru toate valorile lui* θ;

(ii) $\lambda(\theta) \equiv 0$ *dacă și numai dacă* T *este o statistică suficientă*;

(iii) *dacă* T *împreună cu statistica* Y *este suficientă pentru* θ *atunci informația conținută în perechea* (T, Y) *este* $I(\theta)$;

(iv) *dacă* Y *este ancilară și perechea* (T, Y) *este suficientă atunci*

$$I(\theta) = M[J(\theta|Y)|\theta]$$

Scanned with OKEN Scanner

unde $J(\theta|y)$ *este cantitatea de informaţie conţinută în* T *condiţionată de faptul că* Y *ia valoarea* y, *adică*

$$J(\theta|y) = M\left[-\frac{\partial^2 \ln f(T|y,\theta)}{\partial\theta^2}\,|\,Y=y,\theta\right], \tag{101}$$

unde $f(t|y,\theta)$ *este densitatea de repartiţie a statisticii* T, *condiţionate de* $Y=y$.

Observaţie. Relaţia (iv) rezultă din faptul că densitatea de repartiţie $h(t,y|\theta)$ a vectorului (T, Y) poate fi scrisă ca

$$h(t, y|\theta) = g(y)f(t|y, \theta)$$

unde $g(y)$ este independentă de θ (liberă de θ) deoarece Y este o statistică ancilară.

Considerăm situaţia în care estimatorul de maximă verosimilitate T nu este o statistică suficientă dar putem găsi o altă statistică Y a cărei repartiţie marginală este independentă de θ şi care completează statistica T în sensul că, perechea (T, Y) este suficient comună. Statistica Y prin ea însăşi nu conţine nici o informaţie asupra lui θ. Dar într-un sens *sintetizează în ea* cantitatea de informaţie $\lambda(\theta)$ care este pierdută prin folosirea statisticii T ca un estimator pentru parametrul θ.

Se pune problema să recîştigăm această pierdere aparentă de informaţie. După Fisher este o greşeală să calculăm informaţia conţinută în T cu referire la întreg spaţiul de selecţie, adică cu referire la repartiţia marginală a lui T. O măsură corespunzătoare a informaţiei conţinute în T este $J(\theta|Y)$ şi nu $J(\theta)$. Avînd T şi Y observate vom considera repartiţia statisticii T condiţionată de valoarea observată a variabilei Y. Vom lua ca mulţime de referinţă nu întregul spaţiu de selecţie ci submulţimea acelor puncte ce va da naştere la valoarea observată a statisticii ancilare Y.

Exemplul 13. Fie $(X_i, Y_i)_{1\leqslant i\leqslant N}$ o selecţie de volum N asupra unui vector aleator (X, Y) a cărui densitate de repartiţie este

$$p(x, y|\theta) = \exp\left[-\left(\theta x + \frac{y}{\theta}\right)\right], \quad x>0,\ y>0,\ \theta>0.$$

Dacă punem

$$T = \sqrt{\Sigma Y_i/\Sigma X_i} \text{ şi } U = \sqrt{(\Sigma X_i)(\Sigma Y_i)},$$

atunci

i) T este estimatorul de maximă verosimilitate al parametrului θ
ii) T nu este o statistică suficientă pentru θ
iii) perechea (T, U) este suficientă comună pentru θ
iv) U este o statistică ancilară, adică repartiţia marginală a statisticii este independentă de θ.

Deoarece verosimilitatea nu poate fi exprimată numai în termeni de θ şi T, nu va exista o estimaţie suficientă şi avem o pierdere de informaţie dacă selecţia este înlocuită numai de estimaţia T.

Cantitatea de informaţie a întregului spaţiu de selecţie de N perechi de observaţii este

$$I(\theta) = 2N/\theta^2,$$

Scanned with OKEN Scanner

în timp ce cantitatea de informaţie conţinută în statistica T este

$$J(\theta) = \frac{2N}{\theta^2} \cdot \frac{2N}{2N+1}$$

Pierderea de informaţie este mai mică decît jumătatea valorii unei singure perechi de observaţie şi nu depăşeşte niciodată o treime din totalul posibil.

Aici U este o statistică ancilară şi considerăm repartiţia condiţionată a statisticii T dat U. Din această repartiţie condiţionată informaţia condiţionată conţinută de T este

$$J(\theta|U) = \frac{2N}{\theta^2} \cdot \frac{K_1(2U)}{K_0(2U)},$$

unde K_0 şi K_1 sînt funcţii Bessel.

Informaţia conţinută în $J(\theta|U)$depinde de valoarea actuală a statisticii U, dar are o valoare medie, cînd se iau în consideraţie variaţiile statisticii U, de

$$2N/\theta^2$$

ceea ce arată că informaţia se recîştigă şi inferenţa este completă înlocuind repartiţia statisticii T pentru o selecţie de volum N dată, prin repartiţia statisticii T dat U.

Cox (1971) consideră următoarea definiţie

DEFINIŢIA 7. Dacă există un parametru $\boldsymbol{\theta}$ şi statistica minimal suficientă $\mathbf{s}$ poate fi descompusă în componentele $(\mathbf{t}, \mathbf{a})$ astfel încît repartiţia variabilei aleatoare $\mathbf{a}$ nu depinde de θ, atunci $\mathbf{a}$ poartă numele de statistică ancilară.

Dacă există mai multe statistici cu această proprietate, va exista o singură statistică maximală şi aceasta va fi aleasă drept a.

Observaţie. În definiţia 6 nu se cere ca a să fie componenta unei statistici minimal suficiente.

Definiţia 7 prezintă cel puţin două dificultăţi şi anume

i) nu există un procedeu general pentru construirea statisticilor ancilare

ii) chiar în cazul unul singur parametru $\boldsymbol{\theta}$, descompunerea $\mathbf{s} = (\mathbf{t},\mathbf{a})$ poate să nu fie unică.

Basu (1964), a dat două exemple în care descompunerea lui ii) nu este unică şi sugerează să se aleagă drept statistică ancilară aceea ce corespunde unui experiment realizabil.

Cox (1971) alege ca statistică ancilară aceea statistică care separă informaţia în componente care diferă cel mai mult posibil.

Exemplul 14. Considerăm o repartiţie multinominală cu patru celule, pentru care probabilităţile sînt

$$\pi_1(\theta) = \frac{1}{6}(1-\theta), \quad \pi_2(\theta) = \frac{1}{6}(1+\theta), \tag{102}$$

$$\pi_3 = \frac{1}{6}(2-\theta), \quad \pi_4 = \frac{1}{6}(2+\theta),$$

unde θ este un parametru necunoscut, $|\theta| \leqslant 1$.

Scanned with OKEN Scanner

Pentru o selecţie de volum n, fie n_1, n_2, n_3, n_4 numărul observaţiilor care au căzut în cele patru celule. Logaritmul funcţiei de verosimilitate (cu excepţia unei constante) este

(103) $$\ln P(\theta) = n_1 \ln(1-\theta) + n_2 \ln(1+\theta) + n_3 \ln(2-\theta) + n_4 \ln(2+\theta)$$

Mulţimea n_1, n_2, n_3, n_4 este o statistică minimal suficientă. Un procedeu pentru a face inferenţă asupra parametrului θ constă în a examina repartiţia exactă a statisticii.

(104) $$U(\theta) = \frac{\partial \ln P(\theta)}{\partial \theta}$$

pentru o valoare arbitrară $\theta = \theta_0$. Repartiţia variabilei $U(\theta_0)$ este astfel încît

(105) $$M[U(\theta_0)|\theta_0] = 0, D^2[U(\theta_0)|\theta_0] = ni(\theta_0)$$

unde $i(\theta_0)$ este informaţia pe unitatea de observaţie, adică

(106) $$i(\theta_0) = \frac{1}{n} M\left\{ -\left[\frac{\partial^2 \ln P(\theta)}{\partial \theta^2} \right]_{\theta=\theta_0} | \theta_0 \right\}$$

În cazul de faţă

(107) $$i(\theta_0) = \frac{(2-\theta_0^2)}{(1-\theta_0^2)(4-\theta_0^2)} .$$

Avem două statistici ancilare distincte şi anume:

(108) $a = (a_1, a_2)$ unde $a_1 = n_1 + n_2$, $a_2 = n - a_1 = n_3 + n_4$

(109) $b = (b_1, b_2)$ unde $b_1 = n_1 + n_4$, $b_2 = n - b_1 = n_2 + n_3$

Variabila aleatoare A_1 are o repartiţie $Bi\left(n, \frac{1}{3}\right)$ ce nu depinde de θ. Pentru a folosi (108), considerăm repartiţiile condiţionate de $A_1 = a_1$. Avem:

(110) $$M[U(\theta_0)|A_1 = a_1;\ \theta_0] = 0, \quad D^2[U(\theta_0)|A_1 = a_1;\ \theta_0] = ni_a(\theta_0)$$

unde

(111) $$i_a(\theta_0) = \frac{3a_1 n^{-1} + (1-\theta_0^2)}{(1-\theta_0^2)(4-\theta_0^2)}$$

Dacă folosim statistica ancilară b, obţinem

(122) $$i_b(\theta_0) = \frac{2\theta_0 b_1 n^{-1} + (1-\theta_0)(2+\theta_0)}{(1-\theta_0^2)(4-\theta_0^2)}$$

Scanned with OKEN Scanner

Din proprietăţile mediilor condiţionate, obţinem

$$M[i_A(\theta_0);\ \theta_0] = M[i_B(\theta_0);\ \theta_0] = i(\theta_0) \tag{113}$$

$$D^2[i_A(\theta_0);\ \theta_0] = \frac{2}{n[(1-\theta_0^2)(4-\theta_0^2)]^2}. \tag{114}$$

$$D^2[i_B(\theta_0);\ \theta_0] = \frac{\theta_0^2}{n[(1-\theta_0^2)(4-\theta_0^2)]^2}. \tag{115}$$

Astfel, deoarece pentru toţi θ_0, (114) depăşeşte (115), statistica ancilară a este preferabilă statisticii b.

§12. Estimatori jackknife generalizaţi şi verosimilitatea maximă

Următoarea teoremă constituie o generalizare a unei teoreme date de Brillinger (1966).

TEOREMA 18. *Fie $X_1, \ldots, X_n$ o selecţie asupra unei variabile aleatoare X cu densitatea de repartiţie $p_X(\cdot, \theta)$, $\hat{\theta}$ estimatorul de maximă verosimilitate pentru θ şi $n = NM$. Dacă N este fixat şi $\lim_{n\to\infty} R(n) \neq 1$, atunci variabila aleatoare*

$$\frac{\sqrt{N(N-1)}\,[G(\hat{\theta}_n^0) - \theta]}{\sqrt{\sum_1^N [\hat{\theta}_i - \hat{\theta}]^2}}$$

este asimptotic, pentru $n\to\infty$, repartizată $t(N-1)$.

Demonstraţie. Pentru $\hat{\theta}_n^0$ suficient de aproape de θ, putem scrie

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial \ln p_X(x_i, \theta)}{\partial \theta}\bigg|_{\theta=\hat{\theta}_n^0} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \ln p_X(x_i, \theta)}{\partial \theta} + \tag{116}$$

$$+ (\hat{\theta}_n^0 - \theta) \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 \ln p_X(x_i, \theta^*)}{\partial \theta^2} = 0,$$

unde θ^* variază între $\hat{\theta}_n^0$ şi θ. Din (116) şi din consistenţa estimatorului $\hat{\theta}_n^0$

$$\sqrt{n}(\hat{\theta}_n^0 - \theta) = \left[\sum_{j=1}^n \frac{\partial \ln p_X(x_i, \theta)}{\partial \theta} \Big/ \sqrt{n}\, I\right] + Y_n \tag{117}$$

unde I este cantitatea de informaţie a lui Fisher pe unitatea de observaţie, şi Y_n care tinde în probabilitate către 0.

Scanned with OKEN Scanner

Din (117) putem scrie

$$(118)\quad \sqrt{M(N-1)}(\hat{\theta}^{i}_{n-1}-\theta)=\sum_{\substack{j=1\\ j\notin \mathfrak{M}_i}}^{n}\frac{\partial \ln p_X(x_j,\theta)}{\partial\theta}\Big/ I\sqrt{M(N-1)}+Y_{n,i},$$

unde $Y_{n,i}\xrightarrow{P}0$ și $\mathfrak{M}_i$ este mulțimea indicilor X-lor ce aparțin grupului i.

Din (1117) și (118) obținem

$$G_i(\hat{\theta}^{0}_{n})-\theta=\frac{1}{I(1-R(n))}\left[\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial \ln p_X(x_j,\theta)}{\partial\theta}-\right.$$

$$\left.-\frac{R(n)}{M(N-1)}\sum_{\substack{j=1\\ j\notin \mathfrak{M}_i}}^{n}\frac{\partial \ln p_X(x_j,\theta)}{\partial\theta}\right]+$$

$$+\frac{Y_n}{\sqrt{n}(1-R(n))}-\frac{R(n)}{\sqrt{M(N-1)}(1-R(n))}Y_{n,i}.$$

Ținînd seama că

$$\sum_{j=1}^{n}=\sum_{\substack{j=1\\ j\notin \mathfrak{M}_i}}^{n}+\sum_{j\in\mathfrak{M}_i},$$

putem scrie

$$G_i(\hat{\theta}-\theta^{0}_{n})=\frac{1}{I(1-R(n))}\left(\frac{1}{NM}-\frac{R(n)}{M(N-1)}\right)\sum_{\substack{j=1\\ j\notin \mathfrak{M}_i}}\frac{\partial \ln p_X(x_j,\theta)}{\partial\theta}+$$

$$(119)\qquad +\frac{1}{In(1-R(n))}\prod_{j\in\mathfrak{M}_i}\frac{\partial \ln p_X(x_j,\theta)}{\partial\theta}+$$

$$+\frac{Y_n}{\sqrt{n}(1-R(n))}-\frac{R(n)}{\sqrt{M(N-1)}(1-R(n))}Y_{n,i}.$$

Din (119) obținem (prin sumare după i)

$$G(\hat{\theta}^{0}_{n})-\theta=\frac{1}{In}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial \ln p_X(x_j,\theta)}{\partial\theta}+\frac{Y_n}{\sqrt{n}(1-R(n))}-$$

$$(120)\qquad -\frac{R(n)\,\overline{Y}_n}{\sqrt{M(N-1)}(1-R(n))},\qquad \overline{Y}_n=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{N}Y_{n,i}$$

Din (120) urmează că dacă N este fixat și $M\to\infty$, din teorema limită centrală urmează că $\sqrt{n}[G(\theta^{0}_{n})-\theta]\sim N(0,1/I)$.

Scanned with OKEN Scanner

Dacă $R(n) = (N-1)/N$ coeficientul primului termen din (119) este zero și deci pseudovalorile lui $\hat{\theta}$ sînt variabile normale independente $\sim N(0, N/I)$, ceea ce demonstrează teorema.

§13. Metoda minimului lui X^2

Cazul repartițiilor complet specificate se întîlnește numai rareori în aplicații. În cele mai multe cazuri, avem de-a face cu repartiții ce conțin un număr oarecare de parametrii necunoscuți singurele informații asupra valorilor acestora putînd fi obținute numai din selecție. Să presupunem că $F(x, \theta_1, \ldots, \theta_s)$ are forma funcțională cunoscută, însă valorile parametrilor $\theta_1, \ldots, \theta_s$ sînt necunoscute.

De asemenea să presupunem că selecția este împărțită în r grupe, corespunzător la r mulțimi disjuncte $S_1, S_2, \ldots, S_r$ și să notăm cu n_i frecvența mulțimii S_i (adică numărul de observații ce cad în S_i). Probabilitățile corespunzătoare sînt

$$p_i(\theta) = \int_{S_i} dF(x, \theta)$$

DEFINIȚIA 8. Se numește estimație după metoda minimului X^2 o estimație pentru care expresia

$$X_n^2 = \sum_1^r \frac{[n_i - np_i(\theta)]^2}{np_i(\theta)}$$

este minimă.

Estimațiile obținute prin această metodă sînt soluțiile sistemului de ecuații

$$-\frac{1}{2}\frac{\partial X_n^2}{\partial \theta_k} = \sum_1^r \left[\frac{n_i - np_i(\theta)}{p_i(\theta)} + \frac{(n_i - np_i(\theta))^2}{2np_i^2(\theta)}\right]\frac{\partial p_i(\theta)}{\partial \theta_k} = 0, \quad 1 \leqslant k \leqslant s$$

Chiar în cazurile simple, acest sistem se rezolvă cu greutate.

DEFINIȚIA 9. Se numește estimație după metoda modificată a minimului lui X^2, o estimație care este soluție a sistemului de ecuații.

$$\sum_1^r \frac{n_i - np_i(\theta)}{p_i(\theta)}\frac{\partial p_i(\theta)}{\partial \theta_k} = 0 \qquad 1 \leqslant k \leqslant s \tag{121}$$

Deoarece $\sum_1^r p_i(\theta) = 1$, (121) se reduce la sistemul echivalent

$$\sum_1^r \frac{n_i}{p_i(\theta)} \cdot \frac{\partial p_i(\theta)}{\partial \theta_k} = 0, \tag{121'}$$

sau același lucru

$$\frac{\partial}{\partial \theta_k} \ln \prod_1^r p_i^{n_i} = 0, 1 \leqslant k \leqslant s \tag{122}$$

Scanned with OKEN Scanner

TEOREMA 19. *Estimaţiile după metoda modificată a minimului* X^2 *sînt estimaţii de verosimilitate maximă pentru funcţia de verosimilitate* $P(\theta) = \prod_1^r p_i^{n_i}(\theta)$.

Demonstraţie. În cazul selecţiilor bernouliene de volum n, probabilitatea ca din cele n valori de selecţie $x_1, x_2, \ldots, x_n$, n_1 să aparţină mulţimii $S_1, \ldots, n_r$ mulţimii S_r este dată de formula

$$\frac{n!}{n_1!\, n_2! \ldots n_r!} \prod_1^r p_i^{n_i}$$

Prin urmare funcţia de verosimilitate este

$$P(\theta) = \prod_1^r p_i^{n_i}$$

şi sistemul (122) se scrie

$$\frac{\partial}{\partial \theta_k} \ln P(\theta) = 0, \qquad 1 \leqslant k \leqslant s$$

ceea ce demonstrează teorema.

TEOREMA 20. (Cramer (1946)). *Fie* A *un interval nedegenerat din spaţiul* s*-dimensional al parametrilor* $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s$ *şi* $p_1, p_2, \ldots, p_r$, $r > s$ *funcţii definite pe* A *cu valori reale care satisfac condiţiile* :

1) $p_i(\theta) > c^2 > 1$, $1 \leqslant i \leqslant r$ şi $\sum_1^r p_i(\theta) = 1$

2) *pentru fiecare* p_i *există derivatele* $\frac{\partial p_i}{\partial \theta_j}$, $\frac{\partial^2 p}{\partial \theta_j \partial \theta_k}$ *şi sînt continue* ;

3) *matricea* $\mathbf{D} = \left(\frac{\partial p_i}{\partial \theta_j}\right)$, *unde* $1 \leqslant i \leqslant r$, $1 \leqslant j \leqslant s$ *este de rang* s,

4) *există un punct* θ^0 *în aşa fel încît* $p_i^0 = p_i(\theta^0)$, *atunci sistemul de ecuaţii* (121) *are o soluţie unică* $\hat{\theta}_n$, *care converge în probabilitatea către* θ^0, *cînd* $n \to \infty$, *iar şirul de variabile aleatoare* X_n^2 *tinde în repartiţie către o variabilă aleatoare repartizată* $\chi^2(r - s - 1)$.

Probleme

1. Fie $X_1, X_2, \ldots, X_n$ o selecţie asupra unei variabile aleatoare X cu densitatea de repartiţie

$$(123) \qquad \frac{1}{\beta}\left[\exp\left\{-\frac{x-\alpha}{\beta}\right\}\right]\left[1 + \exp\left\{-\frac{x-\alpha}{\beta}\right\}\right]^{-2} = \frac{1}{4\beta}\operatorname{sech}^2\left\{\frac{1}{2}\frac{x-\alpha}{\beta}\right\}$$

a) Să se arate că

$$\mu = M(X) = \alpha, \quad \sigma^2 = D^2(X) = \pi^2\beta^2/3$$

şi să se exprime (123) în funcţie de μ şi σ^2.

Scanned with OKEN Scanner

b) Să se determine estimaţiile de maximă verosimilitate pentru μ şi σ^2 şi să se arate că

$$nD^2(\hat{\mu}) = \frac{9}{\pi^2}\sigma^2, \quad nD^2(\hat{\sigma}) = \frac{9}{3+\pi^2}\sigma^2$$

2. Fie $X_1,\ldots,X_n$ o selecţie asupra unei variabile aleatoare X cu densitatea de repartiţie $\theta_1 e^{-\theta_1 x}$ $(x>0)$, şi $Y_1,\ldots,Y_n$ o selecţie asupra unei variabile aleatoare Y cu densitatea de repartiţie $\theta_2 e^{-\theta_2 y}$ $(y>0)$.

a) X şi Y fiind independente să se găsească estimatorii de maximă verosimilitate pentru parametrii θ_1 şi θ_2.

b) Să se găsească estimatorii de maximă verosimilitate, supuşi la condiţia $\theta_1 = \theta_2$.

3. Să se arate că estimatorul $\hat{\theta}$ de maximă verosimilitate a parametrului θ din funcţia de frecvenţă (VIII. 28) satisface ecuaţia

$$\frac{1}{\hat{\theta}}\sum_1^n X_j - \frac{nf'(\hat{\theta})}{f(\hat{\theta})} = 0$$

4. Fie $X_1, X_2, \ldots, X_n$ variabile aleatoare independente X_j având o repartiţie $Bi(N_j, p)$, $j = 1, 2, \ldots, n$.

Să se arate că

a) $\hat{p} = \left(\sum_1^n X_j\right) \Big/ \left(\sum_1^n N_j\right)$ este estimatorul de maximă verosimilitate al parametrului p.

b) $\hat{p}$ este un estimator nedeplasat de minimă dispersie pentru p.

5. Fie $X_1,\ldots X_2,\ldots, X_n$ o selecţie asupra unei variabile aleatoare X repartizate $Bi(N, p)$ cu N şi p necunoscuţi.

Să se arate că

$$\text{a)}\quad \tilde{p} = 1 - \frac{s^2}{\overline{X}}$$

şi

$$\tilde{N} = \frac{\overline{X}}{\tilde{p}} = \frac{\overline{X}^2}{\overline{X} - s^2}$$

unde $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_1^n X_j$, $s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_1^n (X_j - \overline{X})^2$

sînt estimatorii parametrilor p şi N obţinuţi prin metoda momentelor.

b) estimatorii de maximă verosimilitate $\hat{N}$ şi $\hat{p}$ ai parametrilor $\hat{N}$ şi $\hat{p}$ satisfac ecuaţiile

$$\hat{N}\hat{p} = \overline{X}$$

$$\sum_0^{R-1} \frac{1}{\hat{N}-j} f_j = -n \ln\left(1 - \frac{\overline{X}}{\hat{N}}\right),$$

unde f_j = numărul X-lor ce depăşesc pe j şi

$R = \max(X_1, \ldots, X_n)$

c) eficienţa asimptotică a estimatorului $\tilde{N}$ relativă la estimatorul $\hat{N}$ este

$$\left\{1 + 2\sum_1^{N-1}\left(\frac{p}{q}\right)^j \frac{j!}{(j+1)(n-2)^{(j-1)}}\right\}^{-1}$$ Fisher (1941)

Scanned with OKEN Scanner

6. Fie X o variabilă aleatoare avînd o repartiţie binomială dublu trunchiată cu funcţia de frecvenţă

$$P(X=k)=\frac{C_N^k p^k q^{N-k}}{\sum_{r_1}^{N-r_2} C_N^j p^j q^{N-j}} \qquad (k=r_1,\ldots,N-r_2) \tag{124}$$

Să se arate că

a) $\mu_1'=U-V+Np$

$\mu_2'=r_1U-(N-r_2+1).V+\mu_1'(N-1)p+Np$

$\mu_3'=r_1^2U-(N-r_2+1)^2V+\mu_2'(N-2)p+\mu_1'(2N-1)p+Np,$

unde

$$U=r_1qC_N^{r_1}p^{r_1}q^{N-r_1}\left[\sum_{r_1}^{N-r_2}C_N^j p^j q^{N-j}\right]^{-1}$$

şi

$$V=(N-r_2+1)qC_N^{N-r_2+1}p^{N-r_2+1}q^{r_2-1}\left[\sum_{r_1}^{N-r_2}C_N^j p^j q^{N-j}\right]^{-1}$$

b) Estimatorul parametrului p, $\tilde{p}$ prin metoda momentelor este

$$\tilde{p}=\frac{m_3'-(r_1+N-r_2+1)m_2'+r_1(N-r_2+1)m_1'}{(N-2)m_2'+[(N-1)(r_2-r_1)-N(N-2)]m_1'+N(N-r_2)(r_1-1)}$$

unde $m_j'=\frac{1}{n}\sum_1^n X_i^j$, $j=1,2,3.$

Shah (1966).

c) eficienţa asimptotică a estimatorului $\tilde{p}$ relativă la estimatorul $\hat{p}$ pentru parametrul p este

92,1% (pentru $p=0{,}1$ sau $0{,}9$); 93,5% (pentru $p=0{,}5$).

7. Fie X o variabilă aleatoare, avînd o repartiţie binomială pozitivă cu funcţia de frecvenţă

$$P(X=k)=\frac{C_N^k p^k q^{N-k}}{1-q^N} \qquad (k=1,2,\ldots,N) \tag{125}$$

Să se arate că

a) $D^2(X)=Nqp(1-q^N)^{-1}-N^2p^2q^N(1-q^N)^{-2}$

b) $M\left(\frac{1}{X}\right)\simeq(Np-q)^{-1}$ (Grab, Savage (1954))

c) $M\left(\frac{1}{X}\right)\simeq(1-2N^{-1})(Np-q)^{-1}$

$$D^2\left(\frac{1}{X}\right)\simeq(1-2N^{-1})(1-N^{-1})q(Np-q)^{-2}(Np-q-1)^{-1}$$

Mendenhall, Lehman (1960)

Scanned with OKEN Scanner

d) Estimatorul de maximă verosimilitate $\hat{p}$ al parametrului p bazat pe o selecție $X_1,\ldots,X_n$ asupra variabilei aleatoare X de funcție de frecvență (125) satisface ecuația

$$\overline{X}_n = N\hat{p}(1-\hat{q}^N)^{-1}, \quad \text{unde } \hat{q} = 1-\hat{p}.$$

e) $\tilde{p} = (\overline{X}_n - f_1)/(N - f_1)$, (Mantel (1951))

unde $f_1 = \dfrac{1}{n}$ (numărul X_j egali cu 1),

este un estimator pentru p.

f) Pentru valori mari ale lui n

$$D^2(\hat{p}) = (Nn)^{-1}\, pq\,(1-q^N)^2\,(1-q^N-Npq^{N-1})^{-1}$$

$$D^2(\tilde{p}) = (Nn)^{-1}pq(1-q^N)\,(1-2q^{N-1}+Npq^{N-1}+q^N)\,(1-q^{N-1})^{-2}$$

8. Fie $X_1, X_2, \ldots, X_n$ o selecție asupra unei variabile aleatoare X repartizate $Po(\theta)$. Să se arate că

a) $\sum_1^n X_j$ este o statistică suficient completă pentru θ

b) $\hat{\theta} = \dfrac{1}{n}\sum_1^n X_j$ este estimatorul de maximă verosimilitate a parametrului θ.

c) $\exp(-\hat{\theta})$ este un estimator deplasat pentru $\exp(-\theta)$ și că

$$M[\exp(-\hat{\theta})] = \exp[-\theta(1-e^{-\frac{1}{n}})]$$

d) $T = \left(1-\dfrac{\hat{\theta}}{n}\right)^{n-1}$ este un estimator nedeplasat pentru $e^{-\theta}$ și că

$$D^2(T) = e^{-2\theta}\,(e^{\frac{\theta}{n}} - 1)$$

9. Fie X o variabilă aleatoare Poisson pozitivă cu funcția de frecvență

(126) $$P(X=k) = (e^{\theta} - 1)^{-1}\frac{\theta^k}{k!} \qquad k = 1, 2, \ldots$$

Să se arate că

a) $M[X(X-1)\ldots(X-r+1)] = (1-e^{-\theta})^{-1}\,\theta^r$

$M(X) = (1-e^{-\theta})^{-1}\,\theta$

$D^2(X) = (1-e^{-\theta})^{-1}\,[1-\theta e^{-\theta}(1-e^{-\theta})^{-1}]$

$M(X^{-1}) = e^{-\theta}\,(1-e^{-\theta-1}\sum_1^{\infty}\theta^j/[j!\,j]$

b) Estimatorul de maximă verosimilitate $\hat{\theta}$ al parametrului θ bazat pe o selecție de volum n: $X_1, X_2, \ldots, X_n$ satisface ecuația

$$\overline{X}_n = \hat{\theta}/(1-e^{-\hat{\theta}})\,*$$

---

* Se pot folosi tabelele lui David și Johnson (1952). Cohen (1960) dă o nomogramă pentru rezolvarea acestei ecuații

Scanned with OKEN Scanner

şi explicit (Irwin (1959))

$$\hat{\theta} = \bar{X}_n - \sum_1^{\infty} \frac{j^{j-1}}{j!} (\bar{X}_n e^{-\bar{X}_n})^j$$

c) $\hat{\theta}^* = n\bar{X}_n \, S^{(n)}_{n\bar{X}_n - 1} / S^{(n)}_{n\bar{X}_n} = \bar{X}_n \, (1 - S^{(n-1)}_{n\bar{X}_n - 1} / S^{(n)}_{n\bar{X}_n})$,

unde $S_a^{(b)}$ este numărul lui Stirling de speţa doua, este un estimator nedeplasat de minimă dispersie pentru θ.

Tate şi Goen (1958)

10. Repartiţia Poisson trunchiată la stînga, obţinută prin omiterea primelor r_1 valori $(0, 1, \ldots, (r_1 - 1))$, are funcţia de frecvenţă

$$P(X = k) = [e^{-\theta} \theta^k / k!] \left[1 - e^{-\theta} \sum_1^{r_1 - 1} \frac{\theta^j}{j!} \right]^{-1} \tag{127}$$

$$k = r_1, \; r_1 + 1, \ldots$$

Dacă $X_1, \ldots, X_n$ este o selecţie asupra variabilei X să se arate că estimatorul de maximă verosimilitate $\hat{\theta}_{(r_1, \emptyset)}$ al parametrului θ satisface ecuaţia

$$\bar{X} = \left[\hat{\theta}_{(r_1, \emptyset)} - e^{-\hat{\theta}_{(r\emptyset_1)}} \sum_1^{r-1} \{ \hat{\theta}^j_{(r_1, \emptyset)} / (j-1)! \} \right] \left[1 - e^{-\hat{\theta}_{(r_1, \emptyset)}} \sum_0^{r_1 - 1} \theta^j_{(r_1, \emptyset)} / j! \right]^{-1}$$

11. Repartiţia Poisson trunchiată la dreapta are funcţia de frecvenţe

$$P(X = k) = [\theta^k / k!] \left[\sum_0^{r_2} \frac{\theta^j}{j!} \right]^{-1} \qquad k = 0, 1, \ldots, r_2 \tag{128}$$

Dacă $X_1, X_2, \ldots, X_n$ este o selecţie asupra variabilei aleatoare X să se arate că estimatorul de maximă verosimilitate $\hat{\theta}_{(0, r_2)}$ pentru θ satisface ecuaţia

$$\sum_0^{r_2} (\bar{X} - j) \frac{\hat{\theta}^j_{(0, r_2)}}{j!} = 0 \; *$$

12. Fie $X_1, X_2, \ldots, X_n$ o selecţie asupra unei variabile aleatoare avînd o repartiţie Poisson dublu trunchiată de funcţia de frecvenţă

$$P(X = k) = [\theta^k / k!] \Big/ \left[\sum_{r_1}^{r_2} \frac{\theta^j}{j!} \right] \tag{129}$$

$$j = r_1, \; r_1 + 1, \ldots, r_2; \; r_2 \geqslant r_1 \geqslant 0$$

Să se arate că estimatorul de maximă verosimilitate $\theta_{(r_1, r_2)}$ pentru θ satisface ecuaţia

$$\bar{X} = \left[\sum_{r_1}^{r_2} j \hat{\theta}^j_{(r, r_2)} / j! \right] \Big/ \left[\sum_{r_1}^{r_2} \hat{\theta}^j_{(r_1, r_2)} / j! \right] \tag{130}$$

---

* $\hat{\theta}_{(0, r_2)}$ este funcţie numai de $\bar{X}$ şi nu de n.
Cohen (1961) dă tabele din care se obţine $\theta_{(0, r_2)}$ pentru r_2 şi $\bar{X}$ dată.

Scanned with OKEN Scanner

13. Repartiţia Poisson generalizată are următoarea funcţie de frecvenţe

$$(131)\qquad \begin{cases} P(X=0) = e^{-\theta}(1+\theta\lambda) \\ P(X=1) = \theta e^{-\theta}(1-\lambda) \\ P(X=j) = \theta^j e^{-\theta}/j! \qquad j \geqslant 2 \end{cases}$$

Să se arate că

a) estimatorii de maximă verosimilitate pentru θ şi λ sînt

$$(132)\qquad \frac{1}{2}[\bar{X} - 1 + f_0 + \{(\bar{X} - 1 + f_0)^2 + 4(\bar{X} - f_1)\}^{1/2}]$$

şi respectiv

$$(133)\qquad (f_0 - f_1\ [\text{estimatorul lui } \theta]^{-1})(f_0 + f_1)^{-1},$$

unde $f_0(f_1)$ este proporţia valorilor egale cu zero (unu) observate.

Cohen (1960)

b) dispersiile asimptotice ale estimatorilor (132) şi (133) sînt

$$(134)\qquad \theta(1+\theta)(1+\theta-e^{-\theta})^{-1}n^{-1}$$

şi respectiv

$$(135)\qquad (1+\lambda\theta-\lambda e^{-\theta})(1-\lambda)(\theta e^{-\theta})^{-1}(1+\theta-e^{-\theta})^{-1}n^{-1}$$

c) corelaţia asimptotică dintre aceşti doi estimatori este

$$(136)\qquad [(1-\lambda)e^{-\theta}(1-\theta)^{-1}(1+\lambda\theta-\lambda e^{-\theta})^{-1}]^{1/2}$$

d) Estimatorii pentru θ şi λ bazaţi pe momentele de selecţie sînt

$$(137)\qquad (m_2' - m_1')^{1/2}$$

şi respectiv

$$(138)\qquad [1 - m_1'(m_2' - m_1')^{-\frac{1}{2}}]\ [\exp(m_2' - m_1')^{1/2}]$$

Shah şi Venkataraman (1962)

e) Dispersiile asimptotice ale estimatorilor (137) şi (138) sînt

$$(139)\qquad \left(\theta + \frac{1}{2}\right)n^{-1}$$

şi respectiv

$$(140)\qquad [A(\theta e^{-\theta})^2 + 4(B\theta)^3 + 2(B\theta)^2 - 2B\theta(\theta\lambda e^{-\theta} + 2)e^{\theta}\ ]n^{-1},$$

Scanned with OKEN Scanner

unde

$$(141)\qquad \begin{cases} A = \theta(2\lambda\theta e^{-\theta} + 1) - \lambda\theta e^{-\theta}(\lambda\theta e^{-\theta} + 1) \\ B = \dfrac{1}{2}\,[\lambda\theta^{-1} + (1 - \lambda e^{-\theta})e^{\theta}\ \theta^{-2}] \end{cases}$$

14. Fie X o variabilă aleatoare avînd o repartiţie binomială negativă cu parametrii N, P (cu funcţia de frecvenţe

$$(142)\qquad P(X = k) = C_{N+k-1}^{N-1}\left(\frac{P}{Q}\right)^k\left(1 - \frac{P}{Q}\right)^N \qquad \begin{matrix} k = 0,1,2,\ldots \\ Q - P = 1,\ P > 0 \end{matrix}\Bigg)$$

Să se arate că

a) Funcţia generatoare de momente a variabilei X este

$$(Q - Pe^t)^{-N}$$

b) $M(X) = NP$, $D^2(X) = NPQ = NP(1 + P)$

$$\beta_1(X) = \frac{(Q + P)^2}{(NPQ)^{1/2}}, \qquad \beta_2(X) = 3 + \frac{1 + 6PQ}{NPQ}$$

c) $\mathcal{K}_{r+1} = PQ\dfrac{\partial \mathcal{K}_r}{\partial Q} \qquad (r \geqslant 1)$

$X_1, X_2, \ldots, X_n$ fiind o selecţie asupra variabilei aleatoare X cu funcţia de frecvenţe (142) să se arate că

d) $\tilde{P} = \dfrac{s^2}{\overline{X}_n} - 1$ şi $\hat{N} = \overline{X}_n^2/(s^2 - \overline{X}_n^2)$

sînt estimatorii parametrilor N şi P obţinuţi prin metoda momentelor.

e) estimatorii de maximă verosimilitate ai parametrilor N şi P satisfac ecuaţiile

$$\hat{N}\hat{P} = \overline{X}_n,\ \ln(1 + \hat{P}) = \sum_1^{\infty}(\hat{N} + j - 1)^{-1} F_j,$$

unde $F_j = \sum_j^{\infty} f_i$ = proporţia X-lor care sînt $\geqslant j$.

15. Fie X o variabilă aleatoare avînd o repartiţie binomială negativă trunchiată cu funcţia de frecvenţe

$$(143)\qquad P(X = k) = \frac{1}{1 - Q^{-N}}\,C_{N+k-1}^{N-1}\left(\frac{P}{Q}\right)^k\left(1 - \frac{P}{Q}\right)^N, \qquad k = 1,2,\ldots$$

Să se arate că

a) $M(X) = NP(1 - Q^{-N})^{-1}$

b) $M(X^2) = [NPQ + (NP)^2](1 - Q^{-N})^{-1}$

b) $M(X^{-1}) \simeq (NP - Q)^{-1}$

$D^2(X^{-1}) \simeq Q(NP - Q)^{-2}(NP - 2Q)^{-1}$

Goviudarajulu (1962)

Scanned with OKEN Scanner

16. Fie X o variabilă aleatoare cu funcţia de frecvenţe

(144) $$P(X = k) = \alpha\theta^k/k! \qquad (k = 1,2,\ldots, 0 < \theta < 1)$$

unde $\alpha = -[\ln(1-\theta)]^{-1}$

Să se arate că

a) $\mu_1' = \alpha\theta(1-\theta)^{-1}$, $\mu_2' = \alpha\theta(1-\theta)^{-2}$

$$\mu_3' = \alpha\theta(1+\theta)(1-\theta)^{-3}$$

$$\mu_4' = \alpha\theta(1+4\theta+\theta^2)(1-\theta)^{-4}$$

b) $\lim_{\theta\to 0} \frac{\beta_2}{\beta_1} = 1$; $\lim_{\theta\to 1} \frac{\beta_2}{\beta_1} = \frac{3}{2}$

c) $\mu_{r+1}' = \theta \frac{d\mu_r'}{d\theta} + \frac{\alpha\theta}{1-\theta}\mu_r'$,

$$\mu_{r+1} = \theta \frac{d\mu_r}{d\theta} + r\mu_2\mu_{r-1}$$

$$\mathcal{K}_r = \theta \frac{d\mathcal{K}_{r-1}}{d\theta}$$ Khatri (1959)

$$\mathcal{K}_{(r)} = \theta \frac{d\mathcal{K}_{(r-1)}}{d\theta} - (r-1)\mathcal{K}_{(r-1)}$$

17. Fie $X_1, X_2, \ldots, X_n$ o selecţie asupra unei variabile aleatoare X de funcţie de frecvenţă (144)

Să se arate că

a) Estimatorul de maximă verosimilitate al parametrului θ, $\hat{\theta}$ satisface ecuaţia

$$\overline{X} = \frac{\hat{\theta}}{-(1-\hat{\theta})\ln(1-\hat{\theta})}$$

Williamson şi Bretherton (1964) dau tabele ce pot fi folosite pentru obţinerea lui $\hat{\theta}$ dată fiind $\overline{X}$.

Patil şi Wani (1963) dă $\hat{\theta}$ cu patru zecimale pentru $\overline{X} = 1{,}02\ (0{,}02)\ 2{,}00\ (0{,}05)\ 4{,}00\ (0{,}1)\ 8{,}0\ (0{,}2)\ 16{,}0\ (0{,}5)$.

b) Estimatorii

(145) $$1 - (\text{proporţia } X\text{-lor egali cu } 1)/\overline{X}$$

şi

(146) $$1 - \left(\frac{1}{n}\sum_1^n X_j^2\right)\Big/\overline{X}$$

sînt asimptotic nedeplasaţi.

c) Estimatorul

$$\sum_2^\infty \{j/(j-1)\}\ (\text{proporţia } X\text{-lor egali cu } j)$$

Scanned with OKEN Scanner

este nedeplasat pentru toate volumele de selecţie şi are dispersia

$$\frac{1}{n}\left[\sum_{2}^{\infty}\{j/(j-1)\}^2 P(X=j) - \theta^2\right]$$

d) Estimatorul

$$\theta^* = b\left(\sum_{1}^{n} X_j - 1\right)\Big/ b\left(\sum_{1}^{n} X_j\right) \quad \text{dacă} \quad \sum_{1}^{n} X_j > n$$

$$= \qquad 0 \qquad\qquad\qquad \text{dacă} \quad \sum_{1}^{n} X_j = n,$$

unde $b(m)$ este coeficientul lui θ^m în

$$[-\ln(1-\theta)]^n$$

este nedeplasat şi de dispersie minimă pentru θ.

e) Eficienţa estimatorului de la punctul c) relativă la estimatorul de maximă verosimilitate este 89,5% ($\theta = 0{,}1$); 44,7% ($\theta = 0{,}5$) şi 5,7% ($\theta = 0{,}9$).

18. Fie $X_1, X_2, \ldots, X_n$ o selecţie asupra unei variabile X având o repartiţie logaritmică trunchiată cu funcţia de frecvenţă

147) $$P(X=k) = \frac{\theta^k}{k}\left[\sum_{1}^{r}\frac{\theta^j}{j}\right]^{-1} \qquad k = 1, 2, \ldots, r$$

Să se arate că

a) Estimatorul de maximă verosimilitate al parametrului θ, $\hat{\theta}$ satisface ecuaţia

$$\overline{X} = \frac{\hat{\theta}(1-\hat{\theta}^r)}{(1-\hat{\theta})\left[\sum_{1}^{r}(\theta^j/j)\right]}$$

b) Estimatorul parametrului θ prin metoda momentelor este

$$\frac{m_3' - (r+2)m_r + (r+1)m_1'}{m_3' - rm_2'}$$

19. Să se arate că repartiţia (Neyman de tipul A) rezultată din

(148) $$Po(\theta) \underset{\overline{\theta}}{\wedge} Po(\lambda)$$

are a) funcţia de frecvenţe

(149) $$P_k(\lambda, \emptyset) = P(X=k) = \sum_{1}^{\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^j}{j!}e^{-j\emptyset}\,[(j\emptyset)^k/k!] \qquad (k>0)$$

(150) $$P_0(\lambda, \emptyset) = P(X=0) = e^{-\lambda} + \sum_{1}^{\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^j}{j!}e^{-j\emptyset} = \exp[-\lambda(1-e^{-\emptyset})].$$

Scanned with OKEN Scanner

b) funcţia generatoare de probabilităţi

(151) $$\exp\left[-\lambda\{1-e^{-\mathcal{O}(1-t)}\}\right]$$

Să se arate că

a) $$P(X=k)=(\lambda\mathcal{O}/k)\,e^{-\lambda}\sum_{0}^{k-1}\frac{\lambda^j}{j!}P(X=k-j-1)$$

Beall (1940)

b) $$M(X)=\lambda\,\mathcal{O}$$

$$D^2(X)=\lambda\,\mathcal{O}\,(1+\mathcal{O})$$

$$\mu_3(X)=\lambda\,\mathcal{O}\,(1+3\,\mathcal{O}+\mathcal{O}^2)$$

$$\mu_4(X)=3\,\lambda^2\mathcal{O}^2(1+\mathcal{O})^2+\lambda\mathcal{O}(1+7\mathcal{O}+6\mathcal{O}^2+\mathcal{O}^3)$$

c) $$\mathcal{K}_{r+1}=\mathcal{O}\left\{\sum_{0}^{r-1}C_r^j\mathcal{K}_{r-j}+\lambda\right\}$$

$$\mathcal{K}_{r+1}=\mathcal{O}\left(\mathcal{K}_r+\frac{\partial\mathcal{K}_r}{\partial\lambda}\right)$$

Shenton (1949)

20. Fie $X_1, X_2, \cdots, X_n$ o selecţie asupra unei variabile aleatoare X de funcţie de frecvenţă (149) — (150)

Să se arate că

a) Estimatorii de maximă verosimilitate $\hat{\lambda}$ şi $\hat{\mathcal{O}}$ ai parametrilor λ şi $\mathcal{O}$ satisfac ecuaţiile

$$\overline{X}=\hat{\lambda}\hat{\mathcal{O}}$$

$$\cdots$$

$$\sum_{1}^{n}(X_i+1)\frac{P_{X_i+1}(\hat{\lambda},\hat{\mathcal{O}})}{P_{X_i}(\hat{\lambda},\hat{\mathcal{O}})}=n\overline{X}$$

b) Estimatorii obţinuţi prin metoda momentelor $\tilde{\lambda}$, $\tilde{\mathcal{O}}$ ai parametrilor λ şi $\mathcal{O}$ sînt

$$\tilde{\lambda}=\overline{X}/\tilde{\mathcal{O}}$$

$$\tilde{\mathcal{O}}=(s^2-\overline{X})/\overline{X}\qquad s^2=\frac{1}{n-1}\sum_{1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$$

21. $(n_1, n_2, \ldots, n_k)$ urmează o repartiţie binomială negativă k-dimensională cu parametrii N, P_1, $P_2, \ldots, P_k$ de funcţie de repartiţie

(152) $$P(n_1,n_2,\cdots,n_k)=\frac{\Gamma\left(N+\sum_{1}^{k}n_i\right)}{\left(\prod_{1}^{k}n_i!\right)\Gamma(N)}\,Q^{-N}\prod_{1}^{k}\left(\frac{P_i}{Q}\right)^{n_i}\qquad(n_i\geqslant 0)$$

unde $Q=1+\sum_{1}^{k}P_j$

Scanned with OKEN Scanner

Să se arate că

a) $P(\{n_j\}\,(j \neq a_1, \ldots, a_s) \mid n_{a_1}, \ldots, n_{a_s}) =$

$$= \frac{\Gamma\left(N + \sum_{i=1}^{s} n_{a_i} + \sum_{j \neq a_i} n_j\right)}{\Gamma\left(N + \sum_{i=1}^{s} n_{a_i}\right) \prod_{j \neq a_i} n_j!} \left(\frac{Q}{Q'}\right)^{-\left(N + \sum_{i=1}^{s} n_{a_i}\right)} \prod_{j \neq a_i} [(P_j/Q')(Q/Q')^{-1}]^{n_j}$$

unde $Q' = Q - \sum_{j \neq a_i} P_j = 1 + \sum_{i=1}^{s} P_{a_i}$

b) $M[n_j(j \neq a_1, a_2, \ldots, a_s) \mid n_{a_1}, \ldots, n_{a_s}] =$

$$= \left(N + \sum_{i=1}^{s} n_{a_i}\right)(P_j/Q')$$

c) $n_1, n_2, \ldots, n_k$ fiind o mulțime de valori observate să se arate că estimatorii de maximă verosimilitate satisfac ecuațiile

$$n_j/\hat{P}_j = \left(\hat{N} + \sum_{1}^{k} n_j\right) \Big/ \left(1 + \sum_{1}^{k} \hat{P}_j\right)$$

$$\sum_{0}^{s-1} (\hat{N} + j)^{-1} = \ln\left(1 + \sum_{1}^{k} \hat{P}_j\right),$$

unde $S = \sum_{1}^{k} n_j$.

d) date m mulțimi

$$\{n_{1t}, n_{2t}, \ldots, n_{kt}\} \qquad (t = 1, 2, \ldots, m)$$

să se arate că estimatorii de maximă verosimilitate satisfac ecuațiile

$$n_j/\hat{P}_j = \left(m\hat{N} + \sum_{1}^{m} S_t\right) \Big/ \left(1 + \sum_{1}^{k} \hat{P}_j\right)$$

$$\sum_{t=1}^{m} \sum_{j=0}^{s_t - 1} (\hat{N} + j)^{-1} = m \ln\left(1 + \sum_{1}^{k} \hat{P}_j\right),$$

unde

$$S_t = \sum_{1}^{k} n_{jt}; \qquad n_j = \sum_{1}^{m} n_{jt}$$

Scanned with OKEN Scanner

Capitolul X

METODA CELOR MAI MICI PATRATE

§1. Introducere

Adrien Marie Legendre (1805) publică pentru întiia oară elemente ale acestei teorii, atunci cînd calculează orbitele cometelor. Gauss (1809) dă primele baze probabilistice ale acestei metode, elaborează metodele de calcul şi introduce notaţiile folosite şi astăzi, iar în 1823 aduce o serie de rezultate importante privind această metodă. Datorită lucrărilor lui Markov, metoda celor mai mici patrate face parte din statistica matematică şi este considerată ca un aspect natural al teoriei estimării parametrilor. Rezultate importante se datoresc lui Neyman, J. şi David, F.

§ 2. Metoda celor mai mici patrate în modelul liniar

Considerăm modelul

(1) $$\mathbf{y} = \mathbf{X}\theta + \varepsilon,$$

unde

$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ este vectorul observaţiilor,

$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{n1} & \cdots & x_{nk} \end{pmatrix}$ este o matrice cu coeficienţi cunoscuţi, a cărui rang este $k\,(n > k)$,

$\theta = \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \vdots \\ \theta_k \end{pmatrix}$ este vectorul parametrilor,

$\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{pmatrix}$ este vectorul aleator al erorilor.

Scanned with OKEN Scanner

2.1. Măsurători de precizii egale

Vom lucra în următoarele ipoteze

(2) $$M(\varepsilon) = \mathbf{0}$$

şi

(3) $$\mathcal{C}(\varepsilon) = M(\varepsilon\varepsilon') = \sigma^2 \mathbf{I}$$

unde $\mathbf{I}$ este matricea unitate de ordin $n \times n$. Astfel spus ε_i sînt variabile aleatoare necorelate, de medie zero şi dispersie σ^2.

Metoda celor mai mici pătrate cere să facem minimă suma pătratelor:

(4) $$S = (\mathbf{y} - \mathbf{X\theta})' (\mathbf{y} - \mathbf{X\theta}),$$

în raport cu componentele vectorului $\boldsymbol{\theta}$. O condiţie necesară pentru ca (4) să fie minimă este ca

(5) $$\frac{\partial S}{\partial \theta} = 0.$$

Derivînd obţinem

(6) $$2\mathbf{X}'(\mathbf{y} - \mathbf{X\theta}) = 0 \text{ (ecuaţiile normale)}$$

care dă ca estimator de cel mai mic patrat pentru $\boldsymbol{\theta}$

(7) $$\hat{\boldsymbol{\theta}} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{y}$$

dacă presupunem că matricea $\mathbf{X}'\mathbf{X}$ se poate inversa.

Rămîne să arătăm că într-adevăr $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ este valoarea parametrului $\boldsymbol{\theta}$ care face minimă pe S deoarece (5) este necesară, însă nu suficientă.

Avem :

$$(\mathbf{y} - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\theta}})'(\mathbf{y} - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\theta}}) = \mathbf{y}'\mathbf{y} - \mathbf{y}'\mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\theta}} - \hat{\boldsymbol{\theta}}'\mathbf{X}'\mathbf{y} + \hat{\boldsymbol{\theta}}'\mathbf{X}'\mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\theta}} =$$

$$= \mathbf{y}'\mathbf{y} - (\mathbf{X}'\mathbf{y})'\hat{\boldsymbol{\theta}} - \hat{\boldsymbol{\theta}}'(\mathbf{X}'\mathbf{y}) + \hat{\boldsymbol{\theta}}'\mathbf{X}'\mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\theta}},$$

şi cum $\mathbf{X}'\mathbf{y} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})\hat{\boldsymbol{\theta}}$ urmează că

$$(\mathbf{y} - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\theta}})'(\mathbf{y} - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\theta}}) = \mathbf{y}'\mathbf{y} - (\mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\theta}})'\mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\theta}},$$

de unde

(8) $$\mathbf{y}'\mathbf{y} = (\mathbf{y} - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\theta}})'(\mathbf{y} - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\theta}}) + (\mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\theta}})'(\mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\theta}})$$

Scanned with OKEN Scanner

Geometric, vectorul $\mathbf{y}$ aparţine unui spaţiu n-dimensional în timp ce vectorul $\mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\theta}}$ unui subspaţiu k-dimensional reprezentat printr-un plan

$$(8) \Rightarrow (\mathbf{y} - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\theta}}) \perp \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\theta}}$$

Rămîne să arătăm că

$$(7) \Rightarrow S = \min$$

Avem

$$\frac{\partial S}{\partial \boldsymbol{\theta}} = -2\mathbf{X}'\mathbf{y} + 2\mathbf{X}'\mathbf{X}\boldsymbol{\theta}$$

$$\frac{\partial^2 S}{\partial \boldsymbol{\theta}^2} = 2\mathbf{X}'\mathbf{X}$$

şi cum forma pătratică $\mathbf{U}'(\mathbf{X}'\mathbf{X})\,\mathbf{U}$ este pozitiv definită oricare ar fi $\mathbf{U}$, deoarece $\mathbf{X}'\mathbf{X}$ este un determinant Gram, toţi minorii elementelor de pe diagonala principală sînt pozitivi.

Urmează că $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ realizează minimul.

TEOREMA 1. *Estimatorul $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ obţinut prin metoda celor mai mici patrate este un estimator nedeplasat pentru $\boldsymbol{\theta}$ şi* $\mathcal{C}(\hat{\boldsymbol{\theta}}) = \sigma^2(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}$

Demonstraţie. Avem

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'(\mathbf{X}\boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{\varepsilon}) = \boldsymbol{\theta} + (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\boldsymbol{\varepsilon} \tag{9}$$

şi cum $\mathbf{X}$ este o constantă din (2) obţinem

$$M(\hat{\boldsymbol{\theta}}) = \boldsymbol{\theta} \tag{10}$$

Matricea de covarianţe a estimatorului $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ este

$$\mathcal{C}(\hat{\boldsymbol{\theta}}) = M\{(\hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta})(\hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta})'\}$$

şi ţinînd seama de (9)

$$\begin{aligned}\mathcal{C}(\hat{\boldsymbol{\theta}}) &= M\{[(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\boldsymbol{\varepsilon}]\,[(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\boldsymbol{\varepsilon}]'\} = \\ &= (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\,M(\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\varepsilon}')\,\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\end{aligned} \tag{11}$$

Cu ajutorul relaţiei (3), (11) devine

$$\mathcal{C}(\hat{\boldsymbol{\theta}}) = \sigma^2(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} \tag{12}$$

ceea ce demonstrează teorema.

Scanned with OKEN Scanner

Exemplul 1. În cazul în care θ este un vector (1×1), adică un singur parametru, (1) se scrie

$$\mathbf{y} = \mathbf{x}\theta + \boldsymbol{\varepsilon}$$

unde $\mathbf{x}$ este un vector $n \times 1$.

Din (7) obținem estimatorul de cel mai mic patrat

$$\hat{\theta} = (\mathbf{x}'\mathbf{x})^{-1}\mathbf{x}'\mathbf{y} = \sum_1^n x_j y_j \Big/ \sum_1^n x_j^2$$

a cărui dispersie, după (12), este

$$D^2(\hat{\theta}) = \sigma^2 \Big/ \sum_1^n x_j^2$$

Exemplul 2. Dacă $\boldsymbol{\theta}' = (\theta_1, \theta_2)$, atunci $\mathbf{X}$ constă din doi vectori $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$ și (1) se scrie

$$\mathbf{y} = (\mathbf{x}_1\, \mathbf{x}_2)\begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix} + \boldsymbol{\varepsilon}.$$

Din (7) obținem estimatorul de cel mai mic pătrat

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1'\mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_1'\mathbf{x}_2 \\ \mathbf{x}_2'\mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_2'\mathbf{x}_2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1'\mathbf{y} \\ \mathbf{x}_2'\mathbf{y} \end{pmatrix} =$$

(13)

$$= \begin{pmatrix} \Sigma x_{1j}^2 & \Sigma x_{1j}\, x_{2j} \\ \Sigma x_{1j}\, x_{2j} & \Sigma x_{2j}^2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \Sigma x_{1j}\, y_j \\ \Sigma x_{2j}\, y_i \end{pmatrix};$$

Deoarece

$$\begin{pmatrix} \Sigma x_{1j}^2 & \Sigma x_{1j}\, x_{2j} \\ \Sigma x_{1j}\, x_{2j} & \Sigma x_{2j}^2 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\Sigma x_{1j}^2\, \Sigma x_{2j}^2 - (\Sigma x_{1j}\, x_{2j})^2} \begin{pmatrix} \Sigma x_{2j}^2 & -\Sigma x_{1j}\, x_{2j} \\ -\Sigma x_{1j}\, x_{2j} & \Sigma x_{1j}^2 \end{pmatrix},$$

din (12) obținem

(14)

$$\begin{cases} D^2(\hat{\theta}_1) = \dfrac{\sigma^2\, \Sigma x_{2j}^2}{\Sigma x_{1j}^2\, \Sigma x_{2j}^2 - (\Sigma x_{1j}\, x_{2j})^2}; \\ D^2(\hat{\theta}_2) = \dfrac{\sigma^2\, \Sigma x_{1j}^2}{\Sigma x_{1j}^2\, \Sigma x_{2j}^2 - (\Sigma x_{1j}\, x_{2j})^2}; \\ \operatorname{cov}(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2) = \dfrac{-\sigma^2\, \Sigma x_{1j}\, x_{2j}}{\Sigma x_{1j}^2\, \Sigma x_{2j}^2 - (\Sigma x_{1j}\, x_{2j})^2} \end{cases}$$

Scanned with OKEN Scanner

În cazul în care $\mathbf{x}_1$ este vectorul unitate, (13) devine

$$\hat{\theta} = \begin{pmatrix} n & \Sigma x_{2j} \\ \Sigma x_{2j} & \Sigma x_{2j}^2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \Sigma y_j \\ \Sigma x_{2j} y_j \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{n\Sigma x_{2j}^2 - (\Sigma x_{2j})^2} \begin{pmatrix} \Sigma x_{2j}^2 & -\Sigma x_{2j} \\ -\Sigma x_{2j} & n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Sigma y_j \\ \Sigma x_{2j} y_j \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{n\Sigma x_{2j}^2 - (\Sigma x_{2j})^2} \begin{pmatrix} \Sigma x_{2j}^2 \Sigma y_j - \Sigma x_{2j} \Sigma x_{2j} y_j \\ -\Sigma x_{2j} \Sigma y_j + n\Sigma x_{2j} y_j \end{pmatrix}$$

Urmează că

$$\hat{\theta}_1 = \frac{\Sigma x_{2j}^2 \Sigma y_j - \Sigma x_{2j} \Sigma x_{2j} y_j}{n\Sigma x_{2j}^2 - (\Sigma x_{2j})^2}$$

$$\hat{\theta}_2 = \frac{n\Sigma x_{2j} y_j - \Sigma x_{2j} \Sigma y_j}{n\Sigma x_{2j}^2 - (\Sigma x_{2j})^2} = \frac{\frac{1}{n}\Sigma x_{2j} y_j - \frac{1}{n}\Sigma x_{2j} \frac{1}{n}\Sigma y_j}{\frac{1}{n}\Sigma x_{2j}^2 - \left(\frac{1}{n}\Sigma x_{2j}\right)^2} =$$

$$= \frac{\Sigma (x_{2j} - \bar{x}_2)(y_j - \bar{y})}{\Sigma (x_{2j} - \bar{x}_2)^2},$$

de unde

$$\hat{\theta}_1 = \bar{y} - \hat{\theta}_2 \bar{x}_2$$

(14) devin

$$(14') \qquad \begin{cases} D^2(\hat{\theta}_1) = \dfrac{\sigma^2 \Sigma x_{2j}^2}{\Sigma x_{2j}^2 - (\Sigma x_{2j})^2} \\ D^2(\hat{\theta}_2) = \dfrac{\sigma^2}{\Sigma x_{2j}^2 - (\Sigma x_{2j})^2} \\ \operatorname{cov}(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2) = \dfrac{-\sigma^2 \Sigma x_{2j}}{\Sigma x_{2j}^2 - (\Sigma x_{2j})^2} \end{cases}$$

TEOREMA 2. *Statistica*

$$(15) \qquad \hat{\sigma}^2 = \frac{(\mathbf{y} - \mathbf{X}\hat{\theta})'(\mathbf{y} - \mathbf{X}\hat{\theta})}{n - k}$$

este un estimator nedeplasat al parametrului σ^2.

Scanned with OKEN Scanner

Demonstrație. Din (1) și (7) obținem

$$\mathbf{y} - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{X}\boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'(\mathbf{X}\boldsymbol{\theta}+\boldsymbol{\varepsilon}) =$$

$$= \boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\boldsymbol{\varepsilon},$$

sau punînd

(16) $$\mathbf{L} = \mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}', \quad \mathbf{K} = \mathbf{I}_n - \mathbf{L},$$

unde $\mathbf{I}_n$ este matricea unitate de ordin $n \times n$,

$$\mathbf{y} - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{K}\boldsymbol{\varepsilon}.$$

Deoarece

$$\mathbf{K}' = \mathbf{I}_n - \mathbf{L}',$$

$$[(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}]' = [(\mathbf{X}'\mathbf{X})']^{-1} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1},$$

și

$$\mathbf{L} = \mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}' = \mathbf{L}'$$

urmează că

$$\mathbf{K}' = \mathbf{I} - \mathbf{L} = \mathbf{K},$$

ceea ce arată că matricea $\mathbf{K}$ este simetrică.

Cum

$$\mathbf{L}^2 = \mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}' = \mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}' = \mathbf{L},$$

urmează că

$$\mathbf{K}^2 = (\mathbf{I} - \mathbf{L})^2 = \mathbf{K},$$

ceea ce arată că matricea $\mathbf{K}$ este idempotentă.

Putem scrie

(17) $$(\mathbf{y} - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\theta}})'(\mathbf{y} - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\theta}}) = \boldsymbol{\varepsilon}'\mathbf{K}\boldsymbol{\varepsilon} = \Sigma k_{ii}\,\varepsilon_i^2 + \sum_{i \neq j} k_{ij}\,\varepsilon_i\,\varepsilon_j$$

$$\text{Ur. } \mathbf{L} = \text{Ur. } (\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}') = \text{Ur}\,(\mathbf{X}'\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1})] = \text{Ur}\,\mathbf{I}_k,$$

$\mathbf{I}_k$ fiind matricea unitate de ordin $(k \times k)$.

$$\text{Ur}\mathbf{K} = \text{Ur}\mathbf{I} - \text{Ur}\cdot\mathbf{L} = n - k$$

Avem

$$M\,[(\mathbf{y} - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\theta}})'(\mathbf{y} - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\theta}})] = \sigma^2\,\text{Ur}\cdot\mathbf{K} = \sigma^2(n - k),$$

ceea ce demonstrează teorema.

Scanned with OKEN Scanner

Exemplul 3. Estimatorul nedeplasat pentru σ^2 din Exemplul 1, după (15), este

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-1}\sum_1^n (y_j - x_j\,\hat{\theta})^2$$

Urmează că $\hat{\sigma}^2/\Sigma x_j^2$ este un estimator nedeplasat pentru $D^2(\hat{\theta})$.

Exemplul 4. Estimatorul nedeplasat pentru σ^2 din Exemplul 2, după (15), este

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-2}\sum_1^n (y_j - x_{1j}\,\hat{\theta}_1 - x_{2j}\hat{\theta}_2)^2,$$

unde

$$\begin{pmatrix}\hat{\theta}_1\\ \hat{\theta}_2\end{pmatrix} = \frac{1}{\Sigma x_{1j}^2\,\Sigma x_{2j}^2 - (\Sigma x_{1j}\,x_{2j})^2}\begin{pmatrix}\Sigma x_{2j}^2\,\Sigma x_{2j}\,y_j - \Sigma x_{1j}\,x_{2j}\,\Sigma x_{2j}\,y_j\\ \Sigma x_{1j}^2\,\Sigma x_{2j}\,y_j - \Sigma x_{1j}\,x_{2j}\,\Sigma x_{1j}\,y_j\end{pmatrix}.$$

Rezultatele de pînă acum au fost obţinute fără nici o presupunere asupra repartiţiei erorilor ε_t, cu excepţia condiţiilor (2) şi (3). Am obţinut estimatori nedeplasaţi pentru parametrii, pentru dispersiile şi covarianţele acestor estimatori, fără nici o presupunere privind forma repartiţiilor erorilor. Cu toate acestea dacă dorim să verificăm ipoteze privind parametri, sînt necesare presupuneri privind repartiţia.

În cazul în care $\boldsymbol{\varepsilon}$ este un vector normal

a) funcţia de verosimilitate

$$P \simeq \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\boldsymbol{\varepsilon}'\boldsymbol{\varepsilon}\right)$$

ceea ce arată că, în acest caz, estimatorii de maximă verosimilitate, coincid cu estimatorii de cel mai mic pătrat.

b) putem scrie

$$\mathbf{y}'\mathbf{y} = (\mathbf{y} - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\theta}})'(\mathbf{y} - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\theta}}) + (\mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\theta}})'(\mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\theta}}),$$

şi cum din (7) şi (16)

$$(\mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\theta}})'(\mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\theta}}) = \hat{\boldsymbol{\theta}}'\mathbf{X}'\mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\theta}} = \hat{\boldsymbol{\theta}}'\mathbf{X}'\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{y} = \hat{\boldsymbol{\theta}}'\mathbf{X}'\mathbf{y} =$$

(18)

$$= \mathbf{y}'\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{y} = \mathbf{y}'\mathbf{L}\mathbf{y},$$

iar din (17)

$$(\mathbf{y} - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\theta}})'\,(\mathbf{y} - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\theta}}) = \boldsymbol{\varepsilon}'\mathbf{K}\boldsymbol{\varepsilon}$$

obţinem

(19)
$$\mathbf{y}'\mathbf{y} = \boldsymbol{\varepsilon}'\mathbf{K}\boldsymbol{\varepsilon} + \mathbf{y}'\mathbf{L}\mathbf{y}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Deoarece rangul matricei $\mathbf{K}$ este $n-k$, iar al matricei $\mathbf{L}$ este k, putem aplica Teorema lui Cochran. Astfel cele două forme pătratice din membrul drept al relației (19) sînt independente.

$$(20)\qquad \begin{cases} \mathbf{y'y} \sim \sigma^2\, \chi^2(n) \\ \boldsymbol{\varepsilon}'\mathbf{K}\boldsymbol{\varepsilon} \sim \sigma^2\, \chi^2(n-k) \\ \mathbf{y'Ly} \sim \sigma^2\, \chi^2(k) \end{cases}$$

2.2. Măsurători de precizii diferite

Pînă acum în studiul modelului (1) am presupus că are loc (3). În cele ce urmează presupunem că

$$(21)\qquad \mathcal{C}(\boldsymbol{\varepsilon}) = \sigma^2\mathbf{P}^{-1} = \sigma^2 \begin{pmatrix} \frac{1}{p_1} & & & 0 \\ & \frac{1}{p_2} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \frac{1}{p_n} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{P} = \begin{pmatrix} p_1 & & & 0 \\ & p_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & p_n \end{pmatrix}$$

În cazul măsurătorilor de precizii diferite, metoda celor mai mici patrate constă în a minimiza norma în medie pătratică a sumei patratelor $Q = \boldsymbol{\varepsilon}'\,\mathbf{P}\,\boldsymbol{\varepsilon}$. Putem scrie

$$y_i\sqrt{p_i} = \sum_{j=1}^{k} t_j x_{ij}\sqrt{p_i} + \varepsilon_i\sqrt{p_i}$$

$$y_i' = \sum_{j=1}^{k} t_j x_{ij}' + \varepsilon_i'$$

și astfel s-a revenit la modelul măsurătorilor de precizii egale.

Teorema 3. *În cazul în care rang* $\mathbf{X}(n,k)=k$, *estimatorul de cel mai mic pătrat pentru* $\boldsymbol{\theta}$ *este*

$$(22)\qquad \hat{\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{G}^{-1}\mathbf{X'Py}, \qquad \mathbf{G} = \mathbf{X'PX}$$

și

$$M(\hat{\boldsymbol{\theta}}) = \boldsymbol{\theta}, \quad \mathcal{C}(\hat{\boldsymbol{\theta}}) = \sigma^2\,\mathbf{G}^{-1}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Demonstrație. Avem :

$$S = \varepsilon' P \varepsilon = (y - X\theta)' P (y - X\theta)$$

$$\frac{\partial S}{\partial \theta} = -2X'Py + 2X'PX\theta$$

$$\frac{\partial^2 S}{\partial \theta^2} = 2X'PX = 2G$$

$|G|$ fiind un determinant Gram :

$$\frac{\partial S}{\partial \theta} = 0 \Rightarrow \hat{\theta} = G^{-1}X'Py \text{ minim pentru } S$$

$\hat{\theta}$ se mai poate scrie

$$\hat{\theta} = G^{-1}X'P(X\theta + \varepsilon) = \theta + G^{-1}X'P\varepsilon \tag{23}$$

și ținînd seama de (2), rezultă

$$M(\hat{\theta}) = \theta.$$

Putem scrie

$$\mathcal{C}(\hat{\theta}) = M[(\hat{\theta} - \theta)\ (\hat{\theta} - \theta)'\ ] = M\ [G^{-1}X'P\ \varepsilon\varepsilon'\ PX\ (G^{-1})'\ ],$$

și cum $G = G'$ si $(G^{-1})' = (G')^{-1}$, obținem

$$\mathcal{C}(\hat{\theta}) = M\ [G^{-1}X'\ P\ \varepsilon\varepsilon'\ PX\ G^{-1}] \tag{24}$$

Din (21), $M(\varepsilon\varepsilon') = \sigma^2 P^{-1}$ și (24) devine

$$\mathcal{C}(\hat{\theta}) = \sigma^2 G^{-1}X'PXG^{-1} = \sigma^2\, G^{-1}$$

Putem să scriem

$$y - X\hat{\theta} = X\theta + \varepsilon - XG^{-1}\,X'Py = X\theta + \varepsilon - XG^{-1}X'P(X\theta + \varepsilon),$$

sau

$$y - X\hat{\theta} = (I - L)\varepsilon = K\varepsilon, \tag{25}$$

unde I este matricea unitate $(n \times n)$, K este de ordinul $(n \times n)$, iar

$$L = XG^{-1}X'P \tag{26}$$

Scanned with OKEN Scanner

TEOREMA 4. *Dacă vectorul* ε *este normal, atunci vectorii* $y - X\hat{\theta}$ *((*$n - k$*)-dimensional) şi* $(\hat{\theta} - \theta)$ *(*k*-dimensional) sînt independenţi* $y - X\hat{\theta} \sim$ $\sim N(0, \sigma^2 P^{-1}(I - L'))$, *iar* $\hat{\theta} - \theta \sim N(0, \sigma^2 G^{-1})$.

Demonstraţie. Prin ipoteză $\varepsilon \sim N(0, \sigma^2 P^{-1})$, iar din (25) şi din teorema III.16, urmează că

$$y - X\hat{\theta} \sim N(0, \sigma^2 KP^{-1}K')$$

Avem :

$$KP^{-1}K' = (I - L)\, P^{-1}(I - L)' = P^{-1}[I - PLP^{-1} - L' + PLP^{-1}L']$$

şi cum L' este idempotentă

$$PLP^{-1} = PXG^{-1}X' = L'$$

obţinem :

$$KP^{-1}K' = P^{-1}\,[I - 2L' + (L')^2] = P^{-1}[I - L']$$

Urmează că

$$y - X\hat{\theta} \sim N(0, \sigma^2 P^{-1}(I - L'))$$

Cum $\hat{\theta} - \theta = G^{-1}XP\,\varepsilon$, prin ipoteză şi din teorema III.16 obţinem

$$\hat{\theta} - \theta \sim N(0, \sigma^2 G^{-1}X\,PP^{-1}P'X'G^{-1})$$

sau

$$\hat{\theta} - \theta \sim N\,(0, \sigma^2\, G^{-1})$$

Deoarece

$$K\mathcal{C}(\varepsilon)\,(G^{-1}X'P)' = \sigma^2\, P^{-1}\,PXG^{-1} = \sigma^2 KXG^{-1} = \sigma^2\,(I - L)\,XG^{-1}$$

sau ţinînd seama de (26)

$$K\mathcal{C}(\varepsilon)\,(G^{-1}X'P)' = \sigma^2\,(XG^{-1} - XG^{-1}X'PXG^{-1}) = \sigma^2(XG^{-1} - XG^{-1}) = 0,$$

ceea ce arată că $y - X\hat{\theta}$ şi $\hat{\theta} - \theta$ sînt independente.

Matricea $G^{-1}X'P$ fiind o matrice $k \times n$, urmează că $\hat{\theta} - \theta$ este un vector normal k dimensional. Matricea H, definită prin

$$H\,\mathcal{C}\,(\varepsilon)\,(G^{-1}X'P') = 0$$

este chiar matricea K. Prin urmare vectorul $K\varepsilon$ şi deci $y - X\hat{\theta}$ este $(n - k)$ dimensional.

Scanned with OKEN Scanner

TEOREMA 5. *Statistica*

$$s^2 = \frac{(\mathbf{y} - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\theta}})' \mathbf{P}(\mathbf{y} - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\theta}})}{n-k} \tag{27}$$

este un estimator nedeplasat pentru parametrul σ^2, *iar*

$$(\mathbf{y} - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\theta}})' \mathbf{P} (\mathbf{y} - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\theta}}) \sim \sigma^2 \chi^2 (n-k) \tag{28}$$

Demonstraţie. Deoarece $\boldsymbol{\varepsilon} \sim N(\mathbf{0}, \sigma^2 \mathbf{P}^{-1})$ urmează că $\boldsymbol{\varepsilon}' \mathbf{P} \boldsymbol{\varepsilon} \sim \sigma^2 \chi^2 (n)$, deci $(\mathbf{y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\theta})' \mathbf{P}(\mathbf{y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\theta}) \sim \sigma^2 \chi^2 (n)$. Dacă facem $\boldsymbol{\theta} = \hat{\boldsymbol{\theta}}$, aceasta revine la a impune k legături liniare. Prin urmare χ^2 va avea $n-k$ grade de libertate şi deci

$$M[(\mathbf{y} - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\theta}})' \mathbf{P}(\mathbf{y} - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\theta}})] = \sigma^2 (n - k)$$

§3. Combinaţii lineare de parametri

3.1 Teorema lui Markov

DEFINIŢIA 1. Orice funcţie lineară

$$\varphi = \mathbf{b}'\boldsymbol{\theta} = \sum_1^k b_j \theta_j \tag{29}$$

de parametrii $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k$ necunoscuţi cu coeficienţii $b_1, \ldots, b_k$ constante cunoscute poartă numele de funcţie parametrică. Dacă există un estimator nedeplasat pentru φ, atunci φ poartă numele de funcţie parametrică estimabilă.

TEOREMA 6. *Funcţia parametrică* $\varphi = \mathbf{b}'\boldsymbol{\theta}$ *este estimabilă dacă şi numai dacă* $\mathbf{b}'$ *este o combinaţie liniară de coloanele matricei* $\mathbf{X}$ ($\mathbf{b}' = \boldsymbol{\alpha}' \mathbf{X}$).

Demonstraţie. Din definiţia 1, φ este estimabilă dacă şi numai dacă există un vector $\boldsymbol{\alpha}$ astfel încît $M(\boldsymbol{\alpha}' \mathbf{y}) = \varphi$. Avem

$$M(\boldsymbol{\alpha}' \mathbf{y}) = \boldsymbol{\alpha}' \mathbf{X}\boldsymbol{\theta} = \mathbf{b}' \boldsymbol{\theta}$$

Astfel φ este estimabilă dacă şi numai dacă $\boldsymbol{\alpha}' \mathbf{X} = \mathbf{b}'$.

TEOREMA 7. (Markov (1900)). *Dacă* $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ *este estimatorul parametrului* $\boldsymbol{\theta}$ *obţinut prin metoda celor mai mici patrate, atunci*

$$\psi = \hat{\varphi} = \mathbf{b}'\hat{\boldsymbol{\theta}} \tag{30}$$

este un estimator nedeplasat şi de dispersie minimă pentru φ.

Demonstraţie. Fie

$$\psi = \sum_1^n a_i y_i = \mathbf{a}'\mathbf{y} \text{ unde } \mathbf{y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{\varepsilon}$$

Scanned with OKEN Scanner

Avem

$$M(\psi) = \mathbf{a}'M(\mathbf{y}) = \mathbf{a}'\mathbf{X}\boldsymbol{\theta}$$

Pentru ca $M(\psi) = \varphi$ oricare ar fi $\boldsymbol{\theta}$, trebuie ca

(31) $$\mathbf{b}' = \mathbf{a}'\mathbf{X} \text{ sau același lucru } \mathbf{b} = \mathbf{X}'\mathbf{a}$$

Avem

$$D^2(\psi) = \sum_1^n a_i^2 D^2(y_i) = \sigma^2 \sum_1^n a_i^2 = \sigma^2\mathbf{A}$$

și pentru ca $D^2(\psi)$ să fie minimă, trebuie să minimizăm $\mathbf{A}$, ținînd seama că $\mathbf{b} = \mathbf{X}'\,\mathbf{a}$.

Dacă h_j sînt multiplicatorii lui Lagrange trebuie să minimizăm

$$\mathbf{S} = \mathbf{A} + 2\sum_{j=1}^k h_j\left(b_j - \sum_1^n x_{ij}a_i\right)$$

$$\frac{\partial \mathbf{S}}{\partial a_i} = 0 \Rightarrow (32)\ a_i = \sum_1^k x_{ij}h_j \text{ sau } (33)\ \mathbf{a} = \mathbf{X}\mathbf{h}$$

Din (31) și (33) obținem

(34) $$\mathbf{b} = \mathbf{X}'\mathbf{X}\mathbf{h}, \qquad (35) \qquad \psi = \mathbf{h}'\mathbf{X}'\mathbf{y} = \mathbf{a}'\mathbf{y}$$

Comparăm ecuația (35) cu $\lambda = \mathbf{b}'\hat{\boldsymbol{\theta}}$ unde $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ este soluția ecuației $\mathbf{X}'\mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{X}'\mathbf{y}$. Avem

$$\psi = \mathbf{X}'\mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{b}'\hat{\boldsymbol{\theta}} = \lambda$$

și

$$D^2(\psi) = \sigma^2\mathbf{A} = \sigma^2\mathbf{a}'\mathbf{a} = \sigma^2\mathbf{h}'\mathbf{X}'\mathbf{X}\mathbf{h} = \sigma^2\mathbf{b}'\mathbf{h}$$

$$D^2(\psi) = \sigma^2\mathbf{a}'\mathbf{a} = \sigma^2\mathbf{a}'\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{a},$$

sau punînd $\mathbf{f} = \mathbf{X}'\mathbf{a} = \mathbf{b}$

$$D^2(\psi) = \sigma^2\,\mathbf{f}'(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\,\mathbf{f}$$

3.2. Teoremele lui Neyman, J. și David, F.

Vom presupune că măsurătorile sînt de precizii diferite și vom considera parametrul $\varphi = \mathbf{b}'\boldsymbol{\theta}$. Trebuie să facem minimă expresia:

$$\mathbf{S} = \mathbf{a}'\mathbf{P}^{-1}\mathbf{a} + 2\sum_{j=1}^k h_j\left(b_j - \sum_{i=1}^n x_{ij}a_i\right) \text{ unde } \mathbf{P} = \begin{pmatrix} p_1 & & 0 \\ & p_2 & \\ & & \ddots \\ 0 & & p_n \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \mathbf{a}} = 0 \Rightarrow \frac{a_i}{p_i} = \sum_{j=1}^k h_i x_{ij} \text{ sau } \mathbf{P}^{-1}\mathbf{a} = \mathbf{X}\mathbf{h}$$

Scanned with OKEN Scanner

Sistemul

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{a} = \mathbf{X}\mathbf{h}$$

$$\mathbf{b} = \mathbf{X}'\mathbf{a}$$

conduce la : $\mathbf{b} = (\mathbf{X}'\mathbf{P}\mathbf{X})\mathbf{h} = \mathbf{G}\mathbf{h}$

$$\psi = \mathbf{a}'\mathbf{y} = \mathbf{h}'\mathbf{X}'\mathbf{P}\mathbf{y}.$$

Comparăm această ecuaţie cu $\lambda = \mathbf{b}'\hat{\boldsymbol{\theta}}$ unde $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ este soluţia ecuaţiei $\mathbf{G}\hat{\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{X}'\mathbf{P}\mathbf{y}$. Avem :

$$\psi = \mathbf{h}'\mathbf{G}\hat{\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{b}'\hat{\boldsymbol{\theta}} = \lambda$$

şi

$$D^2(\psi) = \sigma^2\mathbf{a}'\mathbf{P}^{-1}\mathbf{a} = \sigma^2\mathbf{h}'\mathbf{X}'\mathbf{P}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{P}\mathbf{X}\mathbf{h}$$

$$D^2(\psi) = \sigma^2\mathbf{h}'\mathbf{G}\mathbf{h} = \sigma^2\mathbf{b}'\mathbf{h}$$

$$D^2(\psi) = \sigma^2\mathbf{a}'\mathbf{X}\mathbf{G}^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{a} = \sigma^2\mathbf{b}'\mathbf{G}^{-1}\mathbf{b},\ M(\psi) = \mathbf{b}'\boldsymbol{\theta}$$

Am demonstrat

TEOREMA 8. *Printre toţi estimatorii funcţiei* $\varphi = \mathbf{b}'\boldsymbol{\theta}$ *care sînt nedeplasaţi şi funcţii lineare de observaţii,* $\psi = \mathbf{b}'\hat{\boldsymbol{\theta}}$, *unde* $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ *este estimatorul parametrului* $\boldsymbol{\theta}$ *obţinut prin metoda celor mai mici pătrate, este un estimator eficient* .

Fie

$$\mathbf{G} = \mathbf{X}'\mathbf{P}\mathbf{X} = (g_{ij})$$

$$\mathbf{f} = \mathbf{X}'\mathbf{P}\mathbf{y}$$

$$\mathbf{G}_{bb} = \left(\begin{array}{c|c} 0 & \mathbf{b}' \\ \hline \mathbf{b} & \mathbf{G} \end{array}\right) \qquad \mathbf{G}_{fb} = \left(\begin{array}{c|c} 0 & \mathbf{b}' \\ \hline \mathbf{f} & \mathbf{G} \end{array}\right)$$

$$\|\mathbf{G}_{fb}\| = -\sum_{i,j} b_i f_j g_{ij}^{-1} \|\mathbf{G}\| \text{ unde } \mathbf{G}^{-1} = (g_{ij}^{-1}) -$$

$$-\frac{\|\mathbf{G}_{fb}\|}{\|\mathbf{G}\|} = \sum_{i,j} b_i f_j g_{ij}^{-1} = \mathbf{b}'\mathbf{G}^{-1}\mathbf{f} = \mathbf{b}'\mathbf{G}^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{P}\mathbf{y} = \mathbf{b}'\hat{\boldsymbol{\theta}} = \psi$$

Analog

$$-\frac{\|\mathbf{G}_{bb}\|}{\|\mathbf{G}\|} = \mathbf{b}'\mathbf{G}^{-1}\mathbf{b} = \frac{D^2(\psi)}{\sigma^2}$$

Am demonstrat

Scanned with OKEN Scanner

TEOREMA 9. *Dacă* $\varphi = \mathbf{b}'\boldsymbol{\theta}$ *şi* $\mathbf{f} = \mathbf{X}'\mathbf{P}\mathbf{y}$, *estimatorul nedeplasat şi de dispersie minimă a funcţiei* φ *este dat de* ψ

$$\psi = \frac{\|\mathbf{G}_{fb}\|}{\|\mathbf{G}\|} \tag{36}$$

şi

$$D^2(\psi) = -\sigma^2 \frac{\|\mathbf{G}_{bb}\|}{\|\mathbf{G}\|} \tag{37}$$

TEOREMA 10. *Numărul funcţiilor lineare de parametrii independenţi şi estimabile este* k.

Demonstraţie. $\psi = \mathbf{h}'\mathbf{X}'\mathbf{P}\mathbf{y}$ sau $\psi = \mathbf{h}'\mathbf{X}'\mathbf{y}$ sînt estimatori ai parametrului φ. Prin urmare ψ este o funcţie lineară de observaţii. Un astfel de estimator există numai dacă $\mathbf{X}'\mathbf{X}\mathbf{h} = \mathbf{b}$ sau $\mathbf{X}'\mathbf{P}\mathbf{X}\mathbf{h} = \mathbf{b}$ admite o soluţie sau mai multe soluţii $\mathbf{h}$.

În general, $\varphi = \mathbf{b}'\boldsymbol{\theta}$ este estimabilă printr-o funcţie lineară de parametru dacă există cel puţin o soluţie $\mathbf{h}$. Ştiind că $\mathbf{X}'\mathbf{P}\mathbf{X}$ sau $\mathbf{X}'\mathbf{X}$ este de rang k, atunci $\mathbf{X}'\mathbf{P}\mathbf{X}=\mathbf{b}$ ne arată că vectorul $\mathbf{b}$ aparţine unui spaţiu vectorial k-dimensional. Prin urmare teorema este demonstrată.

TEOREMA 11. *Dispersia* $D^2(\psi)$ *este independentă de matricea* $\mathbf{h}$.

Demonstraţie. Fie $\mathbf{h}_1$ şi $\mathbf{h}_2$ două soluţii ale ecuaţiei $\mathbf{X}'\mathbf{P}\mathbf{X}\mathbf{h} = \mathbf{b}$. Prin urmare

$$\mathbf{X}'\mathbf{P}\mathbf{X}\mathbf{h}_1 = \mathbf{X}'\mathbf{P}\mathbf{X}\mathbf{h}_2 = \mathbf{b}$$

$$D^2(\psi) = \sigma^2\mathbf{b}'\mathbf{G}^{-1}\mathbf{b} = \sigma^2\mathbf{a}'\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{P}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{a}$$

$$D^2(\psi) = \sigma^2\mathbf{h}'\mathbf{X}'\mathbf{P}\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{P}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{P}\mathbf{X}\mathbf{h} = \sigma^2\mathbf{b}'\mathbf{h}$$

$$D^2(\psi) = \sigma^2\mathbf{b}'\mathbf{h}_1 = \sigma^2\mathbf{h}_1'\mathbf{X}'\mathbf{P}\mathbf{X}\mathbf{h}_1$$

$$= \sigma^2\mathbf{h}_1'\mathbf{X}'\mathbf{P}\mathbf{X}\mathbf{h}_2$$

$$= \sigma^2\mathbf{b}'\mathbf{h}_2$$

3.3. Estimatori ortogonali

Dacă funcţiile $\varphi_0 = \mathbf{b}'\boldsymbol{\theta}$ şi $\varphi_1 = \boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{\theta}$ sînt funcţii estimabile, atunci

$$\psi_0 = \tilde{\varphi}_0 = \mathbf{b}'\hat{\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{h}_0'\mathbf{X}'\mathbf{P}\mathbf{y} \quad \text{cu} \quad \mathbf{X}'\mathbf{P}\mathbf{X}\mathbf{h}_0 = \mathbf{b}$$

$$\psi_1 = \tilde{\varphi}_1 = \boldsymbol{\beta}'\hat{\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{h}_1'\mathbf{X}'\mathbf{P}\mathbf{y} \quad \text{cu} \quad \mathbf{X}'\mathbf{P}\mathbf{X}\mathbf{h}_1 = \boldsymbol{\beta}$$

DEFINIŢIA 2. Vom spune că estimatorii ψ_0 şi ψ_1 sînt ortogonali, dacă $\operatorname{cov}(\psi_0, \psi_1) = 0$.

TEOREMA 12. *Estimatorii* ψ_0 *şi* ψ_1 *sînt ortogonali dacă*

$$\mathbf{h}_0'\mathbf{G}\mathbf{h}_1 = \mathbf{b}'\mathbf{h}_1 = \mathbf{h}_0'\boldsymbol{\beta} = 0$$

Scanned with OKEN Scanner

Demonstrație. Teorema este demonstrată dacă arătăm că $\operatorname{cov}(\psi_0, \psi_1)$ se exprimă în funcție de $\mathbf{h}_0'\mathbf{G}\mathbf{h}_1$ (de exemplu). Avem

$$\begin{aligned}\operatorname{cov}(\psi_0, \psi_1) &= M[(\psi_0 - \varphi_0)(\psi_1 - \varphi_1)'] \\ &= M[(\mathbf{h}_0'\mathbf{X}'\mathbf{P}\mathbf{y} - \mathbf{b}'\boldsymbol{\theta})(\mathbf{y}'\mathbf{P}\mathbf{X}\mathbf{h}_1 - \boldsymbol{\theta}'\beta)] \\ &= \mathbf{h}_0'\mathbf{X}'\mathbf{P}M[(\mathbf{y}-\mathbf{X}\boldsymbol{\theta})(\mathbf{y}-\mathbf{X}\boldsymbol{\theta})']\mathbf{P}\mathbf{X}\mathbf{h}_1 \\ = \mathbf{h}_0'\mathbf{X}'\mathbf{P}M(\varepsilon\varepsilon')\mathbf{P}\mathbf{X}\mathbf{h}_1 &= \mathbf{h}_0'\mathbf{X}'\mathbf{P}\sigma^2\mathbf{P}^{-1}\mathbf{P}\mathbf{X}\mathbf{h}_1 = \mathbf{h}_0'\mathbf{G}\mathbf{h}_1\end{aligned}$$

TEOREMA 13. *Dacă* $M(\psi_1) = 0$, *atunci oricare ar fi* h_0 *estimatorul* ψ_1 *este ortogonal cu* φ_0.

Demonstrație. Deoarece $M(\varepsilon) = \mathbf{0}$,

$$M(\psi_1) = \mathbf{h}_1'\mathbf{X}'\mathbf{P}\mathbf{X}\boldsymbol{\theta}$$

și cum

$$M(\psi_1) = \mathbf{h}_1'\mathbf{G}\boldsymbol{\theta} = \mathbf{0} \quad \text{oricare ar fi } \boldsymbol{\theta} \Rightarrow \mathbf{h}_1'\mathbf{G} = \mathbf{0}$$

Atunci

$$\operatorname{cov}(\psi_0, \psi_1) = \mathbf{h}_0'\mathbf{G}\mathbf{h}_1 = \mathbf{0}.$$

Găsim un estimator pentru $D^2(\psi)$. Avem :

$$D^2(\psi) = -\frac{M[(\mathbf{y} - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\theta}})'\mathbf{P}(\mathbf{y} - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\theta}})]}{n-k} \cdot \frac{\|\mathbf{G}_{bb}\|}{\|\mathbf{P}\|}$$

$$D^2(\psi) = M(s^2) = M\left[-\frac{(\mathbf{y} - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\theta}})'\mathbf{P}(\mathbf{y} - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\theta}})}{n-k} \cdot \frac{\|\mathbf{G}_{bb}\|}{\|\mathbf{G}\|}\right]$$

Pe de altă parte

$$(\mathbf{y} - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\theta}})'\mathbf{P}(\mathbf{y} - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\theta}}) = \frac{\|\mathbf{G}_{HH}\|}{\|\mathbf{G}\|}$$

unde: $\mathbf{H} = \mathbf{X}'\mathbf{P}\mathbf{y} = \mathbf{f}$

Matricile

$$\mathbf{G}_{HH} = \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{H}_0 & \mathbf{H}' = \mathbf{f}' \\ \hline \mathbf{H} = \mathbf{f} & \mathbf{G} \end{array}\right) \quad \text{și} \quad \mathbf{G}_{ff} = \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{0} & \mathbf{f}' \\ \hline \mathbf{f} & \mathbf{G} \end{array}\right)$$

diferă numai prin $\mathbf{H}_0 = \mathbf{y}'\mathbf{P}\mathbf{y}$.

$$s^2 = -\frac{\|\mathbf{G}_{HH}\|}{n-k} \cdot \frac{\|\mathbf{G}_{bb}\|}{\|\mathbf{G}\|^2}$$

este un estimator nedeplasat pentru $D^2(\psi)$.

Scanned with OKEN Scanner

Punînd $\psi = \mathbf{a}'\mathbf{y}$ și știind că $\psi = \mathbf{b}'\hat{\boldsymbol{\theta}}$

$$\psi = \mathbf{b}'\mathbf{G}^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{P}\mathbf{y} \Rightarrow \mathbf{a} = \mathbf{P}\mathbf{X}\mathbf{G}^{-1}\mathbf{b}$$

Urmează că

$$D^2(\psi) = \sigma^2 \sum_1^n (a_i^2/p_i); \qquad \sum_1^n (a_i^2/p_i) = -\|\mathbf{G}_{bb}\|/\|\mathbf{G}\|.$$

TEOREMA 14. *Dacă* ε *este repartizat normal, atunci variabila aleatoare* $(\psi - \varphi)/s$ *este repartizată* $t(n-k)$.

Demonstrație. Din ipoteză urmează că ψ este o variabilă $N(\varphi, D^2(\psi))$. Deci

$$\frac{\psi - \varphi}{\sigma}\sqrt{-\frac{\|\mathbf{G}\|}{\|\mathbf{G}_{bb}\|}} \sim N(0,1). \tag{38}$$

Din (38) și din teorema 5 obținem

$$\frac{\psi-\varphi}{s} = \sqrt{\frac{n-k}{\chi^2(n-k)}} \cdot \frac{\psi-\varphi}{\sigma}\sqrt{-\frac{\|\mathbf{G}\|}{\|\mathbf{G}_{bb}\|}} \sim t(n-k), \tag{39}$$

ceea ce demonstrează teorema.

§4. Legături lineare

Considerăm modelul linear $\mathbf{y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{\varepsilon}$ la care adăugăm s legături lineare $\mathbf{A}\boldsymbol{\theta} = \mathbf{g}$. În acest caz $\mathbf{X}$ este o matrice de ordin $(n \times k)$, $\mathbf{A}$ de ordin $(s \times k)$ avînd rangul $s < k$, $\boldsymbol{\theta}$ un vector $(k \times 1)$, $\mathbf{g}$ un vector $(s \times 1)$, $\mathbf{y}$ și $\boldsymbol{\varepsilon}$ vectori $(n \times 1)$. Măsurătorile sînt de precizii egale, iar $\boldsymbol{\varepsilon}$ este presupus normal.

Va trebui să minimizăm $(\mathbf{y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\theta})'(\mathbf{y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\theta})$ ținînd seama de legătura $\mathbf{A}\boldsymbol{\theta} = \mathbf{g}$. Fie $\boldsymbol{\mu} = (s, 1)$ vectorul multiplicatorilor lui Lagrange și

$$S^* = (\mathbf{y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\theta})'(\mathbf{y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\theta}) - 2\boldsymbol{\mu}'(\mathbf{A}\boldsymbol{\theta} - \mathbf{g})$$

$$\frac{\partial S^*}{\partial \theta} = 0 \Rightarrow \mathbf{X}'(\mathbf{y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{A}'\boldsymbol{\mu}$$

Pentru a rezolva sistemul

$$\mathbf{X}'(\mathbf{y} - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\theta}}) = \mathbf{A}'\boldsymbol{\mu} \tag{40}$$

$$\mathbf{A}\hat{\boldsymbol{\theta}} - \mathbf{g} = 0 \tag{41}$$

introducem notațiile:

$\mathbf{C} = \mathbf{X}'\mathbf{X}$ matrice de ordinul $(k \times k)$

$\mathbf{B} = \mathbf{A}\mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}'$ matrice de ordinul $(s \times s)$,

amîndouă matricile fiind regulate.

Scanned with OKEN Scanner

Din (40) obținem :

$$\hat{\theta} = C^{-1}X'y - C^{-1}A'\mu \tag{42}$$

$$\hat{\theta} = \theta_1 - \delta\hat{\theta},$$

$\delta\hat{\theta}$ fiind corecția ce trebuie aplicată lui $\hat{\theta}_1$ estimatorul lui θ fără legături, pentru a obține estimatorul $\hat{\theta}$ a lui θ ce satisface legăturile date.

Din (41) și (42) obținem :

$$B\mu = AC^{-1}X'y - g$$

$$\mu = B^{-1}AC^{-1}X'y - B^{-1}g$$

$$\mu = B^{-1}[A\hat{\theta}_1 - g]$$

$$\mu = B^{-1}A\delta\hat{\theta}.$$

Vectorii $X\hat{\theta}_1$ și $X\hat{\theta}$ aparțin unui subspațiu k dimensional reprezentat printr-un plan. Totodată legătura $A\hat{\theta} = g$ arată că $X\hat{\theta}$ aparține de asemenea la un subspațiu s-dimensional. Prin urmare $X\hat{\theta}$ aparține unui subspațiu $(k-s)$ dimensional reprezentat printr-o dreaptă în planul k. Vectorul $y - X\hat{\theta}$ este ortogonal acestei drepte, vectorul $y - X\hat{\theta}_1$ fiind el însuși ortogonal planului k.

Prin urmare vectorii $y - X\hat{\theta}_1$ și $X\hat{\theta} - X\hat{\theta}_1$ sînt ortogonali ceea ce arată că triunghiul $(y, X\hat{\theta}_1, X\hat{\theta})$ este dreptunghic în $X\hat{\theta}_1$.

TEOREMA 15. *$\hat{\theta}$ este un vector normal $(k-s)$ dimensional de vector valoare medie θ și matrice de covarianțe $\sigma^2(C^{-1}-JC^{-1})$ unde $J=C^{-1}A'B^{-1}A$ este de ordin $(k\times k)$.*

Demonstrație. Putem scrie :

$$\begin{aligned}\hat{\theta} &= \hat{\theta}_1 \quad \delta\hat{\theta} \\ &= \hat{\theta}_1 - C^{-1}A'\mu \\ &= \hat{\theta}_1 - C^{-1}A'[B^{-1}A\hat{\theta}_1 - B^{-1}g] \\ &= C^{-1}A'B^{-1}g + [I - C^{-1}A'B^{-1}A]\,\hat{\theta}_1,\end{aligned}$$

I fiind matricea unitate $(k \times k)$.

Matricea J se bucură de următoarele proprietăți

$$J' = A'B^{-1}AC^{-1} = CJC^{-1}$$

$$J^2 = C^{-1}A'B^{-1}AC^{-1}A'B^{-1}A = C^{-1}A'B^{-1}A = J$$

Scanned with OKEN Scanner

Se știe că rangul produsului a mai multor matrici este mai mic decît cel mai mic rang de matrice ce compune acest produs. Cum

$$\text{rang } \mathbf{A} = \text{rang } \mathbf{A}' = \text{rang } \mathbf{B}^{-1} = s$$

$$\text{rang } \mathbf{C} = k > s,$$

urmează că

$$\text{rang } \mathbf{J} \leqslant s.$$

Însă

$$\mathbf{AJ} = \mathbf{A} \Rightarrow \text{rang } \mathbf{A} = s \leqslant \text{rang } \mathbf{J}$$

Deci

$$\text{rang } \mathbf{J} = s$$

Punînd $\hat{\theta}_1 - \theta = \Delta$, obținem

$$\hat{\theta} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}'\mathbf{B}^{-1}\mathbf{g} + (\mathbf{I} - \mathbf{J})\,\hat{\theta}_1$$

$$= \mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}'\mathbf{B}^{-1}\mathbf{g} + (\mathbf{I} - \mathbf{J})\,(\theta + \Delta)$$

$$= (\mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}'\mathbf{B}^{-1}\mathbf{g} - \mathbf{J}\theta) + \theta + (\mathbf{I} - \mathbf{J})\,\Delta$$

Însă

$$\mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}'\mathbf{B}^{-1}\mathbf{g} - \mathbf{J}\theta = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}'\mathbf{B}^{-1}(\mathbf{g} - \mathbf{A}\theta) = \theta$$

Deci, avem:

$$\hat{\theta} - \theta = (\mathbf{I} - \mathbf{J})\,\Delta$$

$$\Delta \sim N(0,\ \sigma^2\mathbf{C}^{-1}) \Rightarrow \hat{\theta} - \theta \sim N(0,\ \sigma^2(\mathbf{I} - \mathbf{J})\,\mathbf{C}^{-1}(\mathbf{I} - \mathbf{J})')$$

Deoarece :

$$(\mathbf{I} - \mathbf{J})\,\mathbf{C}^{-1}(\mathbf{I} - \mathbf{J})' = (\mathbf{I} - \mathbf{J})\,\mathbf{C}^{-1}(\mathbf{I} - \mathbf{J}')$$

$$= \mathbf{C}^{-1} - \mathbf{J}\mathbf{C}^{-1} - \mathbf{J}\mathbf{C}^{-1} + \mathbf{J}\mathbf{C}^{-1}$$

și din proprietățile matricii $\mathbf{J}$:

$$\hat{\theta} \sim N(\theta,\ \sigma^2(\mathbf{C}^{-1} - \mathbf{J}\mathbf{C}^{-1})) \tag{43}$$

Pentru a arăta că $\hat{\theta}$ este $(k-s)$ dimensional, trebuie să arătăm că $\mathbf{I} - \mathbf{J}$ este de rang $(k-s)$. Fie

$$\mathbf{M} = \mathbf{C}^{\frac{1}{2}}\mathbf{J}\mathbf{C}^{-\frac{1}{2}}, \quad \mathbf{M}^2 = \mathbf{M}, \quad \mathbf{M}' = \mathbf{M}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Se poate alege o matrice ortogonală $\mathbf{F}$ astfel încît $\mathbf{FMF'}=\mathbf{D}$ (matricea diagonală). Dacă

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} d_1 & & 0 \\ & d_2 & \\ & \ddots & \\ 0 & & d_k \end{pmatrix}, \qquad d_j = \begin{cases} 1 \\ \text{sau} \\ 0 \end{cases}$$

atunci $\mathbf{D}^2 = \mathbf{D}$.

Cum rang $\mathbf{D}$ = rang $\mathbf{J}$, s : d_j sînt egali cu 1 şi $(k-s)$ cu zero.

Matricea $\mathbf{FC}^{\frac{1}{2}}(\mathbf{I}-\mathbf{J})\mathbf{C}^{-\frac{1}{2}}\mathbf{F'} = \mathbf{I}-\mathbf{D}$ are acelaşi rang ca $\mathbf{I}-\mathbf{J}$. Insă rang $(\mathbf{I}-\mathbf{D}) = k-s$. Prin urmare rang $(\mathbf{I}-\mathbf{J}) = k-s$.

TEOREMA 16. *$\delta\hat{\theta}$ este un vector normal s-dimensional de vector valoare medie $\mathbf{0}$ şi matrice de covariante $\delta^2\mathbf{JC}^{-1}$.*

Demonstraţie. Avem

$$\begin{aligned} \delta\hat{\theta} &= \hat{\theta}_1 - \hat{\theta} \\ &= (\hat{\theta}_1 - \theta) - (\hat{\theta} - \theta) \\ &= \Delta - (\mathbf{I}-\mathbf{J})\,\Delta = \mathbf{J}\Delta \end{aligned}$$

$$\Delta \sim N(\mathbf{0}, \sigma^2\mathbf{C}^{-1}) \Rightarrow \delta\hat{\theta} \sim N(\mathbf{0}, \sigma^2\mathbf{JC}^{-1}\mathbf{J'}),$$

şi cum

$$\mathbf{JC}^{-1}\mathbf{J'} = \mathbf{JC}^{-1}\mathbf{CJC}^{-1} = \mathbf{J}^2\mathbf{C}^{-1} = \mathbf{JC}^{-1}, \quad \delta\hat{\theta} \sim N(\mathbf{0}, \sigma^2\mathbf{JC}^{-1})$$

$\mathbf{J}$ avînd rangul s, Δ fiind de dimensiune s, urmează că $\delta\hat{\theta}$ este de dimensiune s.

TEOREMA 17. *$\hat{\theta}$ şi $\delta\hat{\theta}$ sînt independente.*

Demonstraţie. Este suficient să arătăm că

$$D^2(\hat{\theta}) + D^2(\delta\hat{\theta}) = D^2(\hat{\theta}_1),$$

ceea ce este adevărat, deoarece

$$\begin{aligned} D^2(\hat{\theta}) &= \sigma^2(\mathbf{C}^{-1} - \mathbf{JC}^{-1}) \\ D^2(\delta\hat{\theta}) &= \sigma^2\mathbf{JC}^{-1} \\ D^2(\theta_1) &= \sigma^2\mathbf{C}^{-1} \end{aligned}$$

Scanned with OKEN Scanner

Capitolul XI

STATISTICI DE ORDINE ÎN ESTIMAREA PUNCTUALĂ A PARAMETRILOR

§ 1. Introducere

Statisticile de ordine se asociază cu problemele de estimare într-o varietate de moduri, dintre care cele mai multe se întîlnesc în situaţia în care domeniul de definiţie al variabilei X depinde la unul sau la amîndouă extremităţile de parametrii ce trebuie estimaţi. Oricare ar fi metodele clasice, în astfel de probleme, apar estimatori ce implică statistici de ordine.

§ 2. Amplitudinea estimator al parametrilor σ din repartiţia $N(\mu, \sigma^2)$

Fie $w_{(1)}$ $[W_{(1)}]$ amplitudinea de selecţie în cazul în care $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ $[N(0, 1)]$. Avem :

$$W_{(1)} = \frac{w_{(1)}}{\sigma} \tag{1}$$

şi dacă punem

$$d_n = M(W_{(1)}) = \frac{1}{\sigma} M(w_{(1)}), \tag{2}$$

atunci statistica

$$\hat{\sigma}_{w(1)} = \frac{w_{(1)}}{d_n} \tag{3}$$

este un estimator nedeplasat pentru σ.

Scanned with OKEN Scanner

În tabelul 1 se dau valorile unor constante legate de $\sigma_{w(1)}$ pentru $n = 2\ (1)\ 15$.

Tabelul 1

n	d_n	$1/d_n$	$D^2(W_{(1)})$	$d_n^2/D^2(W_{(1)})$
2	1,12838	0,8862	0,72676	1,75
3	1,16925	0,5908	0,78922	3,63
4	2,05875	0,4857	0,77407	5,48
5	2,32593	0,4299	0,74661	7,25
6	2,53441	0,3946	0,71916	8,93
7	2,70436	0,3698	0,69424	10,53
8	2,84720	0,3512	0,67213	12,06
9	2,97003	0,3367	0,65262	13,52
10	3,07751	0,3249	0,63531	14,91
11	3,17287	0,3152	0,61984	16,20
12	3,26846	0,3069	0,60601	17,50
13	3,33598	0,2998	0,59353	18,80
14	3,40676	0,2935	0,58217	19,90
15	3,47183	0,2880	0,57186	21,10

Avem :

$$D^2(\hat{\sigma}_{w(1)}) = \frac{1}{d_n^2} D^2(w_{(1)}) = \frac{\sigma^2}{d_n^2} D^2(W_{(1)})$$

Eficiența estimatorului $\hat{\sigma}_{w(1)}$ relativă la $\hat{\sigma}_s$ se poate exprima ca

$$e_n(\hat{\sigma}_{w(1)}) = \frac{d_n^2}{D^2(W_{(1)})} \left\{ \frac{n-1}{2} \frac{\Gamma^2\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\Gamma^2\left(\frac{n}{2}\right)} - 1 \right\} \tag{4}$$

În tabelul 2 se dau volumele selecțiilor ce trebuie folosite pentru

$$\hat{\sigma}_{w(1)} \text{ și } \hat{\sigma}_s = \frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \sqrt{\sum_1^n (X_i - \bar{X})^2}$$

astfel încît să se obțină aproximativ aceeași eficiență

Tabelul 2

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
$\hat{\sigma}_{w(1)}$ \ n	2	4	5	6	7	8	9	11	12	14	16	18	20

Scanned with OKEN Scanner

În tabelul 3 sînt trecute valorile eficienței relative a estimatorului $\hat{\sigma}_{w(1)}$ pentru $n = 2\,(1)\,20$ (Dixon, Massey, (1957), David (1970)).

Tabelul 3

n	$\hat{e}_n(\sigma_{w(1)})$	n	$e_n(\hat{\sigma}_{w(1)})$
2	1,000	12	0,814
3	0,992	13	0,797
4	0,975	14	0,781
5	0,955	15	0,766
6	0,933	16	0,751
7	0,911	17	0,738
8	0,890	18	0,725
9	0,869	19	0,712
10	0,850	20	0,700
11	0,831	—	—

Observații. Din tabelul 3 se vede că eficiența este convenabilă pentru $n \leqslant 12$ și foarte bună pentru selecții mici (de exemplu pentru $n=5$), care sînt folosite, de obicei, în controlul calității produselor.

Pentru $n>12$ eficiența se poate mări printr-o împărțire aleatoare a selecției în subselecții, în locul statisticii $w(1)$ folosindu-se amplitudinea medie $\overline{w}(1)$, estimatorul parametrului fiind $\overline{w}(1)/d_n$. După Grubbs și Weaver (1947) avem o creștere optimă a eficienței pentru subselecții de volum 8.

§ 3. Estimatori ai parametrului σ bazați pe pseudoamplitudini

Estimatorii liniari ai parametrului σ bazați pe pseudoamplitudini au forma

$$\sigma^* = q_n \sum_i a_i w_{(i)}, \tag{5}$$

unde q_n și a_i sînt numere reale.

Observație. Pentru $i=1$, $a_1=1$, $a_i=0$, $i=2, 3, \ldots$ și $q_n = 1/d_n$ avem

$$\sigma^* = \sigma^*_{w(1)} = \frac{w_{(1)}}{d_n}$$

adică tocmai estimatorul bazat pe amplitudine.

Fie $W_{(i)} = Y_{(n-i+1)} - Y_{(i)}$ pseudo-amplitudinea de rang i corespunzătoare unei selecții de volum n asupra unei variabile aleatoare $\sim N(0, 1)$.

Pornind de la observația că eficiența estimatorului bazat pe amplitudine scade odată cu creșterea volumului selecției, Mosteller (1946) a studiat posibilitatea înlocuirii estimatorului bazat pe amplitudine cu un estimator bazat pe pseudo-amplitudine de exemplu cu

$$c\,[X_{(n-i+1)} - X_{(i)}] \qquad i \neq 1 \tag{6}$$

unde c este o constantă de nedeplasare.

Scanned with OKEN Scanner

Această înlocuire are sens în situaţia în care pentru volumele de selecţie pentru care $\hat{\sigma}_{w(1)}$ are o eficienţă scăzută, „înlocuitorii" săi au o eficienţă mai bună.

Pentru $n \leqslant 10$ nu este avantajoasă utilizarea acestor înlocuitori ai estimatorului $\hat{\sigma}_{w(1)}$ deoarece pentru selecţii mici $\sigma_{w(1)}$ are o eficienţă bună.

Mosteller propune pentru parametrul σ estimatorii

$$\sigma^*_{M_1} = \frac{X_{(n-i+1)} - X_{(i)}}{M(W_{(i)})} = \frac{w_{(i)}}{M(W_{(i)})} \tag{7}$$

$$\sigma^*_{M_2} = \frac{X_{(n-i+1)} + X_{(n-i+1)} - X_{(i)} - X_{(i)}}{M(W_{(i)} + W_{(i)}} = \frac{w_{(i)} + w_{(i)})}{M(W_{(i)} + W_{(i)})} \tag{8}$$

Valorile cantităţilor $1/M(W_{(i)})$ $i = 2\,(1)\,7$ sînt date în tabelul 4 pentru $n = 4\,(1)\,15$. (Zítek, 1954).

Tabelul 4

n	$\frac{1}{M(W_{(2)})}$	$\frac{1}{M(W_{(3)})}$	$\frac{1}{M(W_{(4)})}$	$\frac{1}{M(W_{(5)})}$	$\frac{1}{M(W_{(6)})}$	$\frac{1}{M(W_{(7)})}$
4	1,60					
5	1,00					
6	0,78	9,50				
7	0,66	1,40				
8	0,59	1,10	3,30			
9	0,54	0,88	1,90			
10	0,50	0,76	1,30	4,20		
11	0,47	0,68	1,10	2,30		
12	0,45	0,63	0,93	0,66	5,00	
13	0,43	0,59	0,83	1,30	2,60	
14	0,41	0,56	0,76	1,10	1,90	5,50
15	0,40	0,53	0,70	0,96	1,50	2,90

Jones (1946) propune un estimator pentru parametrul σ considerînd suma dintre primele $r-1$ pseudo-amplitudini şi amplitudine, adică :

$$\sigma^*_J = \frac{\sum_{i=1}^{r} [X_{(n-i+1)} - X_{(i)}]}{2\sum_{i=1}^{r} \xi\left(\frac{i}{n}\right)} = \frac{\sum_{i=1}^{r} w_{(i)}}{2\sum_{i=1}^{r} \xi\left(\frac{i}{n}\right)} \tag{9}$$

unde prin $\xi\left(\frac{i}{n}\right)$ s-a notat :

$$\xi\left(\frac{i}{n}\right) = \frac{n!}{(i-1)!\,(n-i)!} \int_{-\infty}^{\infty} [\Phi(u)]^{i-1}\,[1 - \Phi(u)]^{n-i}\,d\Phi(u) \tag{10}$$

Scanned with OKEN Scanner

Steinhaus (1954) foloseşte pentru estimarea parametrului σ suma tuturor pseudo-amplitudinilor şi anume :

$$(11) \qquad \sigma_{St}^{*} = \frac{\sum_{i=1}^{[n/2]} [x_{(n-i+1)} - x_{(i)}]}{\sum_{i=1}^{[n/2]} M(W_{(i)})} = \frac{\sum_{i=1}^{[n/2]} w_{(i)}}{\sum_{i=1}^{[n/2]} M(W_{(i)})}$$

În tabelul 5 sînt date valorile lui $1/\Sigma M(W_{(i)})$ pentru $n=2\,(1)\,15$. (Zítek, 1954).

Tabelul 5

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$1/\Sigma M(W_{(i)})$	0,886	0,591	0,377	0,302	0,237	0,203	0,172	0,153	0,135	0,123	0,111	0,103	0,035	0,088

Observaţii. i) Pentru $r = [n/2]$ şi ţinînd seama că $\xi\left(\frac{i}{n}\right) = \frac{1}{2} M(W_{(i)})$, estimatorul lui Jones coincide cu cel propus de Steinhaus.

ii) Godwin (1949) studiază combinaţiile optime de pseudoamplitudini în estimarea lui σ.

În 1953, Cadwell studiază repartiţia pseudo-amplitudinilor dintr-o populaţie normală, punînd-o sub forma :

$$(12) \qquad w'_{(i)} = x_{(n-i)} - x_{(i+1)} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

Se observă că în acest caz, amplitudinea se obţine pentru $i=0$. Cadwell arată că $w'_{(0)} = x_{(n)} - x_{(1)}$ este statistica cea mai eficientă (de acest tip) pentru estimarea parametrului σ pînă la un volum de selecţie de maximum 17.

Pentru $17 < n < 31$ este indicată statistica $w_{(1)}$ în timp ce pentru $n \geqslant 31$ $w'_{(2)}$ substituie cu o eficienţă mai bună pe $w'_{(1)}$.

Unul din motivele pentru care statisticile $w'_{(1)}$, $w'_{(2)}$ sînt de preferat amplitudinii pentru anumite volume de selecţie este faptul că nefolosind valorile extreme, ele sînt mai puţin sensibile la depărtarea de normalitate sau eventual la apariţia unor observaţii eronate.

Eficienţa statisticilor $w'_{(0)}$, $w'_{(1)}$, $w'_{(2)}$ în raport cu estimaţia nedeplasată clasică a parametrului σ este dată în tabelul 6, pentru cîteva valori ale lui n.

Tabelul 6

n	10	20	30	40	60
$e_n(w'_{0})$	0,85	0,70	0,605	0,54	0,445
$e_n(w'_{(1)})$	0,67	0,73	0,70	0,66	0,595
$e_n(w'_{(2)})$	0,44	0,655	0,595	0,69	0,655

Scanned with OKEN Scanner

Cadwell (1953) propune pentru σ parametrul estimatorii

$$\sigma^*_{c_1} = \frac{w'_{(0)} + \lambda_1 w'_{(1)}}{M(W_{(0)}) + \lambda_1 M(W_{(1)})}, \tag{13}$$

$$\sigma^*_{c_2} = \frac{w'_{(1)} + \lambda_2 w'_{(2)}}{M(W_{(1)}) + \lambda_2 M(W_{(2)})} \tag{14}$$

constanta λ alegîndu-se astfel încît să se obţină o eficienţă maximă

Tabelul 7 dă valorile lui λ_1 şi λ_2 astfel încît $e_n(\sigma^*_{c_1})$ şi $e_n(\sigma^*_{c_2})$ să fie maxime pentru diferite volume de selecţie.

Tabelul 7

n	10	20	30	40	60
λ	0,85	1,47	1,95	2,30	2,95
$e_n(\sigma^*_{C_1})$	0,965	0,870	0,795	0,725	0,635
λ_2	0,36	0,81	1,13	1,40	1,76
$e_n(\sigma^*_{C_1})$	0,690	0,795	0,785	0,760	0,710

Tot un estimator bazat pe combinaţia între amplitudine şi pseudo-amplitudine a fost propus de Dixon (1957) sub forma:

$$\sigma^*_{Dx} = K \cdot \Sigma w_{(i)}, \tag{15}$$

unde K este o constantă de nedeplasare iar sumarea se face după submulţimea acelor $w_{(i)}$ care asigură estimatorului σ^*_{Dx} dispersia minimă.

Dixon a alcătuit un tabel auxiliar care indică, pentru diferite volume de selecţie ($n \leqslant 20$) ce combinaţii de peseudo-amplitudini trebuie alese astfel încît eficienţa estimaţiei σ^*_{Dx} să fie maximă.

Un alt estimator pentru σ este propus în 1968 de Prescott.

Dacă $X_{(1)}, \ldots, X_{(n)}$ sînt statisticile de ordine corespunzătoare unei selecţii de volum n asupra unei variabile $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ şi dacă

$$p = \int_{x_p}^{\infty} \varphi(u)\, du, \tag{16}$$

şi

$$S_p = \frac{1}{r}\left(\sum_{n-r+1}^{n} X_i - \sum_{1}^{r} X_i \right), \tag{17}$$

unde $r = [np]$, atunci statistica

$$z_p = \frac{p}{2\varphi(x_p)} S_p \tag{18}$$

este asimptotic un estimator nedeplasat pentru σ.

Scanned with OKEN Scanner

Recent, Prescott (1971) şi-a reconsiderat estimatorul propus în 1968 în sensul că scriindu-l sub forma

$$\sigma_P^* = a_n \bar{w} \tag{19}$$

unde a_n este o constantă de nedeplasare, iar

$$\bar{w} = \frac{1}{3r}\left[\sum_{n-r+1}^{n} x_{(i)} - \sum_{1}^{r} x_{(i)}\right], \tag{20}$$

şi $r = [n/6]$ i-a putut calcula folosind tabelele lui Teichroew (1956), media şi dispersia.

Se observă că statistica σ_P^* poate fi rescrisă ca o combinaţie de pseudo-amplitudini.

Fie $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ vectorul observaţiilor, iar $\delta = (\delta_1, \ldots, \delta_n)$ vectorul coeficienţilor asociaţi lui $\mathbf{x}$, δ_i fiind de forma:

$$\delta_i = \begin{cases} -\dfrac{1}{3r} & \text{dacă } 1 \leqslant i \leqslant r \\ 0 & \text{dacă } r+1 \leqslant i \leqslant n-r \\ \dfrac{1}{3r} & \text{dacă } n-r+1 \leqslant i \leqslant n \end{cases} \tag{21}$$

Estimatorul lui Prescott capătă forma:

$$\sigma_P^* = a_n \, \delta' \, \mathbf{x}. \tag{22}$$

Notînd cu $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ vectorul observaţiilor standardizate adică

$$u_i = \frac{x_i - \mu}{\sigma} \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

atunci fie

$$M(\mathbf{u}) = \boldsymbol{\mu} \text{ iar } M[(\mathbf{u} - \boldsymbol{\mu})(\mathbf{u} - \boldsymbol{\mu})'] = \boldsymbol{\Sigma}$$

În acest caz

$$M(\bar{w}) = \delta' \, M(\mathbf{x}) = \delta' \boldsymbol{\mu} \sigma \text{ şi } D^2(\bar{w}) = \delta' \, \boldsymbol{\Sigma} \, \delta \sigma^2$$

Pentru nedeplasarea trebuie ales:

$$a_n = \frac{1}{\delta' \, \boldsymbol{\mu}}$$

caz în care

$$D^2(\sigma_P^*) = (\delta' \, \boldsymbol{\Sigma} \, \delta) \, \sigma^2 / (\delta \mu)^2 \tag{23}$$

Tabele relative la σ_P^* se pot găsi în Prescott (1971).

Scanned with OKEN Scanner

Observaţii

i) pentru selecţii de volum $n \leqslant 6$, σ_p^* are proprietăţi asemănătoare cu estimatorul bazat pe amplitudine.

ii) pentru selecţii de volum $7 \leqslant n \leqslant 10$ cînd estimatorul bazat pe amplitudine începe să-şi piardă din eficienţă, σ_p^* îşi schimbă forma devenind într-un sens echivalent cu estimatorul propus de Dixon (1957).

iii) pentru selecţii de volum $11 \leqslant n \leqslant 20$, σ_p^* are o pierdere mică de eficienţă în raport cu cel propus de Dixon.

Estimatorul σ_p^* are avantajul că nu necesită un tabel auxiliar pentru stabilirea combinaţiei de pseudo-amplitudini.

§4. Estimatori construiţi pe baza statisticilor sistematice

4.1. Introducere

Un loc important printre statisticile sistematice îl ocupă cele liniare, care datorită uşurinţei de calcul se dovedesc un instrument deosebit de util în estimarea parametrilor.

Necesitatea folosirii statisticilor sistematice liniare este justificată de Mosteller (1946) în felul următor: se ştie că unul din obiectivele statisticii matematice este găsirea pentru diferite situaţii a unor statistici eficiente şi a celor mai puternice teste.

De cele mai multe ori, aceste scopuri au condus la neglijarea unui aspect important şi anume acela al economicităţii.

Deseori, informaţia statistică extrasă dintr-un volum oarecare de date îşi pierde din semnificaţie dacă timpul dintre recoltarea datelor şi rezultatul obţinut din prelucrarea lor, este mare.

În aceste situaţii, este preferabil să avem la dispoziţie metode rapide (şi care să implice şi un cost cît mai mic) de analiză a datelor deoarece datorită unor cerinţe de ordin economic se impune înlocuirea unor metode statistice care deşi precise, sînt costisitoare atît ca durată cît şi ca preţ.

Un exemplu clasic în această privinţă îl constituie acela al amplitudinii de selecţie care este folosită în estimarea abaterii standard.

Amplitudinea de selecţie, în ciuda faptului că nu dă întotdeauna o precizie ridicată, este de preferat calculul estimaţiei nedeplasate clasice al parametrului σ, datorită uşurinţei sale de calcul. În mod curent, în practica fiselor de control statistica de calitate ea a înlocuit oricare din estimaţiile parametrului σ bazate pe $\sqrt{\sum_1^n (x_i - \bar{x})^2}$ deşi cu aceştia s-ar obţine rezultate mult mai precise.

După cum se desprinde din acest exemplu, o economie substanţială se realizează cu o statistică mai puţin eficientă decît cu o statistică eficientă.

Mosteller numeşte acest tip de statistici „statistici ineficiente".

Este necesar însă să se atragă atenţia asupra faptului că deşi aşa numitele statistici „ineficiente" sînt maleabile la calcul nu le conferă dreptul de a fi folosite în orice situaţie, fără discernămînt.

Este suficient să ne gîndim — spune Mosteller — la experimentele agricole, unde deseori trebuie să aşteptăm să treacă un sezon pentru a recolta un set de date şi unde fiecare observaţie are un cost destul de ridicat.

Scanned with OKEN Scanner

În acest caz, experimentatorul dorește să obțină o cantitate de informație cît mai mare și mai semnificativă, așadar aici folosirea statisticilor „ineficiente" nu este indicată.

Teoria statisticilor sistematice a fost dezvoltată de Ogawa (1951) Higuchi (1956) și Blom (1956, 1958).

4.2. Estimatorul de tip Gupta

În cazul selecțiilor necensorizate, Ali și Chan (1964) au arătat că estimatorul propus de Gupta (1952) capătă forma :

$$\hat{\sigma}_G = \frac{1}{\sum_1^n \varepsilon_i^2} \sum_{1,1}^{n\,1} \varepsilon_i x_{(i)} \tag{24}$$

unde $\varepsilon_i = M(y_{(i)})$, $y_{(i)} = \dfrac{x_{(i)} - \mu}{\sigma}$.

Estimatorul $\hat{\sigma}_G$ este asimptotic eficient și repartizat normal cu media σ și dispersia

$$\sigma^2/2n \left(\sum_1^n \varepsilon_i^2/n \right)^2 \tag{25}$$

Demonstrația dată de Ali și Chan se bazează pe liniarizarea convenabilă a ecuației de verosimilitatea maximă.

Ecuația de verosimilitate maximă are forma :

$$\sum_1^n (y_{(i)}^2 - 1) = 0$$

Conform teoremei limită centrală

$$\lim_n P \left\{ \frac{\sum_1^n (y_{(i)}^2 - 1)}{\sqrt{2n}} < u \right\} = \Phi(u)$$

Rezultă deci că statistica $\dfrac{1}{\sqrt{n}} \sum_1^n (y_{(i)}^2 - 1)$ este asimptotică $N(0, 2)$.

Dezvoltînd această statistică în serie Taylor în raport cu ε se obține :

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_1^n (y_{(i)}^2 - 1) = a_n + \frac{2}{\sqrt{n}} \cdot \nu_n + R_n \tag{26}$$

unde :

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_1^n (\varepsilon_i^2 - 1), \tag{27}$$

$$\nu_n = \sum_1^n \varepsilon_i (y_{(i)} - \varepsilon_i) \tag{28}$$

și

$$R_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_1^n (y_{(i)}^2 - \varepsilon_i)^2 \tag{29}$$

Scanned with OKEN Scanner

În această situaţie are loc

TEOREMA 1 (Ali, Chan (1964)) : $\lim a_n \neq 0$.

Demonstraţie. Fie ξ_i soluţia ecuaţiei $\Phi(y) = \dfrac{i}{n+1}$

Pentru n suficient de mare, dacă $2i > n+1$, Blom (1958) a arătat că

$$\Phi(\varepsilon_i) \geqslant \Phi(\xi_i)$$

Urmează deci că : $\sum_1^r \varepsilon_i^2 \geqslant \sum_1^n \xi_i^2$

Avem :

$$0 \leqslant M(R_n) = -a_n = \sqrt{n}\left(1 - \frac{1}{n}\sum_1^n \varepsilon_i^2\right) \leqslant \sqrt{n}\left(1 - \frac{\sum_1^n \xi_i^2}{n+1}\right)$$

Considerînd graficul funcţiei y^2 în raport cu $\Phi(y)$, se observă că întrucît:

$$\frac{\mathrm{d}^2(y^2)}{\mathrm{d}\Phi^2} = \frac{2(1+y^2)}{\varphi^2(y)} > 0 \text{ pentru orice } y,$$

acesta este întotdeauna simetric în raport cu $\dfrac{1}{2}$ şi concav.

Fie A suma ariilor A_i ale trapezelor ce au vîrfurile în punctele de coordonate :

$$\left\{\left(\frac{i}{n+1},\ \xi_i^2\right),\ \left(\frac{i}{n+1},\ 0\right),\ \left(\frac{i+1}{n+1},\ 0\right),\ \left(\frac{i+1}{n+1},\ \xi_{i+1}^2\right)\right\}$$

pentru $i = 1, 2, \ldots, n$, după cum indică figura 4.

Fie B, aria domeniului mărginit de graful funcţiei, axa Φ şi dreptele $\Phi = \dfrac{n}{n+1}$ (sau 0) şi $\Phi = 1\left(\text{sau } \dfrac{1}{n+1}\right)$. Atunci :

$$A = \frac{1}{2}\left(\xi_1^2 + \xi_2^2 + \ldots + \xi_{n-1}^2 + \xi_n^2\right)\frac{1}{n+1} \leqslant \frac{\Sigma \xi_i^2}{n+1}$$

iar

$$B = \int_{\xi_n}^{\infty} y^2 \mathrm{d}\Phi(y)$$

De asemenea, din figura 4 rezultă inegalitatea :

$$A + 2B > \int_{-\infty}^{\infty} y^2 \mathrm{d}\Phi(y) = 1$$

Aşadar

$$1 - \frac{\sum_{i=1}^n \xi_i^2}{n+1} < 2\int_{\xi_n}^{\infty} y^2 \mathrm{d}\Phi(y)$$

Scanned with OKEN Scanner

Pentru $\xi_n > 1$ (care se întîmplă pentru $n=6$) avem :

$$\int_{\xi_n}^{\infty} y^2 d\Phi(y) < \int_{\xi_n}^{\infty} y^3 d\Phi(y) = 2\varphi(\xi_n)\left(\frac{1}{2}\xi_n^2 + 1\right)$$

deci se poate scrie că :

$$\left[\sqrt{n}\left(1 - \frac{\sum_1^n \xi_i^2}{n+1}\right)\right]^2 < 16n\,\varphi^2(\xi_n)\left(\frac{1}{2}\xi_n^2 + 1\right)^2 =$$

$$= \frac{\varphi(\xi_n)}{\xi_n(1-\Phi(\xi_n))}[\Phi(\xi_n)]\left[16\varphi(\xi_n)\left(\frac{1}{2}\xi_n^5 + \xi_n^3 + \xi_n\right)\right]$$

Cînd $n \to \infty$, $\xi_n \to 0$ și deci primul factor tinde către 1, al doilea tot cîte 1 iar ultimul către 0 și deci teorema este demonstrată.

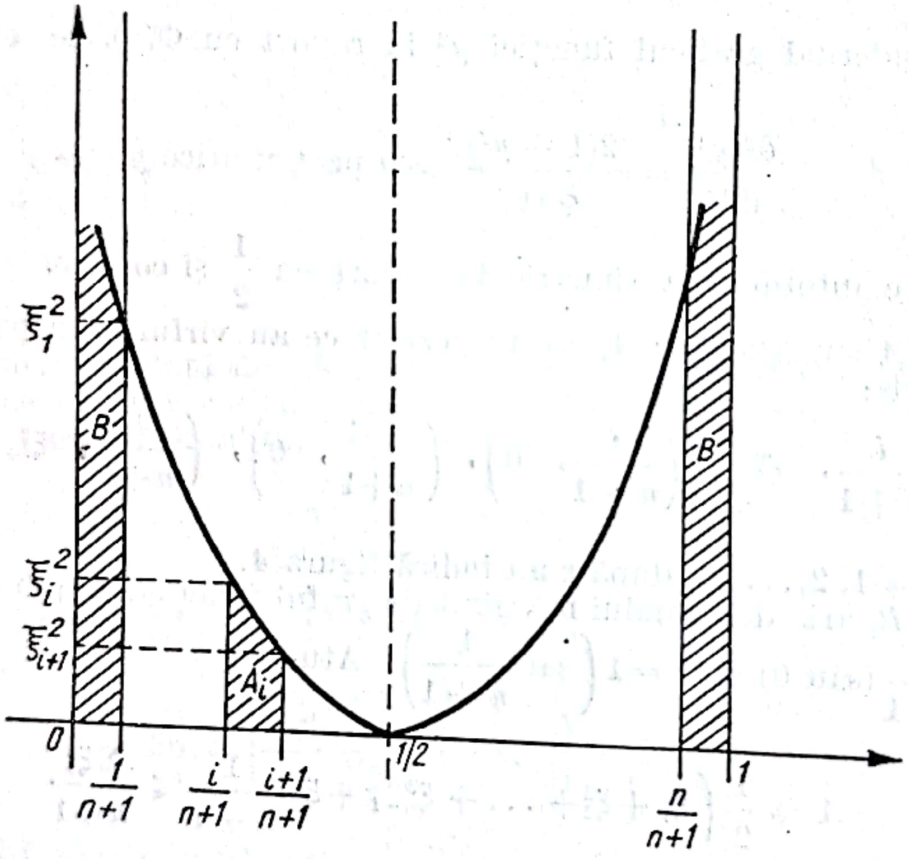


Fig. 4

COROLAR :

$$\lim_n \frac{\sum_1^n \varepsilon_i^2}{n} = 1$$

TEOREMA 2. (Ali, Chan (1964)). *Dacă* $\{z_n\}_{n\in N}$ *este un șir de variabile aleatoare nenegative cu proprietatea :* $\lim_n M(z_n)=0$ *atunci* $\{z_n\}_{n\in N}$ *converge în probabilitatea către* 0.

Demonstrație. Deoarece pentru orice $\delta > 0$ avem :

$$M(z_n) = \int_{-\infty}^{\infty} z f_n(z) dz \geq \delta \int_{\delta}^{\infty} f_n(z) dz = \delta P\{z_n \geq \delta\} \geq 0$$

Scanned with OKEN Scanner

unde f_n este densitatea de repartiţie a variabilei z_n, urmează că

$$\lim_n P\{z_n \geqslant \delta\} \leqslant \lim_n \frac{M(z_n)}{\delta} = 0$$

TEOREMA 3. (Ali, Chan (1964)). *$\{R_n\}_{n \in N}$ converge în probabilitatea către* 0.

Demonstraţia se bazează pe faptul că $R_n \geqslant 0$ şi pe observaţia că $\lim_n M(R_n) = \lim_n (-a_n) = 0$

Conform teoremei 2 rezultă convergenţa în probabilitate către 0 a lui $\{R_n\}_{n \in N}$.

În acest mod, s-a reuşit să demonstreze că $2\nu_n/\sqrt{n}$ este asimptotic $N(0, 2)$, astfel că ecuaţia de verosimilitate maximă poate fi scrisă asimptotic ca :

$$\nu_n = \sum_1^n \varepsilon_i (y_{(i)} - \varepsilon_i) = 0$$

Înlocuind $y_{(i)}$ prin $(x_{(i)} - \mu)/\sigma$ rezultă $\hat{\sigma}_G$.

Deoarece $\frac{2\nu_n}{\sqrt{n}} \sim N(0, 2)$ rezultă că asimptotic

$$\hat{\sigma}_G \sim N\left(\sigma, \frac{\sigma^2}{2n\left(\sum_1^n \varepsilon_i^2/n\right)^2}\right)$$

Conform corolarului teoremei 1 rezultă că asimptotic

$$D^2(\hat{\sigma}_G) = \frac{\sigma^2}{2n}$$

adică tocmai marginea inferioară a inegalităţii Rao-Cramer, deci $\hat{\sigma}_G$ este asimptotic eficient.

În tabelul 8 se dau valorile dispersiei şi a eficienţei estimatorului de tip Gupta pentru $n = 2\ (1)\ 10$, relativă la $\hat{\sigma}_s$.

Tabelul 8

n	$\frac{1}{\sigma^2} D^2(\hat{\sigma}_G)$	$e_n(\hat{\sigma}_G)$
2	0,57082	1,000
3	0,27548	0,992
4	0,18013	0,989
5	0,13342	0,988
6	0,10580	0,987
7	0,08759	0,988
8	0,07469	0,988
9	0,06509	0,988
10	0,57660	0,989

Se observă că eficienţa estimatorului $\hat{\sigma}_G$ este foarte ridicată chiar şi pentru selecţii mici, ceea ce îl recomandă în aplicaţii.

Scanned with OKEN Scanner

§5. Metoda celor mai mici pătrate și statisticile de ordine în cazul parametrilor de poziție și de împrăștiere

5.1. Fie $X_1, X_2, \ldots, X_n$ o selecție asupra unei variabile aleatoare X continuă pentru care densitatea de repartiție se poate pune sub forma

$$p(x) = \frac{1}{\sigma} g\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right), \tag{30}$$

sau cu alte cuvinte variabila aleatoare X aparține familiei $\mathcal{Q}$ de repartiții continui ce depinde numai de parametrii μ (nu neapărat media) de poziția și σ (nu neapărat abaterea medie pătratică) de împrăștiere.

Variabila aleatoare $Y = (X-\mu)/\sigma$ are densitatea de repartiție $g(y)$ (independentă de μ și σ).

Observații. i) Familiile repartițiilor exponențiale și normală aparțin clasei $\mathcal{Q}$.

ii) Deoarece

$$Y_{(r)} = (X_{(r)} - \mu)/\sigma, \qquad 1 \leqslant r \leqslant n$$

urmează că momentele statisticii $Y_{(r)}$ depind numai de forma funcției g și nu de pe μ și σ.

Dacă introducem notațiile

$$MY_{(r)} = \alpha_r, \ \operatorname{cov}(Y_{(r)}, Y_{(s)}) = \beta_{rs}, \qquad 1 \leqslant s \leqslant n,$$

atunci

$$MX_{(r)} = \mu + \sigma\alpha_r, \ \operatorname{cov}(X_{(r)}, X_{(s)}) = \sigma^2 \beta_{rs} \tag{31}$$

Astfel $MX_{(r)}$ este o funcție liniară de μ și σ cu coeficienți constanți și $\operatorname{cov}(X_{(r)}, X_{(s)})$ este cunoscută în afară de σ^2.

Din Observația ii) urmează că putem aplica teorema lui Gauss-Markov pentru a obține estimatori nedeplasați pentru μ și σ care au dispersia minimă în clasa estimatorilor lineari nedeplasați (31) se poate pune sub forma :

$$M\mathbf{X} = \mu.\mathbf{1} + \sigma\alpha \tag{32}$$

unde

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} X_{(1)} \\ X_{(2)} \\ \vdots \\ X_{(n)} \end{pmatrix}, \ \alpha = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}, \ 1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

Cu notațiile :

$$\mathbf{A} = (1, \ \alpha), \qquad \theta' = (\mu, \ \sigma),$$

(32) se scrie

$$M\mathbf{X} = \mathbf{A}\theta$$

Scanned with OKEN Scanner

Matricea de covarianţe a statisticilor $X_{(r)}$ este

$$\mathcal{C}(X) = \sigma^2 \mathbf{B}$$

Minimizînd

$$(\mathbf{X}-\mathbf{A}\theta)' \mathbf{B}^{-1}(\mathbf{X}-\mathbf{A}\theta)$$

în raport cu θ, obţinem ca estimator al parametrului θ prin metoda celor mai mici pătrate

$$\theta^* = (\mathbf{A}'\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}'\mathbf{B}^{-1}\mathbf{X} \tag{33}$$

Avem

$$\mathcal{C}(\theta^*) = (\mathbf{A}'\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}'\mathbf{B}^{-1}\,\sigma^2\,\mathbf{B}\,\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}(\mathbf{A}'\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A})^{-1} = \sigma^2(\mathbf{A}'\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A})^{-1} \tag{34}$$

unde toate elementele matricei

$$\mathbf{A}'\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1' \\ \alpha' \end{pmatrix}\mathbf{B}^{-1}(1, \alpha) = \begin{pmatrix} 1'\mathbf{B}^{-1}1 & 1'\mathbf{B}^{-1}\alpha \\ \alpha'\mathbf{B}^{-1}1 & \alpha'\mathbf{B}^{-1}\alpha \end{pmatrix},$$

sînt scalari.

Deoarece

$$(\mathbf{A}'\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A})^{-1} = \frac{1}{|\Delta|}\begin{pmatrix} \alpha'\mathbf{B}^{-1}\alpha & -\alpha'\mathbf{B}^{-1}1 \\ -1'\mathbf{B}^{-1}\alpha & 1'\mathbf{B}^{-1}1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}'\mathbf{B}^{-1} = \begin{pmatrix} 1'\mathbf{B}^{-1} \\ \alpha'\mathbf{B}^{-1} \end{pmatrix}$$

unde $\Delta = \mathbf{A}'\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}$, (33) devine

$$\theta^* = \frac{1}{|\Delta|}\begin{pmatrix} \alpha'\mathbf{B}^{-1}\alpha 1'\mathbf{B}^{-1} - \alpha'\mathbf{B}^{-1}1\alpha'\mathbf{B}^{-1} \\ -1'\mathbf{B}^{-1}\alpha 1'\mathbf{B}^{-1} + 1'\mathbf{B}^{-1}1\alpha'\mathbf{B}^{-1} \end{pmatrix}\mathbf{X} \tag{33'}$$

Urmează că

$$\mu^* = -\frac{1}{|\Delta|}\alpha'\mathbf{B}^{-1}(1\alpha' - \alpha 1')\mathbf{B}^{-1}\mathbf{X} = -\alpha'\Gamma\mathbf{X}, \tag{35}$$

$$\sigma^* = -\frac{1}{|\Delta|}1'\mathbf{B}^{-1}(1\alpha' - \alpha 1')\mathbf{B}^{-1}\mathbf{X} = 1'\Gamma\mathbf{X} \tag{36}$$

şi din (34) obţinem

$$D^2(\mu^*) = \frac{\sigma^2}{|\Delta|}\alpha'\mathbf{B}^{-1}\alpha \tag{37}$$

$$D^2(\sigma^*) = \frac{\sigma^2}{|\Delta|}1'\mathbf{B}^{-1}1 \tag{38}$$

$$\operatorname{cov}(\mu^*, \sigma^*) = -\frac{\sigma^2}{|\Delta|}1'\mathbf{B}^{-1}\alpha. \tag{39}$$

Scanned with OKEN Scanner

Astfel μ^* şi σ^* pot fi exprimate ca funcţii lineare de statistici de ordine

$$(35',\ 36') \qquad \mu^* = \sum_1^n \beta_i X_{(i)}, \qquad \sigma^* = \sum_1^n \gamma_i X_{(i)}$$

cu coeficienţi care pot fi tabelaţi.

Observaţie. Deoarece matricea de covarianţe nu este diagonală, avem de a face cu o generalizare a Teoremei lui Gauss-Markov, estimatorii obţinuţi fiind estimatori de cel mai mic pătrat generalizaţi.

Rezultatele din acest paragraf se datoresc lui Lloyd (1952). De asemenea se mai pot vedea Kendall şi Stuart (1961), Sarhan şi Greenberg (1962), D. Dumas (1966), David (1970).

5.2. În cazul în care $\mathbf{X}$ are o repartiţie simetrică de medie μ, repartiţia vectorului

$$(Y_{(1)}, Y_{(2)}, \ldots, Y_{(n)})$$

este aceeaşi cu a vectorului

$$(-Y_{(n)}, -Y_{(n-1)}, \ldots, -Y_{(1)})$$

Dacă punem

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} 0 & & & 1 \\ & & \iddots & \\ & 1 & & \\ 1 & & & 0 \end{pmatrix}$$

atunci

$$\begin{pmatrix} -Y_{(n)} \\ -Y_{(n-1)} \\ \vdots \\ -Y_{(1)} \end{pmatrix} = -\mathbf{J} \begin{pmatrix} Y_{(1)} \\ Y_{(2)} \\ \vdots \\ Y_{(n)} \end{pmatrix}$$

Avem :

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}' = \mathbf{J}^{-1}, \qquad \mathbf{J}'\,\mathbf{1} = \mathbf{1}$$

Deoarece $\mathbf{Y}$ şi $-\mathbf{JY}$ au aceeaşi repartiţie urmează că

$$(40) \qquad M\mathbf{Y} = M(-\mathbf{JY}), \qquad (\alpha = -\mathbf{J}\alpha)$$

şi

$$(41) \qquad \mathcal{C}(\mathbf{Y}) = \mathbf{B} = \mathcal{C}\,(-\mathbf{JY})$$

Din (41) obţinem

$$\mathbf{B} = -\mathbf{JB}\,(-\mathbf{J}) = \mathbf{J}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{J}^{-1}$$

sau

$$\mathbf{B}^{-1} = \mathbf{J}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{J}$$

Scanned with OKEN Scanner

Urmează că

$$\mathbf{1}'\mathbf{B}^{-1}\alpha = \mathbf{1}'(\mathbf{J}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{J})(-\mathbf{J}\alpha) = -(\mathbf{1}'\mathbf{J})\mathbf{B}^{-1}\mathbf{J}^2\alpha = \mathbf{1}'\mathbf{B}^{-1}\alpha$$

Astfel

$$\mathbf{1}'\mathbf{B}^{-1}\alpha = -\mathbf{1}'\mathbf{B}^{-1}\alpha = 0, \tag{42}$$

iar din (39) rezultă că μ^* și σ^* sînt necorelate.
(35), (36), (37) și (38) devin

$$\mu^* = \frac{\alpha'\mathbf{B}^{-1}\alpha}{\mathbf{1}'\mathbf{B}^{-1}\mathbf{1}} : \frac{\mathbf{1}'\mathbf{B}^{-1}\mathbf{X}}{\alpha'\mathbf{B}^{-1}\alpha} = \frac{\mathbf{1}'\mathbf{B}^{-1}\mathbf{X}}{\mathbf{1}'\mathbf{B}^{-1}\mathbf{1}} \tag{35'}$$

$$\sigma^* = \frac{\alpha'\mathbf{B}^{-1}\mathbf{X}}{\alpha'\mathbf{B}^{-1}\alpha} \tag{36}$$

$$D^2(\mu^*) = \frac{\sigma^2}{\mathbf{1}'\mathbf{B}^{-1}\mathbf{1}} \tag{37}$$

$$D^2(\sigma^*) = \frac{\sigma^2}{\alpha'\mathbf{B}^{-1}\alpha} \tag{38}$$

Observații. i) Dacă

$$\mathbf{1}'\mathbf{B}^{-1} = \mathbf{1}' \text{ sau echivalent dacă } \mathbf{B}\mathbf{1} = \mathbf{1}, \tag{43}$$

atunci μ^* se reduce la media de selecție (cazul repartiției normale reduse).

ii) Se arată că

$$D^2(\mu^*) < \frac{\sigma^2}{n},$$

cu excepția cazului în care este satisfăcută (43).

Pentru rezultatul din aceste paragraf și pentru rezultate similare în cazul în care $\mathbf{X}$ nu are o repartiție simetrică se pot vedea Lloyd (1952), Downton (1953) și Govindarajulu (1968).

5.3. Pentru a putea aplica rezultatul lui Lloyd trebuie să cunoaștem mediile și matricea de covariațe a statisticilor de ordine. Faptul că adeseori covariațele se determină cu dificultate, a condus pe Gupta (1952) la metoda pe care o vom prezenta în cele ce urmează și care se aplică numai cînd mediile sînt cunoscute, adică cînd $\mathbf{B}=\mathbf{I}$, matricea unitate. Atunci $\mathbf{B}^{-1}=\mathbf{I}$ și rezultatele anterioare se simplifică. Avem

$$|\Delta| = \mathbf{1}'\mathbf{B}^{-1}\mathbf{1} \cdot \alpha'\mathbf{B}^{-1}\alpha - (\mathbf{1}'\mathbf{B}^{-1}\alpha)^2 =$$

$$= n \Sigma \alpha_i^2 - (\Sigma \alpha_i)^2 = n \Sigma (\alpha_i - \bar{\alpha})^2$$

Scanned with OKEN Scanner

și estimatorul pentru μ dat de (35) devine

$$\mu^{**} = \frac{\Sigma \alpha_i^2 \Sigma X_{(i)} - \Sigma \alpha_i \cdot \Sigma \alpha_i X_{(i)}}{|\Delta|} \tag{35''}$$

sau

$$\mu^{**} = \sum_1^n b_i X_{(i)}$$

unde

$$b_i = \frac{\Sigma \alpha_i^2 - \alpha_i \Sigma \alpha_i}{|\Delta|}$$

$$= \frac{\Sigma(\alpha_i - \overline{\alpha})^2 + \overline{\alpha}\Sigma\alpha_i - \alpha_i \cdot \Sigma \alpha_i}{|\Delta|} \tag{44}$$

$$= \frac{1}{n} - \frac{\overline{\alpha}(\alpha_i - \overline{\alpha})}{\Sigma(\alpha_i - \overline{\alpha})^2}$$

În cazul în care **X** are o repartiţie simetrică $\mu^{**} = \overline{X}$.
De asemenea

$$\sigma^{**} = \Sigma c_i X_{(i)}, \tag{36''}$$

unde

$$c_i = \frac{\alpha_i - \overline{\alpha}}{\Sigma(\alpha_i - \overline{\alpha})^2} \tag{45}$$

§6. Metoda lui Blom (1958, 1962) pentru estimarea parametrilcr de pcziţie şi de împrăştiere

6.1. Aproximarea momentelor cu ajutorul inversei funcţiei de repartiţie. (Pearson, K., Pearson, M. V. (1931))

Dacă considerăm transformarea $u = F(x)$, atunci statistica de ordine $X_{(r)}$ devine statistica de ordine $U_{(r)}$ într-o selecţie de volum n asupra unei variabile $\sim R$ (0.1). Inversăm relaţia

$$U_{(r)} = F(X_{(r)})$$

scriind

$$X_{(r)} = G(U_{(r)})$$

şi dezvoltăm $G(U_{(r)})$ în serie Taylor în jurul

$$M(U_{(r)}) = \frac{r}{n+1} = p_r \tag{46}$$

Scanned with OKEN Scanner

Obţinem

$$X_{(r)} = G(p_r) + (U_{(r)} - p_{(r)})\, G'(p_r) + \frac{1}{2}(U_{(r)} - p_{(r)})^2\, G''(p_r) +$$

(47)

$$+ \frac{1}{3!}(U_{(r)} - p_{(r)})^3\, G'''(p_r) + \dots$$

Cu notaţiile

$$G(p_r) = G_r \quad \text{şi} \quad q_r = 1 - p_r,$$

şi din relaţia (47), obţinem

$$(48) \qquad M(X_{(r)}) = G_r + \frac{p_r q_r}{2(n+2)} G_r'' + \frac{p_r q_r}{(n+2)^2}\left[\frac{1}{3}(q_r - p_r) G_r''' + \frac{1}{8} p_r q_r G_r^{IV}\right]$$

$$(49) \qquad D^2(X_r) = \frac{p_r q_r}{n+2} G_r'^2 + \frac{p_r q_r}{(n+2)^2}\Big[2(q_r - p_r) G_r' G_r'' +$$

$$+ p_r q_r \left(G_r' G_r''' + \frac{1}{2} G_r''^2\right)\Big].$$

$$(50) \quad \operatorname{cov}(X_{(r)}, X_{(s)}) = \frac{p_r q_s}{n+2} G_r' G_s' + \frac{p_r\, q_s}{(n+2)^2}\Big[(q_r - p_r) G_r'' G_s' +$$

$$+ (q_s - p_s)\, G_r' G_s'' + \frac{1}{2} p_r q_r G_r''' G_s' + \frac{1}{2} p_s q_s G_r' G_s''' + \frac{1}{2} p_r\, q_s\, G_r''\, G_s''\Big]$$

Observaţie. Deoarece $p_r = F(G_r)$,

$$G_r' = \frac{1}{\mathrm{d}p_r/\mathrm{d}G_r} = \frac{1}{p(G_r)}$$

unde $p(G_r)$ este densitatea de repartiţie a variabilei X în punctul G_r.

Exemplul 1. Dacă $X \sim N(0, 1)$, atunci

$$G(p_r) = \Phi^{-1}(p_r), \quad G'(p_r) = 1/\varphi(G)$$

$$G''(p_r) = \frac{d}{\mathrm{d}\Phi(G)}\left(\frac{1}{\varphi(G)}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}G}\left(\frac{1}{\varphi(G)}\right)\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}\Phi(G)},$$

şi cum

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}G}\varphi(G) = -G\varphi(G),$$

obţinem

$$G''(p_r) = \frac{G}{\varphi^2(G)}$$

Scanned with OKEN Scanner

De asemenea, găsim

$$G'''(p_r) = \frac{1+2G^2}{\varphi^3(G)}, \quad G^{IV}(p_r) = \frac{G(7+6G^3)}{\varphi^4(G)}$$

6.2. Metoda lui Blom

Prin metoda lui Blom se obţin cei mai buni estimatori lineari nedeplasaţi. Aceşti estimatori cer mediile exacte ale statisticilor de ordine $Y_{(r)}$ pentru variabila redusă $Y = (X-\mu)/\sigma$ cu funcţia de repartiţie F, însă folosesc aproximaţiile asimptotice ale matricei de covarianţe.

Punctul de plecare în metoda lui Blom este aproximarea $\operatorname{cov}(Y_{(r)}, Y_{(s)})$ $(r \leqslant s)$ prin primul termen din (50) şi anume

$$\operatorname{cov}(Y_{(r)}, Y_{(s)}) \simeq \frac{p_r q_s}{(n+2)\, p(G_r)\, p(G_s)},$$

unde :

$$p_r = \frac{r}{n+1}, \qquad q_s = 1-p_s,$$

$$G_r = F^{-1}(p_r),$$

$p(G_r)$ este densitatea de repartiţie a variabilei Y în G_r

Dacă punem $f_i = P(G_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ atunci

$$\operatorname{cov}(f_i Y_{(i)}, \quad f_j Y_{(j)}) \simeq \frac{p_i q_j}{n+2} \qquad i < j$$

şi, luînd

$$Z_{(i)} = f_{i+1}\, Y_{(i+1)} - f_i Y_{(i)}, \; f_0 = f_{n+1} = 0, \tag{51}$$

pentru $0 \leqslant i \leqslant j \leqslant n$, avem

$$D^2(Z_{(i)}) \simeq \frac{n}{(n+2)^2(n+2)}, \quad \operatorname{cov}(Z_{(i)}, Z_{(j)}) \simeq \frac{-1}{(n+1)^2(n+2)} \tag{52}$$

independent de F.

Pentru a estima combinaţia liniară

$$\eta = k_1\mu + k_2\sigma$$

de μ şi σ, scriem estimator linear $\tilde{\eta}$ pentru η ca

$$\tilde{\eta} = \sum_1^n g_i X_{(i)} = \Sigma\, g_i(\mu + \sigma Y_{(i)})$$

Scanned with OKEN Scanner

Din (51), obţinem

$$f_i Y_{(i)} = \sum_0^{i-1} Z_{(j)}$$

Înlocuind coeficienţii g_i prin coeficienţii

$$h_0, h_1, \ldots, h_n$$

definiţi (cu excepţia unei constante aditive) de

$$g_i = f_i(h_i - h_{i-1}),$$

estimatorul $\tilde{\eta}$ devine

$$(53)\quad \tilde{\eta} = \mu \sum_1^n f_i(h_i - h_{i-1}) + \sigma \sum_1^n (h_i - h_{i-1}) \sum_0^{i-1} Z_{(j)} = \sum_0^n h_i[\mu(f_i - f_{i+1}) - \sigma Z_{(i)}]$$

Atunci

$$M(\tilde{\eta}) = \mu \sum_0^n c_{1i} h_i + \sigma \sum_0^n c_{2i} h_i$$

unde

$$c_{1i} = f_i - f_{i+1}, \quad c_{2i} = f_i \alpha_i - f_{i+1} \alpha_{i+1}$$

Ţinînd seama de (52)

$$D^2(\tilde{\eta}) = \sigma^2 \left[\sum_0^n h_i^2 D^2(Z_{(i)}) + \sum_{i \neq j} h_i h_j \operatorname{cov}(Z_{(i)}, Z_{(j)}) \right] \simeq$$

(54)

$$\simeq \frac{\sigma^2}{(n+1)(n+2)} \sum_0^n (h_i - \bar{h})^2,$$

unde

$$\bar{h} = \frac{1}{n+1} \Sigma h_i.$$

Astfel, cu ajutorul aproximaţiei folosite, problema estimării combinaţiei liniare η s-a redus la minimizarea relaţiei (54) supusă la condiţiile de nedeplasare

$$\sum_0^n c_{1i} h_i = k_1, \qquad \sum_0^n c_{2i} h_i = k_2$$

Aceasta conduce la soluţiile

$$h_i = \bar{h} + a_1 c_{1i} + a_2 c_{2i},$$

Scanned with OKEN Scanner

unde a_1 și a_2 sînt multiplicatorii lui Lagrange dați de

$$a_1 = d^{11}k_1 + d^{12}k_2, \qquad a_2 = d^{21}k_1 + d^{22}k_2,$$

$d^{\alpha\beta}(\alpha, \beta = 1,2)$ fiind elementele matricei inverse matricei $\mathbf{D} = (d_{\alpha\beta})$ cu

$$d_{\alpha\beta} = \sum_0^n c_{\alpha i}c_{\beta i}, \quad \alpha, \beta = 1,2 \tag{55}$$

Cu h_i astfel definiți, $\tilde{\eta}$ dat de (53) este cel mai bun estimator linear nedeplasat pentru η.

Observații. i) Pentru $k_1 = 0$, $k_2 = 1$

$$\tilde{\mu} = \sum_1^n g_{1i}X_{(i)}, \qquad \tilde{\sigma} = \sum_1^n g_{2i}X_{(i)} \tag{56}$$

unde

$$g_{\alpha i} = f_i[d^{\alpha 1}(c_{1i} - c_{1,i-1}) + d^{\alpha 2}(c_{2i} - c_{2,i-1})], \qquad \alpha = 1,2 \tag{57}$$

ii) Din (54) avem

$$\begin{pmatrix} D^2(\tilde{\mu}) & \operatorname{cov}(\tilde{\mu}, \tilde{\sigma}) \\ & D^2(\tilde{\sigma}) \end{pmatrix} \simeq \frac{\sigma^2}{(n+1)(n+2)} \begin{pmatrix} d^{11} & d^{12} \\ & d^{22} \end{pmatrix} \tag{58}$$

Astfel, oricare ar fi n, matricea inversă, prin această metodă, este redusă la o matrice 2×2. Cu toate că aproximațiile asimptotice nu dau rezultate bune în selecții mici, au o eficiență ridicată, deoarece eficiențele statisticilor lineare nu sînt sensibile la schimbarea coeficienților.

§7. Estimarea parametrilor de poziție și de împrăștiere din date censorizate

7.1. Definiții

Prin date censorizate vom înțelege că într-o selecție potențială de volum n, un număr cunoscut de observații este pierdut în fiecare extremitate (cesorizare simplă) sau în amîndouă extremitățile (censorizare dublă). Un exemplu important apare în determinarea duratei de funcționare a unui utilaj cînd ne hotărîm să oprim experimentul de îndată ce $N(<n)$ dintre utilajele cercetate în vederea stabilirii duratei de funcționare s-a defectat. Se poate opri de îndată ce mediana de selecție m_e poate fi calculată (adică după $\left[\frac{1}{2}n\right]+1$ observații) și a folosi m_e ca estimație a mediei duratei de funcționare μ. Cînd duratele de funcționare sînt repartizate normal, în selecții de volum mare, μ poate fi estimat cu aceeași acuratețe de m_e într-o selecție de volum $n\left(\frac{1}{2}\pi\right) \simeq 1{,}57\,n$ ca media într-o selecție completă de volum n.

Scanned with OKEN Scanner

Acest tip de censorizare poartă numele de censorizare de tipul II spre a o deosebi de situaţia în care selecţia este tăiată după (sau înaintea) unui punct fix. O astfel de censorizare poartă numele de censorizare de tipul II şi numărul de observaţii censorizate este o variabilă aleatoare.

Amîndouă formele de censorizare sînt diferite de trunchiere unde populaţia este tăiată şi numărul de observaţii pierdute este necunoscut.

7.2. Repartiţia normală

7.2.1. Istoric

Estimarea parametrilor repartiţiei normale cu ajutorul datelor cenzorizate a fost considerată de mai mulţi autori care au folosit diferite metode incluzînd metoda celor mai mici patrate şi metoda verosimilităţii maxime.

Gupta (1952) obţine (pentru $n \leqslant 10$) cei mai buni estimatori liniari pentru medie şi dispersie folosind date censorizate.

Sarhan şi Greenberg (1956, 1958 a, b) estimează media şi abaterea medie pătratică pe baza datelor simplu şi dublu censorizate ($n \leqslant 20$) prin metoda celor mai mici pătrate.

Saw (1959) obţine estimatori nedeplasaţi pentru medie şi dispersie pe baza unor observaţii censorizate (pentru $n \leqslant 20$).

Dixon (1957, 1960) dă estimatori simplificaţi pentru medie şi abaterea medie pătratică bazate pe selecţii complete şi censorizate, care sînt cel puţin la fel de eficienţi ca cei mai buni estimatori liniari.

Astfel, arată că dacă în fiecare coadă sînt censorizate i observaţii estimatorul pentru medie

$$m_w = \frac{1}{n}\left[\sum_{i+2}^{n-i+1} X_{(s)} + (i+1)(X_{(i+1)} + X_{(n-i)})\right] \tag{59}$$

are eficienţa relativă la estimatorul linear nedeplasat de minimă dispersie cel puţin 0,999, iar dacă avem o censorizare simplă de i observaţii (de exemplu la dreapta), estimatorul

$$m_a = \frac{1}{n+a-1}\left[\sum_{2}^{n-i+1} X_{(s)} + (i+1)\, X_{(n-i)} + aX_{(1)}\right] \tag{60}$$

cu a ales astfel încît m_a să fie nedeplasat, are eficienţa cel puţin 0,96.

Cohen (1950) foloseşte metoda verosimilităţii maxime pentru estimarea mediei şi dispersiei pe baza datelor trunchiate.

Halperin (1952) arată că în cazul datelor simple censorizate, în anumite condiţii de regularitate, estimatorul de maximă verosimilitate a unui singur parametru este consistent şi asimptotic normal repartizat.

Breakwell (1953) obţine estimatori de maximă verosimilitate în cazul unei selecţii simplu cenzorizate şi repartiţia lor asimptotică.

Plackett (1958) arată că estimatorii de maximă verosimilitate sînt asimptotic lineari şi că cei mai buni estimatori liniari nedeplasaţi sînt asimptotic eficienţi şi normali.

Scanned with OKEN Scanner

Plackett obține, un estimator de maximă verosimilitate linearizat și îl compară cu cel mai bun estimator liniar nedeplasat pentru abaterea medie pătratică în cazul unei selecții censorizate ($n \leqslant 10$).

În lucrările din 1959 și 1961 (ale căror principale rezultate le prezentăm în cele ce urmează) Cohen extinde rezultatele date în lucrarea din 1950.

7.2.2. Metoda verosimilității maxime

7.2.2.1. Trunchiere

Presupunem că asupra variabilei aleatoare X de densitate

$$\frac{(2\pi)^{-1/2}\ \sigma \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2\right]}{1-\Phi\left(\frac{x_0-\mu}{\sigma}\right)}, \qquad x \geqslant x_0$$

sînt posibile N observații.

Funcția de verosimilitate este

$$P = [1-\Phi(\xi)]^{-N}(2\pi\sigma^2)^{-\frac{1}{2}N} \exp\left[-\frac{1}{2}\sum_1^N\left(\frac{x_i-\mu}{\sigma}\right)^2\right],$$

unde $\xi = \frac{x_0-\mu}{\sigma}$ și

$$\frac{\partial \ln P}{\partial \mu} = \frac{-N\varphi(\xi)}{\sigma[1-\Phi(\xi)]} + \frac{1}{\sigma^2}\sum_1^N (x_i-\mu)^2 \tag{61}$$

$$\frac{\partial \ln P}{\partial \sigma} = \frac{-N\xi\varphi(\xi)}{\sigma[1-\Phi(\xi)]} - \frac{N}{\sigma} + \frac{1}{\sigma^2}\sum_1^N (x_i-\mu)^2 \tag{62}$$

Punînd

$$m_2 = \frac{1}{N}\sum_1^N (x_i-\bar{x}_N)^2 \text{ și } A(y) = \frac{\varphi(y)}{1-\Phi(y)},$$

Obținem ecuațiile de verosimilitate,

$$\bar{x}_N - \hat{\mu} = \hat{\sigma} A(\xi) \tag{63}$$

$$m_2 + (\bar{x}_N - \hat{\mu})^2 = \hat{\sigma}^2[1 + \hat{\xi}A(\hat{\xi})] \tag{64}$$

Eliminînd $(\bar{x}_N - \hat{\mu})$, obținem

$$\hat{\sigma}^2 = m_2 + \hat{\sigma}^2\hat{A}(\hat{\xi})\,[\hat{A}(\hat{\xi}) - \hat{\xi}] \tag{65}$$

Însă

$$\hat{\sigma}\hat{\xi} = x_0 - \hat{\mu} = x_0 - \bar{x}_N + \hat{\sigma}\hat{A}(\hat{\xi})$$

Scanned with OKEN Scanner

astfel încît

$$\hat{\sigma} = \frac{\bar{x}_N - x_0}{\hat{A}(\hat{\xi}) - \hat{\xi}} \tag{66}$$

Din (65) și (66) obținem

$$\hat{\sigma}^2 = m_2 + \frac{\hat{A}(\hat{\xi})(\bar{x}_N - x_0)^2}{\hat{A}(\hat{\xi}) - \hat{\xi}}$$

$$= m_2 + \hat{\theta}(\bar{x}_N - x_0)^2, \tag{67}$$

unde

$$\hat{\theta} = \frac{\hat{A}(\hat{\xi})}{\hat{A}(\hat{\xi}) - \hat{\xi}} \tag{68}$$

Din (63), (66) și (68)

$$\hat{\mu} = \bar{x}_N - \hat{\sigma}\hat{A}(\hat{\xi}) = \bar{x}_N - \hat{\theta}(\bar{x}_N - x_0), \tag{69}$$

iar din (67) și (66)

$$\frac{m_2}{(\bar{x}_N - x_0)^2} = \frac{\hat{\sigma}^2}{(\bar{x}_N - x_0)^2} - \frac{\hat{A}(\hat{\xi})}{\hat{A}(\hat{\xi}) - \hat{\xi}} = \frac{1 - \hat{A}(\hat{\xi})[\hat{A}(\hat{\xi}) - \hat{\xi})]}{[\hat{A}(\hat{\xi}) - \hat{\xi}]^2} \tag{70}$$

Dacă $\hat{\theta}$ este cunoscută, atunci din (67) și (69) determinăm pe $\hat{\mu}$ și $\hat{\sigma}$. Din

$$\frac{m_2}{(\bar{x}_N - x_0)^2} = \hat{\gamma}$$

determinăm $\hat{\theta}$ din Tabela 1 a lui Cohen (1961).

7.2.2.2. Censorizare de tipul I

Fie N numărul aleator de observații $\geqslant x_0$, numărul censorizat ($<x_0$) fiind r din totalul de n ($N+r=n$). Funcția de verosimilitate corespunzătoare este

$$P = \frac{n!}{r!\,N!}[\Phi(\xi)]^r (2\pi\sigma^2)^{-\frac{1}{2}N} \exp\left[-\sum_1^N \frac{(x_i - \mu)^2}{2\sigma^2}\right] \tag{71}$$

Din

$$\frac{\partial \ln P}{\partial \mu} = \frac{-r\varphi(\xi)}{\sigma\Phi(\xi)} = \frac{1}{\sigma^2}\sum_1^N (x_i - \mu)$$

Scanned with OKEN Scanner

cu $h=r/n$, obţinem :

$$\bar{x}_N - \hat{\mu} = \frac{r}{N}\,\hat{\sigma}A(-\hat{\xi}) = \frac{h}{1-h}\,\hat{\sigma}\,A(-\hat{\xi}) = \hat{\sigma}\,\hat{B},$$

unde

$$\hat{B}(h,\ \xi) = \frac{h}{1-h}\,A(-\hat{\xi})$$

De asemenea

$$m_2 + (\bar{x}_N - \hat{\mu})^2 = \hat{\sigma}^2(1 + \hat{\xi}\hat{B}),$$

astfel încît analog cu (67), (69) şi (70) avem

(72) $$\hat{\sigma}^2 = m_2 + \hat{\lambda}(\bar{x}_N - x_0)^2$$

(74) $$\hat{\mu} = \bar{x}_N - \hat{\lambda}(\bar{x}_N - x_0)$$

(74) $$\hat{\gamma} = \frac{m_2}{(\bar{x}_N - x_0)^2} = \frac{1-\hat{B}(\hat{B}-\hat{\xi})}{(\hat{B}-\hat{\xi})^2}$$

unde $\hat{\lambda} = \hat{B}/(\hat{B}-\hat{\xi})$.

Funcţia auxiliară $\hat{\lambda}$ depinde de două variabile h şi $\hat{\xi}$ sau echivalent de h şi $\hat{\gamma}$; $\hat{\lambda}$ poate fi obţinută din Tabela 2 a lui Cohen (1961).

7.2.2.3. Censorizare de tipul II

Fie $r = N-n$ observaţiile censorizate la stînga de

$$x_1' \leqslant x_2' \leqslant \ldots \leqslant x_r'$$

şi fie x cea mai mică valoare observată. Funcţia de verosimilitate este dată de

$$P = \prod_{i=1}^{N} p(x_i) \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{x_r'} \ldots \int_{-\infty}^{x'} n!\, p(x_1') \ldots p(x_{r-1}')\, p(x_r')\, \mathrm{d}x_1' \ldots \mathrm{d}x_{r-1}'\, \mathrm{d}x_r' =$$

(75) $$= \frac{n!}{r!} F^r(x) \prod_{1}^{N} p(x_i) =$$

$$= \frac{n!}{r!}\left[\Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)\right]^r (2\pi\sigma^2)^{-\frac{1}{2}N} \exp\left[-\frac{1}{2}\sum_{1}^{N}\left(\frac{x_i-\mu}{\sigma}\right)^2\right]$$

Pentru a obţine matricea de covarianţe asimptotică a estimatorilor $\hat{\mu}$ şi $\hat{\sigma}$ procedăm după cum urmează.

Scanned with OKEN Scanner

Primele derivate ale lui lnP se pot scrie

$$\frac{\partial \ln P}{\partial \mu} = \frac{-rA(-y)}{\sigma} + \sum_1^N \frac{x_i - \mu}{\sigma^2},$$

$$\frac{\partial \ln P}{\partial \sigma} = \frac{-ryA(-y)}{\sigma} - \frac{N}{\sigma} - \sum_1^N \frac{(x_i - \mu)^2}{\sigma^3}.$$

Avem :

(76) $$A(-y) = \frac{\varphi(y)}{\Phi(y)}$$

$$\frac{\partial A(-y)}{\partial y} = \frac{\Phi(y)[-y\varphi(y)] - \varphi^2(y)}{[\Phi(y)]^2} = -A(-y)[A(-y) + y]$$

Deci

$$\frac{\partial^2 \ln P}{\partial \mu^2} = \frac{r}{\sigma^2} A(-y)[A(-y) + y] + \frac{N}{\sigma^2} =$$

$$= \frac{N}{\sigma^2}\left\{\frac{h}{1-h} A(-y)[A(-y) + y] + 1\right\}$$

sau

(77) $$\omega_{11} = -\frac{\sigma^2}{N}\frac{\partial^2 \ln P}{\partial \mu^2} = B[A(-y) + y] + 1$$

De asemenea

(78) $$\omega_{12} = -\frac{\sigma^2}{N}\frac{\partial^2 \ln P}{\partial \mu\, \partial \sigma} = B\{1 + y[A(-y) + y]\},$$

(79) $$\omega_{22} = -\frac{\sigma^2}{N}\frac{\partial^2 \ln P}{\partial \sigma^2} = 2 + y\omega_{12}$$

Asimptotic, cînd $N \to \infty$, $y \to y_0 = \Phi^{-1}(h)$. Cu aceasta matricea de covarianţe asimptotică este inversa matricei

$$\begin{pmatrix} \omega_{11} & \omega_{12} \\ \omega_{12} & \omega_{22} \end{pmatrix} \text{ (de ex. } D^2(\hat{\mu}) \simeq \frac{\sigma^2}{N}\frac{\omega_{22}}{\omega_{11}\omega_{22} - \omega_{12}^2} = \frac{\sigma^2}{N}\mu_{11}$$

Scanned with OKEN Scanner

Cohen (1961) tabelează elementele acestei matrici și $\rho(\hat{\mu}, \hat{\sigma})$ ca funcție de y_0.

7.2.2.4. Selecție dublu censorizată

În 1966, Harter și Moore extind rezultatele lui Cohen și Gupta. Se estimează parametrii repartiției normale $N(\mu, \sigma^2)$ cu ajutorul datelor

$$x_{(r_1+1)}, \ldots, x_{(n-r_2)}$$

Funcția de verosimilitate corespunzătoare acestor statistici de ordine este

$$P = \frac{n!}{r_1!\, r_2!} (2\pi\sigma^2)^{-\frac{1}{2}(n-r_1+r_2)} \exp\left\{\sum_{r_1+1}^{n-r_2}\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x_i-\mu}{\sigma}\right)^2\right]\right\} \times$$

(80)

$$\times\left[\Phi\left(\frac{x_{r_1+1}-\mu}{\sigma}\right)\right]^{r_1}\left[1-\Phi\left(\frac{x_{n-r_2}-\mu}{\sigma}\right)^{r_2}\right]$$

Avem

$$\ln P = \ln\frac{n!}{r_1!\, r_2!} - \frac{1}{2} m \ln 2 - m\ln\sigma - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{r_1+1}^{n-r_2}(x_i-\mu) +$$

(81)

$$+ r_1 \ln\Phi(u_1) + r_2 \ln[1-\Phi(u_2)],$$

unde am folosit notațiile:

$$m = n - r_1 + r_2, \qquad u_1 = \frac{x_{r_1+1}-\mu}{\sigma}, \qquad u_2 = \frac{x_{n-r_2}-\mu}{\sigma}$$

Obținem ecuațiile de verosimilități

(82) $$\frac{1}{\sigma^2}\sum_{r_1+1}^{n-r_2}(x_i-\mu) - \frac{r_1}{\sigma}\frac{\varphi(u_1)}{\Phi(u_1)} + \frac{r_2}{\sigma}\frac{u_2\varphi(u_2)}{1-\Phi(u_2)} = 0$$

(83) $$-\frac{m}{\sigma} + \frac{1}{\sigma^3}\sum_{r_1+1}^{n-r_2}(x_i-\mu)^2 - \frac{r_1}{\sigma}\frac{u_1\varphi(u_1)}{\Phi(u_1)} + \frac{r_2}{\sigma}\frac{u_2\Phi(u_2)}{1-\Phi(u_2)} = 0.$$

Scanned with OKEN Scanner

Derivatele de ordinul doi ale relației (81) sînt:

$$\frac{\partial^2 \ln P}{\partial \mu^2} = -\frac{m}{\sigma^2} + \frac{r_1}{\sigma^2}\frac{\varphi(u_1)}{\Phi(u_1)}\left[u_1 + \frac{\varphi(u_1)}{\Phi(u_1)}\right] +$$

(84)

$$+ \frac{r_2}{\sigma^2}\frac{\varphi(u_2)}{1-\Phi(u_2)}\left[u_2 - \frac{\varphi(u_2)}{1-\Phi(u_2)}\right],$$

$$\frac{\partial^2 \ln P}{\partial \mu \partial \sigma} = -\frac{2}{\sigma^3}\sum_{r_1+1}^{n-r_2}(x_i-\mu) - \frac{r_1}{\sigma^2}\frac{\varphi(u_1)}{\Phi(u_1)}\left[u_1^2 + u_1\frac{\varphi(u_1)}{\Phi(u_1)} - 1\right] +$$

(85)

$$+ \frac{r_2}{\sigma^2}\frac{\varphi(u_2)}{1-\Phi(u_2)}\left[u_2^2 - u_2\frac{\Phi(u_2)}{1-\Phi(u_2)} - 2\right],$$

$$\frac{\partial^2 \ln P}{\partial \sigma^2} = \frac{m}{\sigma^2} - \frac{3}{\sigma^4}\sum_{r_1+1}^{n-r_2}(x_i-\mu)^2 - \frac{r_1}{\sigma^2}\frac{u_1\varphi(u_1)}{1-\Phi(u_1)}\left[u_1^2 + u_1\frac{\varphi(u_1)}{\Phi(u_1)} - 2\right] +$$

(86)

$$+ \frac{r_2}{\sigma^2}\frac{u_2\varphi(u_2)}{1-\Phi(u_2)}\left[u_2^2 - u_2\frac{\varphi(u_2)}{1-\Phi(u_2)} - 2\right]$$

Fie

$$q_1 = \frac{r_1}{n}, \quad q_2 = \frac{r_2}{n} \quad \text{și} \quad p = 1 - q_1 - q_2 = \frac{m}{n}$$

Cînd $n \to \infty$ (q_1 și q_2 fixate),

$$u_1 \to \hat{u}_1, \quad u_2 \to \hat{u}_2$$

$$M\left(\sum_{r_1-1}^{n-r_2}\frac{x_i-\mu}{\sigma}\right) \to n\int_{\hat{u}_1}^{\hat{u}_2} t\varphi(t)\,dt = -n[\varphi(\hat{u}_2) - \varphi(\hat{u}_1)],$$

și

$$M\left(\sum_{r_1+1}^{n-r_2}\left(\frac{x_i-\mu}{\sigma}\right)^2\right) \to n\int_{\hat{u}_1}^{\hat{u}_2} t^2\varphi(t)\,dt = n\{p - [\hat{u}_2\,\varphi(\hat{u}_2) - \hat{u}_1\,\varphi(\hat{u}_1)]\},$$

unde

$$q_1 = \Phi(\hat{u}_1) \quad \text{și} \quad q_2 = 1 - \Phi(\hat{u}_2)$$

Scanned with OKEN Scanner

Elementele matricei informaţionale înmulţite prin $\frac{\sigma^2}{n}$ pot fi scrise ca

$$\lim_{n\to\infty} -\frac{\sigma^2}{n} M\left(\frac{\partial^2 \ln P}{\partial u^2}\right) = p + \varphi(\hat{u}_1)\left[\hat{u}_1 + \frac{\varphi(\hat{u}_1)}{q_1}\right] -$$

(87)

$$- \varphi(\hat{u}_2)\left[\hat{u}_2 - \frac{\varphi(\hat{u}_2)}{q_2}\right] = v_{11},$$

$$\lim_{n\to\infty} -\frac{\sigma^2}{n} M\left(\frac{\partial^2 \ln P}{\partial\mu\,\partial\sigma}\right) = \varphi(\hat{u}_1) - \varphi(\hat{u}_2) + \hat{u}_1\varphi(\hat{u}_1)\left[\hat{u}_1 + \frac{\varphi(\hat{u}_1)}{q_1} -\right.$$

(88)

$$\left. - \hat{u}_2\varphi(\hat{u}_2)\left[\hat{u}_2 - \frac{\varphi(\hat{u}_2)}{q_2}\right] = v_{12}\right.$$

$$\lim_{n\to\infty} -\frac{\sigma^2}{n} M\left(\frac{\partial^2 \ln P}{\partial\sigma^2}\right) = 2p + \hat{u}_1\varphi(\hat{u}_1) - \hat{u}_2\varphi(\hat{u}_2) +$$

(89)

$$+ \hat{u}_1^2\varphi(\hat{u}_1)\left[\hat{u}_1 + \frac{\varphi(\hat{u}_1)}{q_1}\right] - \hat{u}_2\varphi(\hat{u}_2)\left[\hat{u}_2^2 - \frac{\varphi(\hat{u}_2)}{q_2}\right] = v_{22}$$

Matricea de covariante asimptotică a estimatorilor $\hat{\mu}$ şi $\hat{\sigma}$ este $\sigma^2(\sigma_{ij})/n$, unde $(\sigma_{ij}) = (v_{ij})^{-1}$.

Deoarece ecuaţiile de verosimilitate (82) şi (83) au soluţii explicite numai în cazul selecţiilor complete ($m = n$), Harter şi Moore dau un procedeu iterativ pentru obţinerea soluţiilor acestor ecuaţii în cazul considerat.

7.2.3. Metoda lui Blom

(56) continuă să fie estimatori şi în cazul datelor censorizate însă c_{1i}, c_{2i} în (57) sînt înlocuite prin c_{1i}^*, c_{2i}^*, care, censorizate r_1 date la stînga şi r_2 date la dreapta, au expresiile

$$c_{1i}^* = \begin{cases} -f_{r_1+1}/(r_1+1) & 0 \leqslant i \leqslant r_1 \\ c_{1i} & r_1+1 \leqslant i \leqslant n-r_2-1 \\ f_{n-r_2}/(r_2+1) & n-r_2 \leqslant i \leqslant n \end{cases}$$

$$c_{2i}^* = \begin{cases} -f_{r_1+1}\,\alpha_{r_1+1}/(r_1+1) & 0 \leqslant i \leqslant r_1 \\ c_{2i} & r_1+1 \leqslant i \leqslant n-r_2-1 \\ f_{n-r_2}\alpha_{n-r_2}/(r_2+1) & n-r_2 \leqslant i \leqslant n \end{cases}$$

Scanned with OKEN Scanner

7.3. Repartiția exponențială

Datorită importanței sale în studiul duratei de funcționare a anumitor articole în special a celor electrice și electronice, parametrii repartiției exponențiale cu densitatea

$$p(x) = \exp[-(x-\mu)/\sigma], \qquad \mu \leqslant x < \infty \tag{90}$$

au fost estimați atît din date censorizate cît și din date trunchiate.

Deemer și Votaw (1955) găsesc estimatorul de maximă verosimilitate pentru σ(μ cunoscut) din date censorizate (tipul I) la dreapta.

Mendenhall și Hader (1958) generalizează rezultatele lui Deemer și Votaw la selecții censorizate din mixturi de mai multe repartiții exponențiale.

Epstein și Sobel (1953) găsește estimatorul de maximă verosimilitate pentru σ din date censorizate (tipul II) la dreapta.

§8. Procedee robuste

8.1. Introducere

Pînă în 1960 se putea spune că

— nimeni nu cunoaște perfect o repartiție

— calitățile testelor și estimatorilor clasici se modifică în urma unor mici schimbări ale repartiției

— unele teste sau estimatori alternativi (de exemplu testul Wilcoxon în locul testului t) pierd foarte puțină eficiență pentru o repartiție normală, însă prezintă calități mai bune și mai stabile la diferite abateri de la ea.

La început termenul de robustețe a avut o semnificație vagă: de exemplu Box și Anderson (1955) a introdus această noțiune astfel: procedeele sînt robuste dacă sînt insensibile la schimbările datorită factorilor care nu sînt sub cercetare și sensibile la anumiți factori sub cercetare (puternice).

Însă dacă cineva dorește să aleagă într-un mod rațional dintre procedeele robuste competitorii procedeului clasic, trebuie să se definească precis scopul urmărit.

Pentru a fixa ideile să considerăm problema estimării unui parametru de poziție θ, pe baza unei selecții de volum n, mare. Vom presupune că forma funcției de repartiție $F\left(\frac{x-\theta}{\sigma}\right)$ nu este cunoscută exact. Pentru cei mai buni estimatori $\sqrt{n}(T_n - \theta)$ va fi asimptotic repartizată normal și vom judeca estimatorii după

— dispersia lor asimptotică $\sigma_F^2(T)$

— eficiența absolută $1/I(F)\sigma_F^2(T)$

— eficiența lor relativă $\sigma_F^2(T')/\sigma_F^2(T)$

După primul obiectiv, un estimator robust trebuie să posede:

i) o eficiență absolută ridicată pentru toate funcțiile de repartiție F cu o formă convenabilă.

Scanned with OKEN Scanner

În timp ce acest obiectiv poate fi realizat asimptotic (pentru selecții de volum mare), convergența este mult prea înceată pentru scopuri practice (Hájek și Zidák (1967), Van Eeden (1970), Takeuchi (1971).

Astfel vom modifica această cerere astfel

ii) o eficiență relativă la media de selecție ridicată (și alți estimatori deosebiți) pentru toate funcțiile F (Bickel (1965)),

iii) o eficiență absolută ridicată pentru o familie finită $\{F_i\}$ convenabil aleasă (normală, logistică, dublu exponențială, Cauchy și rectangulară) (Birnbaum si Laska (1967), Crow și Siddiqui (1967), Siddiqui și Raphunandanan (1967), Hogg (1967), Birnbaum și Miké (1970).

O variantă a lui iii) este

(iii') o eficiență absolută ridicată pentru o familie parametrică (Bok și Tiao (1962), (1964 a), (1964b).

iv) o dispersie asimptotică mică într-o vecinătate a repartiției normale (Huber (1964)).

Observație. Convergența în i) și iv) nu trebuie să fie uniformă.

v) repartiția estimatorului să se schimbe puțin la variații mici ale funcției F și aceasta uniform în selecția de volum n (Hampel (1971)).

Noțiunile de „neparametric" și „repartiții libere" au puține legături cu noțiunea de rubustețe. Media de selecție și mediana de selecție sînt estimații neparametrice ale mediei și respectiv medianei teoretice. Însă este mai degrabă o excepție decît o regulă cunoașterea precisă a formei funcționale a repartiției în care intervine parametrul pe care dorim să-l estimăm. Trebuie să alegem acea formă funcțională a repartiției care conduce la cea mai bună eficiență sau la rubustețe.

Cele mai multe dintre așa-numitele „procedee ale repartițiilor libere" derivă din rangurile statisticilor de ordine și au proprietăți de rubustețe bune. Repartițiile libere stabilizează pragul însă nu necesar și puterea testului; calitățile estimatorilor derivați din teste sînt strîns legate de puterea acestor teste.

Sînt aspecte ale rubustețeі care sînt puțin cunoscute, cum ar fi insensibilitatea la abaterile de la independență (Høyland (1968)).

Abaterile de la presupunerea că observațiile în selecție nu sînt identic repartizate par a fi relativ neînsemnate, cel puțin pentru procedeele care sînt simetrice în observații.

8.2. Estimatori M (Huber (1964))

Fie $X_1, X_2, \ldots, X_n$ o selecție asupra unei variabile aleatoare X cu funcția de repartiție $F\left(\frac{x-\theta}{\sigma}\right)$. Vom presupune că F are densitatea f și $\sigma = 1$. Nu vom pune condiții de regularitate. Deoarece toate estimațiile vor fi invariante de translație, este suficient să considerăm comportarea lor pentru $\theta = 0$.

Fie ρ o funcție cu valori reale de un parametru real cu derivata $\psi = \rho'$. Definim o statistică $T_n = T_n(X_1, \ldots, X_n)$ fie prin

$$\sum_{i \leqslant n} \rho(X_i - T_n) = \inf_t \sum_{i \leqslant n} \rho(X_i - t) \tag{91}$$

sau prin

$$\sum_{i \leqslant n} \psi(X_i - T_n) = 0 \tag{92}$$

În condiţii generale, T_n converge la $T(F)$ definită de

$$\int \psi(x - T(F))\, F(\mathrm{d}x) = 0 \tag{93}$$

şi $n^{1/2}\ (T_n - T(F))$ este asimptotic repartizată normal cu media 0 şi dispersia

$$\sigma_M^2(F) = \int \Omega_F(x)^2\, \mathrm{d}F(x), \tag{94}$$

unde

$$\Omega_F(x) = \frac{\psi(x - T(F))}{\int \psi'(x - T(F))\, F(\mathrm{d}x)} \tag{95}$$

Dacă alegem

$$\psi_0(x) = -f_0'(x)/f_0(x)$$

pentru $\psi(x)$, atunci T_n este estimatorul de maximă verosimilitate pentru θ, din funcţia de repartiţie adevărată, F_0 şi în condiţii de regularitate va fi asimptotic eficient pentru $F = F_0$.

Obţinem o versiune invariantă a estimatorului de scală dacă înlocuim ecuaţiile de definiţie prin

$$\sum_{i \leqslant n} \psi\left(\frac{X_i - T_n}{S_n}\right) = 0 \tag{91'}$$

şi respectiv prin

$$\int \psi\left(\frac{x - T(F)}{S(F)}\right) F(\mathrm{d}x) = 0, \tag{92'}$$

unde $S_n = S(F_n)$ este o estimaţie robustă a scalei (de exemplu amplitudinea intercuartilică).

Dacă F este simetrică, atunci T_n şi S_n sînt asimptotic independente şi dispersia estimatorului T_n poate fi exprimată ca (94) cu

$$\Omega_F(x) = \frac{\psi(x/S(F))\, S(F)}{\int \psi'(x/S(F))\, F(\mathrm{d}x)} \tag{95'}$$

Scanned with OKEN Scanner

8. 3. Estimatori L (Combinații liniare de statistici de ordine

Fie

$$T_n = \sum_1^n a_i \, X_i \tag{96}$$

unde

$$a_i = \int_{(i-1)/n}^{i/n} J\,(t)\,\mathrm{d}t \tag{97}$$

și

$$\int_0^1 J(t)\,\mathrm{d}t = 1 \tag{98}$$

În condiții generale (însă nu în întregime satisfăcătoare) de regularitate, T_n converge la

$$T(F) = \int J(t)\,F^{-1}\,(t)\,\mathrm{d}t \tag{99}$$

și $n^{1/2}\,(T_n - T(F))$ este repartizată asimptotic normal cu media 0 și dispersia

$$\sigma_L^2\,(F) = \int_0^1 U(t)^2\,\mathrm{d}t - \left(\int_0^1 U(t)\,\mathrm{d}t\right)^2 \tag{100}$$

unde U este integrala nedefinită a lui

$$U'\,(t) = \frac{J(t)}{f(F^{-1}\,(t))} \tag{101}$$

De asemenea, putem scrie

$$\sigma_L^2\,(F) = \int \Omega_F(x)^2\,F\,(\mathrm{d}x) \tag{102}$$

unde

$$\Omega_F(x) = U(F\,(x)) - \int_0^1 U(t)\,\mathrm{d}t \tag{103}$$

Dacă alegem

$$J(t) = \frac{1}{I(F_0)}\,\psi_0'\,(F_0^{-1}\,(t)) \tag{104}$$

Scanned with OKEN Scanner

unde ψ_0' este derivata funcţiei ψ_0 din 8.2 şi

$$I(F_0) = \int \psi_0(x)^2 F_0(dx), \tag{105}$$

atunci T_n este asimptotic eficient pentru F_0 (Jung (1955)). Mai obţin rezultate Chernoff, Gastwirth şi Johns (1967) şi Bickel (1967)

Crow şi Siddiqui (1967) studiind repartiţii simetrice consideră numai estimatori de forma:

$$T_n(a) = \sum_1^n a_i X_{(i)} \text{ cu } a_{n-i+1} = a_i, \ \sum_1^n a_i = 1 \tag{106}$$

şi în particular, cu $p = \frac{1}{2} - \frac{r}{n}$.

(a) Medii Winsorizate

$$W_n(p) = \frac{(r+1)(X_{(r+1)} + X_{(n-r)}) + \sum_{r+2}^{n-r-1} X_{(i)}}{n}, \quad 0 < r < \frac{1}{2}(n-1)$$

$$W_n\left(\frac{1}{2n}\right) = X_{(n+1)/2} \text{ dacă } n \text{ este impar}; \ r = \frac{1}{2}(n-1)$$

(b) Medii

$$T_n(p) = \sum_{i=r+1}^{n-r} \frac{X_{(i)}}{n-2r},$$

(c) Medii lineare ponderate

$$L_n(p) = \sum_{j=1}^{\frac{1}{2}n-r} \frac{(2j-1)(X_{(r+j)} + X_{(n-r+1-j)})}{2\left(\frac{1}{2}n - r\right)^2} \, n \text{ par}$$

$$L_n(p) = \sum_{j=1}^{\frac{1}{2}(n-1)-r} \frac{(2j-1)(X_{(r+j)} + X_{(n-r+1-j)}) + (n-2r)X_{(n+1)/2}}{\left[\frac{1}{2}(n-1) - r\right]^2 + \left[\frac{1}{2}(n+1) - r\right]^2} \, n \text{ impar}$$

(d) Mediana şi alte două statistici de ordine simetrice

$$Y_n(p, a) = a(X_{(r+1)} + X_{(n-r)}) + \left(\frac{1}{2} - a\right)\left(X_{\left(\frac{n}{2}\right)} + X_{\left(\frac{n}{2}+1\right)}\right) n \text{ par}$$

$$Y_n(p, a) = a(X_{(r+1)} + X_{(n-r)}) + (1-2a)X_{((n+1)/2)} \quad n \text{ impar}$$

Scanned with OKEN Scanner

Pentru $n = 4$ este posibil numai $r = 1$, astfel încît (a) — (c) coincid şi sînt un caz particular al (d) cu $a = \frac{1}{2}$, care este cea mai generală statistică sistematică liniară

$$T_4(a) = a(X_{(2)} + X_{(3)}) + \left(\frac{1}{2} - a\right)(X_{(1)} + X_{(4)})$$

$D^2[T_4(a)]$ este minimă pentru

$$a = a_0 = \frac{\sigma_{11} + \sigma_{14} - \sigma_{12} - \sigma_{13}}{2(\sigma_{22} + \sigma_{23} + \sigma_{11} + \sigma_{14} - 2\sigma_{12} - 2\sigma_{13})},$$

dispersiile şi covarianţele pentru repartiţiile: rectangulară, parabolică, triunghiulară şi normală fiind cunoscute.

Din graficul eficienţelor estimatorului $T_4(a)$ relativă la $T_4(a_0)$ ca funcţie de a observăm că media de selecţie $\left(a = \frac{1}{4}\right)$ este estimatorul cel mai robust pentru cele 4 repartiţii enumerate anterior şi că are o eficienţă garantată de 0,80.

8.4. Estimatori *R* (Estimatori derivaţi din teste de rang)

Fie $Y_1, \ldots, Y_n$ şi $Z_1, \ldots, Z_n$ două selecţii independente asupra unor variabile aleatoare cu funcţia de repartiţie $F(x)$, respectiv $F(x - \theta)$. Formăm selecţia combinată de volum $N = 2n$ şi considerăm ca statistică test pentru verificarea ipotezei $\theta = 0$, faţă de $\theta > 0$

$$W(Y_1, \ldots, Y_n; Z_1, \ldots, Z_n) = \sum_{i \leqslant n} J\left(\frac{i}{N+1}\right) V_i, \tag{107}$$

unde $V_i = 1$ dacă statistica de ordin de rang i în selecţia combinată este un Y şi $V_i = 0$ în caz contrar.

Putem determina estimatori pentru poziţie folosind aceste teste: determinăm $T_n(X_1, \ldots, X_n)$ astfel încît

$$W(X_1 - T_n, \ldots, X_n - T_n; -(X_1 - T_n), \ldots, -(X_n - T_n)) = 0 \tag{108}$$

Comportarea asimptotică a statisticii T_n poate fi determinată din puterea asimptotică a testului de rang; T_n tinde la soluţia $T(F)$ a ecuaţiei

$$\int J\left(\frac{F(x) + 1 - F(2T(F) - x)}{2}\right) F(\mathrm{d}x) = 0, \tag{109}$$

Scanned with OKEN Scanner

și $n^{1/2}\,(T_n - T(F))$ este asimptotic repartizată normal cu media 0 și dispersia

$$\sigma_R^2(F) = \int \Omega_F(x)^2\, F(\mathrm{d}x), \tag{110}$$

unde Ω_F este definit după cum urmează. Standardizăm parametrul de poziție astfel încît $T(F) = 0$ și fie $U(x)$ integrala nedefinită a lui

$$U'(x) = J'\left(\frac{F(x) + 1 - F(-x)}{2}\right) f(-x) \tag{111}$$

Atunci, presupunînd $J(1-t) = -J(t)$,

$$\Omega_F(x) = \frac{U(x) - \int U(x)\, f(x)\, \mathrm{d}x}{\int U'(x)\, f(x)\, \mathrm{d}x} \tag{112}$$

În particular, dacă F este simetrică, atunci

$$\Omega_F(x) = \frac{J(F(x))}{\int J'(F(x))\, f(x)^2\, \mathrm{d}x} \tag{112'}$$

Pentru F_0 simetrică obținem un test de rang local cel mai puternic cu

$$J(t) = \psi_0(F_0^{-1}(t)) \tag{113}$$

și atunci estimatorul este asimptotic eficient pentru F_0. Pentru repartiții asimetrice în general nu se pot da R-estimații eficiente (Chernoff și Savage (1958), Hodges și Lehmann (1963), Hájek și Sidak (1967)).

8.5. Stabilitatea estimatorilor M, L și R

Estimatorii M, L și R pot fi scriși ca funcții de funcția de repartiție empirică $T_n = T(F_n)$ (fie exact sau cel puțin aproximativ).
În particular, estimatorii L corespund la

$$T(F) = \int J(t)\, F^{-1}(t)\, \mathrm{d}t\,; \tag{114}$$

estimatorii M sînt definiți de formula implicită

$$\int \psi(x - T(F))\, F(\mathrm{d}x) = 0 \tag{115}$$

Scanned with OKEN Scanner

şi estimatorii R de

$$(116) \qquad \int J\left(\frac{(F(x)+1-F(2T(F)-x)^{\cdot}}{2}\right)F(\mathrm{d}x)=0$$

Ideile de stabilitate (Hampel (1971)) pot fi descrise după cum urmează.

O cerere de bază este ca schimbările mici ale funcţiei F_n (schimbări mici care să afecteze cele mai multe sau toate observaţiile, grupări sau schimbări mari care să afecteze cîteva din observaţii) să provoace numai schimbări mici ale funcţiei $T_n = T(F_n)$.

Aceasta arată că T va fi continuă pentru metrica d_p a lui Prohorov în spaţiul repartiţiilor probabilistice :

$$(117) \quad d_p(F, G) = \inf\{\varepsilon \mid F(A) \leqslant G(A^{\varepsilon}) + \varepsilon \textit{ pentru toate mulţimile măsurabile } A\}$$

unde A^{ε} reprezintă o ε - vecinătate închisă a lui A.

Estimatorii nu pot fi continui fără ca $J(t) = 0$ pentru $t \in [\alpha, 1-\alpha]$ pentru $0 < \alpha < \frac{1}{2}$.

Dacă funcţia de repartiţie F adevărată este suficient de netedă, estimatorii M, L şi R posedă derivata vom Mises (1947). Aceasta este

$$(118) \qquad \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{T((1-\varepsilon)F + \varepsilon G) - T(F)}{\varepsilon} = \int \Omega_F(x)\, G(\mathrm{d}x)$$

pentru o funcţie Ω_F. Această formulă dă valoarea funcţiei Ω_F dacă luăm G drept funcţia de repartiţie cu masa 1 în punctul x. În cele mai multe cazuri, este posibilă o dezvoltare de tipul celei lui Taylor.

$$n^{1/2}\left[T(F_n) - T(F) - \int \Omega_F(x) F_n(\mathrm{d}x)\right] \xrightarrow[P]{} 0$$

Avem

$$\int \Omega_F(x) F_n(\mathrm{d}x) = \frac{1}{n}\sum \Omega_F(x).$$

Urmează că $n^{1/2}(T(F_n) - T(F))$ este asimptotic repartizată norma cu dispersia $\int \Omega_F(x)^2 F(\mathrm{d}x)$.

Scanned with OKEN Scanner

Capitolul XII

INTERVAL DE ESTIMARE

§ 1. Definiția intervalului de încredere

Fie $X_1, X_2, \ldots, X_n$ o selecție asupra unei variabile aleatoare X a cărei repartiție depinde de un singur parametru θ, necunoscut și $\underline{\theta}(X_1, \ldots, X_n)$, $\overline{\theta}(X_1, \ldots, X_n)$ două statistici astfel încît

$$\underline{\theta}(x_1, \ldots, x_n) < \overline{\theta}(x_1, \ldots, x_n)$$

Definiția 1. Dacă $\underline{\theta}$ și $\overline{\theta}$ pot fi alese astfel încît pentru un α dat

$$P(\underline{\theta} < \theta < \overline{\theta}) = 1 - \alpha \tag{1}$$

atunci $(\underline{\theta}, \overline{\theta})$ este numit interval de încredere pentru parametrul θ. $\underline{\theta}$, $\overline{\theta}$ poartă numele de limita inferioară și respectiv limita superioară de încredere pentru θ. Aceste limite depind numai de $1 - \alpha$ numit coeficient de încredere. Se observă că $(\underline{\theta}, \overline{\theta})$ este o variabilă aleatoare, astfel încît probabilitatea ca intervalul $(\underline{\theta}, \overline{\theta})$ să conțină valoarea adevărată a parametrului θ este $(1 - \alpha)$.

Noțiunea de interval de încredere a fost formulată pentru prima oară de Laplace (1814), care-l privea însă ca fix, iar parametrul ca o variabilă aleatoare. Wilson (1927) dă interpretarea corectă a intervalului de încredere ca fiind o variabilă aleatoare, iar Neyman (1937), pune bazele teoriei moderne a intervalelor de încredere.

Pentru a ne da mai bine seama de utilitatea intervalelor de încredere să considerăm următorul exemplu:

Exemplul 1. Fie $(X_1, \ldots, X_n)$ o selecție asupra unei variabile aleatoare $X \sim N(\mu, 1)$, parametrul μ fiind necunoscut. Să estimăm acest parametru cu ajutorul datelor de selecție. Am văzut că $\bar{X}$ este un estimator consistent, nedeplasat și de dispersie minimă pentru μ. Cu toate aceste proprietăți optime, probabilitatea ca $\bar{X}$ să fie egal cu μ este zero. Într-adevăr

$$P(\bar{X} = \mu) \leqslant P(\mu - \varepsilon/2\sqrt{n} \leqslant \bar{X} \leqslant \mu + \varepsilon/2\sqrt{n}) = P\left(-\frac{\varepsilon}{2} \leqslant \sqrt{n}(\bar{X} - \mu) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}\right).$$

Scanned with OKEN Scanner

Conform corolarului III.1, $\sqrt{n}(\bar{X} - \mu)$ este repartizat $N(0, 1)$. Prin urmare

$$P(\bar{X} = \mu) = \int_{-\varepsilon/2}^{\varepsilon/2} \varphi(t)\, dt < \varepsilon/\sqrt{2\pi}$$

pentru orice $\varepsilon > 0$.

Deşi $\bar{X}$ nu este egal niciodată cu μ cu probabilitatea unu, $\bar{X}$ este „apropiat" de μ şi putem obţine o informaţie mai precisă asupra valorii adevărate a parametrului μ numai dacă putem „lărgi" această estimaţie.

În loc să considerăm statistica $\bar{X}$, considerăm două statistici şi anume

$$\underline{\mu}(x_1, \ldots, x_n) = \bar{X} - 1{,}96/\sqrt{n},$$

$$\overline{\mu}(x_1, \ldots, x_n) = \bar{X} + 1{,}96/\sqrt{n}.$$

Calculăm probabilitatea evenimentului

$$(\underline{\mu} \leqslant \mu \leqslant \overline{\mu}) = (\mu \leqslant \underline{\mu}) \cap (\overline{\mu} \geqslant \mu)$$

Avem

$$P(\underline{\mu} \leqslant \mu \leqslant \overline{\mu}) = P(\bar{X} - (1{,}96)/\sqrt{n}) \leqslant \mu \leqslant \bar{X} + (1{,}96/\sqrt{n})) =$$

$$= P(-1{,}96 \leqslant \sqrt{n}\,(\bar{X} - \mu) \leqslant 1{,}96)$$

şi cum $\sqrt{n}(\bar{X} - \mu)$ este repartizat $N(0,1)$ urmează că

$$P(\underline{\mu} \leqslant \mu \leqslant \overline{\mu}) \simeq 0{,}95$$

Aceasta arată că: ori de cîte ori calculăm $\underline{\mu} = \bar{X} - 1{,}96/\sqrt{n}$ şi $\overline{\mu} = \bar{X} + 1{,}96/\sqrt{n}$ şi afirmăm că $\underline{\mu} \leqslant \mu \leqslant \overline{\mu}$ oricare ar fi valoarea lui μ, atunci în 95% din cazurile unei serii mari de experienţe, vom face o afirmaţie corectă asupra valorii lui μ.

§ 2. Existenţa intervalelor de încredere

Intervalele de încredere pot fi găsite în următoarele două cazuri:

I. Presupunem că există o funcţie $g(x_1, \ldots, x_n; \theta)$ care se bucură de proprietăţile:

a) este definită în orice punct θ dintr-un interval (θ_1, θ_2) ce acoperă pe θ_0 şi în orice punct din spaţiu de selecţie R^n, cu excepţia unei mulţimi de probabilitate zero,

b) este continuă şi monotonă în θ;

c) repartiţia sa nu depinde de θ.

Scanned with OKEN Scanner

În acest condiţii putem găsi două numere g_1 şi g_2 ce depind de α, astfel încît

$$P(g_1 \leqslant g \leqslant g_2) = 1 - \alpha. \tag{2}$$

Dacă θ_0 este valoarea adevărată a parametrului θ, atunci există soluţiile $\underline{\theta}$, $\overline{\theta}(\underline{\theta} < \overline{\theta})$ ale ecuaţiilor $g(x_1, \ldots, x_n; \theta) = g_1$, g_2 şi $(\underline{\theta}, \overline{\theta})$ este un interval de încredere pentru θ, avînd coeficientul de încredere $1 - \alpha$.

Deoarece $g(x_1, \ldots, x_n; \theta)$ este continuă şi monoton crescătoare, sau descrescătoare în θ pe (θ_1, θ_2), (2) este echivalentă cu

$$P(\underline{\theta} < \theta_0 < \overline{\theta}) = 1 - \alpha \tag{3}$$

unde $\underline{\theta} < \overline{\theta}$ sînt soluţiile ecuaţiilor $g(x_1, \ldots, x_n; \theta) = g_1$, g_2.

Exemple

A. Fie $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ o selecţie asupra unei variabile aleatoare.

1. $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ cu σ^2 cunoscut.

Corolarul III. 1 ne spune că $(\bar{X} - \mu)/(\sigma/\sqrt{n}) \sim N(0,1)$. Prin urmare, ecuaţiile (2) şi (3) capătă forma

$$P\left(g_1 < \frac{\sqrt{n}\,(\bar{X} - \mu)}{\sigma} < g_2\right) = \int_{g_1}^{g_2} \varphi(x)\,dx = 1 - \alpha, \tag{3}$$

$$P\left(\bar{X} - g_2 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu - \bar{X} - g_1 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \alpha. \tag{4}$$

Deci $\left(\bar{X} - g_2 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X} - g_1 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$ este un interval de încredere pentru parametrul μ, avînd coeficientul de încredere $1 - \alpha$. Lungimea acestui interval este

$$L = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}(g_2 - g_1) \tag{5}$$

Pentru a vedea pentru ce valori ale lui g_1 şi g_2 obţinem intervalul cu cea mai mică lungime minimizăm L cu condiţia (3)

Din (5) şi (3) obţinem

$$\frac{dL}{dg_1} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\left(\frac{dg_2}{dg_1} - 1\right), \quad \varphi(g_2)\,\frac{dg_2}{dg_1} - \varphi(g_1) = 0$$

astfel încît

$$\frac{dL}{dg_1} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\left(\frac{\varphi(g_1)}{\varphi(g_2)} - 1\right),$$

$$\frac{dL}{dg_1} = 0 \Rightarrow g_1 = g_2 \quad \text{sau} \quad -g_1 = g_2$$

Scanned with OKEN Scanner

Deoarece prima soluție nu convine, urmează că $-g_1 = g_2 = a$. Cu această soluție ecuația (3) devine

$$\int_{-a}^{a} \varphi(x)\,dx = 1 - \alpha$$

și cum

$$\int_{-a}^{a} \varphi(x)\,dx = 2\Phi(a) - 1, \text{ urmează că } u_{1-\frac{\alpha}{2}} = a$$

Deci intervalul de încredere pentru μ este

$$\left(\bar{X} - u_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X} + u_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

sau ținînd seama că $-u_{1-\frac{\alpha}{2}} = u_{\frac{\alpha}{2}}$

$$\left(\bar{X} + u_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X} + u_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right),$$

care mai poartă și numele de intervalul cozilor egale.

2. $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ cu σ^2 necunoscut.

Teorema III. 7 ne spune că $\sqrt{n}\,(\bar{X} - \mu)/\,s_n \sim t(n-1)$. Ecuațiile (2) și (3) devin

$$(6) \qquad P\left(t_1 < \frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu)}{s_n} < t_2\right) = \int_{t_1}^{t_2} g_{n-1}(t)\,dt = 1 - \alpha$$

unde $g_{n-1}(t)$ este densitatea de repartiție corespunzătoare unui $t(n-1)$

$$(7) \qquad P(\bar{X} - t_2\frac{s_n}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X} - t_1\frac{s_n}{\sqrt{n}}) = 1 - \alpha$$

Prin urmare $\left(\bar{X} - t_2\frac{s_n}{\sqrt{n}}, \bar{X} - t_1\frac{s_n}{\sqrt{n}}\right)$ este un interval de încredere pentru parametrul μ, avînd coeficientul de încredere $1 - \alpha$. Lungimea acestui interval este

$$(8) \qquad L = \frac{s_n}{\sqrt{n}}(t_2 - t_1)$$

Pentru a vedea pentru ce valori t_1 și t_2 obținem intervalul (bazat pe statistica $\frac{\sqrt{n}\,(\bar{X} - \mu}{s_n}$) cu cea mai mică lungime, minimizăm L cu condiția (6).

Scanned with OKEN Scanner

Din (8) și (6) obținem

$$\frac{dL}{dt_1} = \frac{s_n}{\sqrt{n}}\left(\frac{dt_2}{dt_1} - 1\right),\ g_{n-1}(t_2)\frac{dt_2}{dt_1} - g_{n-1}(t_1) = 0$$

astfel încît

$$\frac{dL}{dt_1} = 0 \Rightarrow t_1 = t_2 \text{ sau } -t_1 = t_2$$

Deoarece prima soluție nu convine, urmează că $-t_1 = t_2$.

Deci intervalul cu cea mai mică lungime bazat pe statistica $\frac{\sqrt{n}(\bar{X}-\mu)}{s_n}$ este același cu intervalul

$$\left(\bar{X} + t_{n-1,\frac{\alpha}{2}}\frac{s_n}{\sqrt{n}},\ \bar{X} + t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}\frac{s_n}{\sqrt{n}}\right)$$

Observație. Aceste intervale de încredere sînt determinate oricare ar fi valoarea lui σ.

3. $X \sim N(\mu, \sigma^2)$.

Corolarul III.3 ne spune că $(n-1)\,s_n^2/\sigma^2 \sim \chi^2(n-1)$.

Avem

$$P\left(g_1 < \frac{(n-1)\,s_n^2}{\sigma^2} < g_2\right) = \int_{g_1}^{g_2} h_{n-1}(u)\,du = 1-\alpha, \tag{9}$$

unde $h_{n-1}(u)$ este densitatea de repartiție corespunzătoare unui $\chi^2(n-1)$. (9) se mai poate scrie

$$P\left(\frac{(n-1)\,s^2}{g_2} < \sigma^2 < \frac{(n-1)\,s^2}{g_1}\right) = 1-\alpha. \tag{10}$$

Deci intervalul

$$\left[\frac{(n-1)\,s_n^2}{g_2},\ \frac{(n-1)\,s_n^2}{g_1}\right]$$

acoperă parametrul σ^2 cu probabilitatea $1-\alpha$.

Lungimea acestui interval este

$$L = (n-1)\,s_n^2\left(\frac{1}{g_1} - \frac{1}{g_2}\right) \tag{11}$$

Pentru a vedea pentru ce valori ale lui g_1 și g_2 obținem intervalul cu cea mai mică lungime, minimizăm L cu condiția (9). Din (11) și (9)

Scanned with OKEN Scanner

obținem

$$\frac{dL}{dg_1} = (n-1)\, s_n^2 \left(-\frac{1}{g_1^2} + \frac{1}{g_2^2} \frac{dg_2}{dg_1} \right), \quad \frac{dg_2}{dg_1} = \frac{h_{n-1}(g_1)}{h_{n-1}(g_2)}$$

de unde

$$\frac{dL}{dg_1} = 0 \Rightarrow (12)\ g_1^2\, h_{n-1}(g_1) = g_2^2\, h_{n-1}(g_2)$$

Soluții numerice pentru (9) și (12) au fost obținute de Tate R., F și Klett G., W. (1959).

4. X cu densitatea de repartiție

$$f(x:\ \beta) = \frac{1}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)}\ x^{\alpha-1} e^{-x/\beta},\ x>0,\ \beta>0 \tag{13}$$

α fiind un întreg cunoscut.

O statistică suficientă pentru β este $y = \sum_1^n x_i$, iar $2y/\beta$ este repartizată $\chi^2(2n\ \alpha)$.

Ecuațiile (2) și (3) devin

$$P\left(g_1 < \frac{2y}{\beta} < g_2 \right) = \int_{g_1}^{g_2} h_{2n\alpha}(u)\, du = 1-\alpha, \tag{14}$$

și

$$P\left(\frac{2y}{g_2} < \beta < \frac{2y}{g_1} \right) = 1-\alpha \tag{15}$$

Urmează că $\left(\frac{2y}{g_2}, \frac{2y}{g_1} \right)$ acoperă parametrul β cu probabilitatea $1-\alpha$. Lungimea acestui interval este

$$L = 2y \left(\frac{1}{g_2} - \frac{1}{g_1} \right). \tag{16}$$

Pentru a vedea pentru ce valori ale lui g_1 și g_2 obținem intervalul cu cea mai mică lungime minimizăm (16) cu condiția (14).

Soluțiile pentru g_1 și g_2 astfel obținute sînt aceleași ca în exemplul 3 și sînt aplicabile tabelelor din Tate și Klett.

5. X cu densitatea de repartiție

$$f(x,\ \theta) = \frac{1}{2\theta}\ e^{-|x|/\theta},\ \theta>0 \tag{17}$$

$y = \sum_1^n |x_i|$ este o statistică suficientă pentru θ.

Scanned with OKEN Scanner

Funcţia generatoare de momente, a statisticii $2y/\theta$ este $(1-2t)^{-\cdot}$ ceea ce arată că $2y/\theta$ este repartizată $\chi^2(2n)$. Ecuaţiile (2) şi (3) devin

$$P\left(g_1 < \frac{2y}{\theta} < g_2\right) = \int_{g_1}^{g_2} h_{2n}(u)\,du = 1-\alpha$$

şi

$$P\left(\frac{2y}{g_2} < \theta < \frac{2y}{g_1}\right) = 1-\alpha;$$

în continuare se foloseşte acelaşi procedeu ca în exemplul 3.

6. X cu densitatea de repartiţie

$$f(x,\ \theta) = \frac{\alpha}{\theta}\, x^{\alpha-1}\, e^{-x^\alpha/\theta},\ x>0,\ \theta>0 \tag{18}$$

cu $\alpha > 0$ cunoscut.

$y = \sum_1^n x_i^\alpha$ este o statistică suficientă pentru θ,

$2y/\theta$ este o variabilă $\chi^2(2n)$.

Ecuaţiile (2) şi (3) devin

$$P\left(g_1 > \frac{2y}{\theta} < g_2\right) = \int_{g_1}^{g_2} = h_{2n}(u)\,du = 1-\alpha$$

şi

$$P\left(\frac{2y}{g_1} < \theta < \frac{2y}{g_2}\right) = 1-\alpha$$

În continuare folosim acelaşi procedeu ca şi în exemplul 3.

7. X cu densitatea

$$f(x,\ \theta) = \theta x^{\theta-1},\ 0<x<1,\ \theta<0.$$

$y = -\sum_1^n \ln X_i$ este o statistică suficientă pentru θ. $2\,\theta\,y$ este o variabilă $\chi^2(2n)$.

Ecuaţiile (2) şi (3) devin

$$P(g_1 < 2\theta y < g_2) = \int_{g_1}^{g_2} h_{2n}(u)\,du = 1-\alpha, \tag{19}$$

şi

$$P\left(\frac{g_1}{2y} < \theta < \frac{g_2}{2y}\right) = 1-\alpha \tag{20}$$

Scanned with OKEN Scanner

Intervalul de încredere

$$\left(\frac{g_1}{2y}, \frac{g_2}{2y}\right)$$

are lungimea

$$L = \frac{1}{2y}(g_2 - g_1) \tag{21}$$

Avem

$$\frac{dL}{dg_1} = \frac{1}{2y}\left(\frac{dg_2}{dg_1} - 1\right), \quad h_{2n}(g_2)\frac{dg_2}{dg_1} - h_{2n}(g_1) = 0$$

de unde

$$\frac{dL}{dg_1} = 0 \Rightarrow \frac{h_{2n}(g_1)}{h_{2n}(g_2)} - 1 = 0 \text{ sau } h_{2n}(g_1) = h_{2n}(g_2),$$

care este rezolvată simultan cu (19). Pentru g_1 și g_2 nu există tabele.

8. X cu densitatea de repartiție

$$f(x;\ \theta) = \frac{1}{\theta}, \quad 0 < x < \theta, \quad \theta > 0$$

$Y = X_{n,n}$ este o statistică suficientă pentru θ.

Statistica $U = Y/\theta$ are densitatea de repartiție

$$h(u) = nu^{n-1}, \qquad 0 < u < 1$$

Ecuațiile (2) și (3) se scriu

$$P\left(g_1 < \frac{y}{\theta} < g_2\right) = n\int_{g_1}^{g_2} u^{n-1}\,du = g_2^n - g_1^n = 1 - \alpha$$

$$P\left(\frac{y}{g_2} < \theta < \frac{y}{g_1}\right) = 1 - \alpha \tag{22}$$

Intervalul de încredere $\left(\frac{y}{g_2}, \frac{y}{g_1}\right)$ are lungimea

$$L = y\left(\frac{1}{g_1} - \frac{1}{g_2}\right) \tag{23}$$

Observînd că $(1 - \alpha)^{1/n} < g_2 \leqslant 1$, pentru minimul lui L supus la condiția (22) găsim

$$\frac{dL}{dg_2} = y\left(-\frac{1}{g_1^2}\frac{dg_1}{dg_2} + \frac{1}{g_2^2}\right) = y\,\frac{g_1^{n+1} - g_2^{n+1}}{g_2^2 g_1^{n+1}} < 0,$$

Scanned with OKEN Scanner

astfel încît minimul se atinge atunci cînd $g_2 = 1$.

Urmează că intervalul (bazat pe statistica y/θ) avînd cea mai mică lungime este

$$\left(y, \frac{y}{\alpha^{1/n}}\right)$$

9. X cu densitatea de repartiţie

$$f(x, \theta) = e^{-(x-\theta)}, \quad x > \theta$$

$y = \min X_i$ este o statistică suficientă cu densitatea

$$ne^{-n(y-\theta)}, \quad x > \theta$$

$u = 2n(y - \theta)$ are densitatea de repartiţie

$$h_2(u) = \frac{1}{2} e^{-\frac{u}{2}}, \quad u > 0.$$

Ecuaţiile (2) şi (3) se pot scrie

$$(24) \qquad P(g_1 < 2n(y - \theta) < g_2) = \int_{g_1}^{g_2} h_2(u)du = e^{-\frac{g_1}{2}} - e^{-\frac{g_2}{2}} = 1 - \alpha$$

şi

$$P\left(y - \frac{g_2}{2n} < \theta < y - \frac{g_1}{2n}\right) = 1 - \alpha$$

Intervalul de încredere

$$\left(y - \frac{g_2}{2n}, \; y - \frac{g_1}{2n}\right)$$

are lungimea

$$(25) \qquad L = \frac{1}{2n}(g_2 - g_1)$$

Observînd că $0 \leqslant a < -2/\ln(1 - \alpha)$ determinarea minimului lui L supus la condiţia (24) conduce la

$$\frac{dL}{dg_1} = \frac{1}{2n}\left(\frac{dg_2}{dg_1} - 1\right) = \frac{1}{2n}\left(\frac{e^{-\frac{g_1}{2}} - e^{\frac{g_2}{2}}}{e^{-\frac{g_2}{2}}}\right) > 0,$$

astfel încît minimul se atinge atunci cînd $g_1 = 0$. În acest caz $g_2 = \chi^2_{1-\alpha}(2)$ şi deci intervalul de lungime minimă bazat pe $2n(y - \theta)$ este

Scanned with OKEN Scanner

$$\left(y - \frac{\chi^2_{1-\alpha}(2)}{2n},\ y\right)$$

B. Fie $(X_1, X_2, \ldots, X_{n_1})$ $[(X'_1, X'_2, \ldots, X'_{n_2})]$ o selecție asupra unei variabile aleatoare.

10. $X(X')$ repartizată $N(\mu_1, \sigma^2)$ $[N(\mu_2, \sigma^2)]$, σ^2 cunoscută.

Corolarul III.2 ne spune că

$$U = \frac{(\bar{X} - \bar{X}') - (\mu_1 - \mu_2)}{\sigma\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \sim N(0, 1)$$

Ecuațiile (2) și (3) devin

$$P(g_1 < U < g_2) = \int_{g_1}^{g_2} \varphi(u)\, du = 1 - \alpha$$

și

$$P\left((\bar{X}-\bar{X}')-g_2\sigma\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}<(\mu_1-\mu_2)<(\bar{X}-\bar{X}')-g_1\sigma\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}\right)=1-\alpha$$

Prin urmare

$$\left((\bar{X} - \bar{X}') - g_2\sigma\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}},\ (\bar{X} - \bar{X}') - g_1\sigma\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}\right)$$

este un interval de încredere pentru $\mu_1 - \mu_2$ având coeficientul de încredere $1 - \alpha$.

Urmînd aceeași cale ca în exemplul 1 găsim că intervalul pentru $\mu_1 - \mu_2$, avînd lungimea minimă, este

$$\left((\bar{X} - \bar{X}') + u_{\frac{\alpha}{2}}\sigma\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}},\ (\bar{X} - \bar{X}') + u_{1-\frac{\alpha}{2}}\sigma\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}\right)$$

11. $X(Y)$ repartizată $N(\mu_1, \sigma^2)[N(\mu_2, \sigma^2)]$, σ^2 necunoscută.

Teorema III.9 ne spune că variabila aleatoare

$$t = \frac{(\bar{X} - \bar{X}') - (\mu_1 - \mu_2)}{s\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}$$

unde

$$s^2 = \frac{\sum_1^{n_1}(X_i - \bar{X})^2 + \sum_1^{n_2}(X'_1 - \bar{X}')^2}{n_1 + n_2 - 2}$$

este repartizată $t(n_1 + n_2 - 2)$.

Scanned with OKEN Scanner

Ecuaţiile (2) şi (3) devin

$$P(t_1 < t < t_2) = \int_{t_1}^{t_2} g_{n_1+n_2-2}(t)dt = 1 - \alpha$$

şi respectiv

$$P\left((\bar{X} - \bar{X}') - t_2 s\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}} < (\mu_1 - \mu_2) < \right.$$

$$\left. < (\bar{X} - \bar{X}') - t_1 s\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}\right) = 1 - \alpha$$

Lungimea intervalului

$$L = s\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}\,(t_2 - t_1)$$

este minimă alegînd t_1 şi t_2 astfel încît $t_2 = -t_1 = a$, unde a satisface condiţia

$$\int_{-a}^{a} g_{n_1+n_2-2}(t)\,dt = 1 - \alpha$$

care este echivalentă cu condiţia

$$\int_{-\infty}^{-a} g_{n_1+n_2-2}(t)dt = \int_{a}^{\infty} g_{n_1+n_2-2}(t)\,dt = \frac{\alpha}{2},$$

din care scoatem

$$-a = t_{n_1+n_2-2,\frac{\alpha}{2}}, \qquad a = t_{n_1+n_2-2,1-\frac{\alpha}{2}}.$$

Urmează că

$$\left((\bar{X} - \bar{X}') + t_{n_1+n_2-2,\frac{\alpha}{2}}\, s\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}},\right.$$

(26)

$$\left.(\bar{X} - \bar{X}') + t_{n_1+n_2-2,1-\frac{\alpha}{2}}\, s\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}\right)$$

este un interval de încredere pentru $\mu_1 - \mu_2$, avînd coeficientul de încredere $1 - \alpha$.

În cazul în care cele două variabile au dispersii diferite, intervalul (26) devine

$$\left((\bar{X} - \bar{X}') + t_{m,\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}, \quad (\bar{X} - \bar{X}') + t_{m,1\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}\right),$$

Scanned with OKEN Scanner

unde

$$\frac{1}{m} = \frac{c^2}{n_1 - 1} + \frac{(1-c)^2}{n_2 - 1} \quad \text{și} \quad c = \frac{\frac{s_1^2}{n_1}}{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}.$$

II. În exemplele 2—11 am putut să găsim o funcție de o statistică și de parametrul necunoscut, a cărei repartiție era independentă de parametrul necunoscut. În aceste cazuri prin calcul probabilistic s-a obținut intervalul de încredere dorit. În multe cazuri importante nu este posibilă o asemenea metodă, deoarece nu poate fi găsită o funcție care să se bucure de aceste propietăți.

În aceste cazuri procedăm după cum urmează.

Să presupunem că repartiția variabilei X depinde de un parametru θ, necunoscut și că $\hat{\Theta}$ este un estimator pentru Θ (o funcție de statistică suficientă pentru θ (dacă există)). Atunci repartiția estimatorului $\hat{\Theta}$ va depinde de θ și în general cuantilele de ordin $\alpha/2$ și $1 - (\alpha/2)$ ale acestei repartiții vor depinde de θ într-un anume fel, să spunem

$$F_{\hat{\Theta}}(h_1(\theta)) = \frac{\alpha}{2}, \qquad F_{\hat{\Theta}}(h_2(\theta)) = 1 - \frac{\alpha}{2}$$

Atunci

$$P[h_1(\theta) \leqslant \hat{\Theta} \leqslant h_2(\theta)] = 1 - \alpha$$

Observație. Dacă X este discretă atunci și $\hat{\Theta}$ este discretă și nu este posibil totdeauna ca $F_{\hat{\Theta}}$ să fie egală cu $\alpha/2$ sau cu $1 - (\alpha/2)$; într-un asemenea caz definim $h_1(\theta)$ ca fiind cea mai mare valoare pentru care

$$F_{\hat{\Theta}}(h_1(\theta)) \leqslant \alpha/2$$

și $h_2(\theta)$ ca fiind cea mai mică valoare pentru care

$$F_{\hat{\Theta}}(h_2(\theta)) \geqslant 1 - (\alpha/2)$$

Atunci

$$P[h_1(\theta) < \hat{\Theta} < h_2(\theta)] \geqslant 1 - (\alpha/2)$$

Dacă în planul $(\hat{\theta}, \theta)$ figurăm cele două linii $\hat{\theta} = h_1(\theta)$, $\hat{\theta} = h_2(\theta)$, valorile pentru estimator și parametru obținem o figură asemănătoare celei din figura 5.

Scanned with OKEN Scanner

Pentru orice valoare θ_0 dată a parametrului θ, probabilitatea ca estimatorul $\hat{\Theta}$ să fie situat între $h_1(\theta_0)$ şi $h_2(\theta_0)$ este cel puţin $1 - \alpha$ sau cu alte cuvinte în $100(1 - \alpha)\%$ din selecţiile observate, $\hat{\theta}$ va fi situată între $h_1(\theta_0)$ şi $h_2(\theta_0)$.

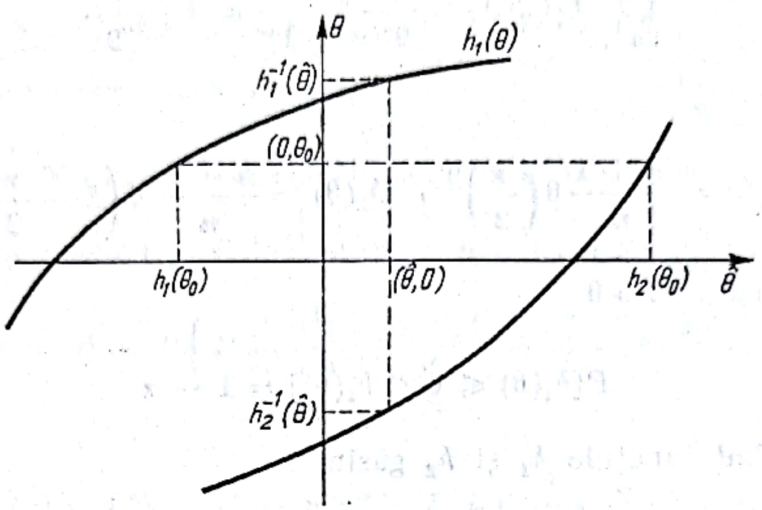


Fig. 5.

Odată realizată selecţia şi observat $\hat{\Theta} = \hat{\theta}$ probabilitatea ca intervalul $[h_2^{-1}(\hat{\theta}), h_1^{-1}(\hat{\theta})]$ să conţină pe $\hat{\theta}$ este $1 - \alpha$, deoarece aceasta este probabilitatea ca $\hat{\Theta}$ să varieze între $h_1(\theta)$ şi $h_2(\theta)$.

În multe cazuri aceasta indică o cale simplă de a construi astfel de intervale de încredere.

Exemplul 12. Fie $X_1, X_2, \ldots, X_n$ o selecţie asupra unei variabile aleatoare X repartizată uniform pe $(0, \theta)$. Atunci $X_{n,n}$ este o statistică suficientă pentru θ şi are densitatea de repartiţie

$$f_{X_{n,n}}(x) = \frac{nx^{n-1}}{\theta^n}, \quad 0 \leqslant x \leqslant \theta.$$

Avem

$$MX_{n,n} = \frac{n}{n+1}\,\theta,$$

ceea ce arată că $\hat{\theta} = \frac{n+1}{n} X_{n,n}$ este un estimator nedeplasat pentru θ şi funcţie de statistica suficientă.

Densitatea de repartiţie a statisticii $\hat{\theta}$ este

$$f_{\hat{\theta}}(u) = \frac{n^{n+1}}{\theta^n (n+1)^n}\, u^{n-1}, \quad 0 \leqslant u \leqslant \frac{n+1}{n}\theta$$

Scanned with OKEN Scanner

Urmează că

$$\int_0^{h_1(\theta)} f_{\hat{\theta}}(u)\,du = \frac{(nh_1(\theta))^n}{\theta^n(n+1)^n} = \frac{\alpha}{2},$$

$$\int_0^{h_2(\theta)} f_{\hat{\theta}}(u)\,du = \frac{(nh_2(\theta))^n}{\theta^n(n+1)^n} = 1 - \frac{\alpha}{2},$$

de unde

$$h_1(\theta) = \frac{n+1}{n}\theta\left(\frac{\alpha}{2}\right)^{1/n}, \quad h_2(\theta) = \frac{n+1}{n}\theta\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)^{1/n}$$

Pentru orice $\theta > 0$

$$P[h_1(\theta) \leqslant \hat{\theta} \leqslant h_2(\theta)] = 1 - \alpha$$

Inversînd funcţiile h_1 şi h_2 găsim

$$h_1^{-1}(\hat{\theta}) = \frac{n}{n+1}\hat{\theta}\left(\frac{\alpha}{2}\right)^{-1/n} = X_{n,n}\left(\frac{\alpha}{2}\right)^{-1/n}$$

$$h_2^{-1}(\hat{\theta}) = \frac{n}{n+1}\hat{\theta}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)^{-1/n} = X_{n,n}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)^{-1/n}$$

astfel încît $(\underline{\theta}, \overline{\theta})$ unde

$$\underline{\theta} = X_{n,n}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)^{-1/n}, \quad \overline{\theta} = X_{n,n}\left(\frac{\alpha}{2}\right)^{-1/n}$$

constituie în 100 $(1-\alpha)$% din cazuri un interval de încredere pentru θ (în cazul în care facem selecţii repetate de volum n).

Observaţii. i) În acest exemplu ca şi în toate celelalte căutăm $h_1^{-1}(\hat{\theta})$ şi $h_2^{-1}(\hat{\theta})$, valorile lui θ, să spunem θ_1 şi θ_2 astfel încît

$$h_1(\theta_1) = h_2(\theta_2) = \hat{\theta};$$

dar aceste valori se obţin înlocuind $h_1(\theta)$ şi $h_2(\theta)$ prin $\hat{\theta}$ în integralele lor definite (sau sumele) şi rezolvînd ecuaţia rezultată pentru parametrul necunoscut.

Astfel, în exemplul 12, avem

$$\left(\frac{n}{n+1}\right)^n \frac{1}{\theta^n}\hat{\theta}^n = \frac{\alpha}{2}, \quad \left(\frac{n}{n+1}\right)\frac{1}{\theta^n}\hat{\theta}^n = 1 - \frac{\alpha}{2},$$

care, cînd le rezolvăm pentru θ, dă funcţiile cerute.

Scanned with OKEN Scanner

ii) Această tehnică de lucru este folosită în special pentru obținerea intervalelor de încredere pentru parametrii repartițiilor discrete. În aceste cazuri probabilitatea ca intervalul să acopere parametrul necunoscut este cel puțin $1 - \alpha$.

Exemplul 13. Fie $X_1, X_2, \ldots, X_n$ o selecție asupra unei variabile aleatoare $Bi\ (1,p)$. Atunci

— $Y = \sum_1^n X_i$ este o statistică suficientă pentru p

— Y este repartizată $Bi\ (n,p)$

și

— $\hat{P} = \frac{1}{n} Y$ este un estimator nedeplasat pentru p

Deoarece Y este o variabilă discretă și $\hat{P}$ va fi o variabilă discretă și

$$P(Y = y) = P\left(\hat{P} = \frac{Y}{n}\right) \quad \text{și} \quad P(\hat{P} = k) = P(Y = nk)$$

Astfel

$$p_{\hat{P}}(k) = C_n^{nk}\, p^{nk} (1 - p)^{n-nk}, \quad k = 0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, 1.$$

Pentru a obține un interval de încredere pentru p, definim $h_1(p)$ și $h_2(p)$ după cum urmează

$$\sum_{nk=0}^{nh_1(p)} C_n^{nk}\, p^{nk} (1 - p)^{n-nk} \leqslant \frac{\alpha}{2}$$

$$\sum_{nk=nh_2(p)}^{n} C_n^{nk}\, p^{nk} (1 - p)^{n-nk} \leqslant \frac{\alpha}{2}$$

Avem

$$P[h_1(p) \leqslant \hat{P} \leqslant h_2(p)] \geqslant 1 - \alpha$$

Deoarece în acest caz, nh_1 și nh_2 reprezintă numărul de termeni ce trebuiesc adunați împreună într-o sumă binomială, ei pot lua valori întregi și graficul constă în $n + 1$ perechi de puncte, o valoare pentru h_1 și h_2 în fiecare din valorile posibile ale lui $\hat{p}$: $0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, 1$.

Pentru orice valoare $\hat{p}$ dată trebuie să cunoaștem numai $h_2^{-1}(\hat{p})$ și $h_1^{-1}(\hat{p})$ care sînt limitele de încredere observate pentru p, dată valoarea $\hat{p}$.

Observați $Y = y$, $\hat{p} = \frac{Y}{n}$, $h_1^{-1}(\hat{p})$ și $h_2^{-1}(\hat{p})$ sînt soluțiile pentru p în

$$\sum_{nk=0}^{y} C_n^{nk}\, p^{nk} (1 - p)^{n-nk} = \frac{\alpha}{2}; \text{ determină } h_1^{-1}(\hat{p})$$

$$\sum_{nk=y}^{n} C_n^{nk}\, p^{nk} (1 - p)^{n-nk} = \frac{\alpha}{2}; \text{ determină } h_2^{-1}(\hat{p}).$$

Scanned with OKEN Scanner

Dacă p este determinat cu egal, atunci pentru orice valoare mare a lui p, această sumă va fi strict mai mică decît $\frac{\alpha}{2}$ şi astfel avem cea mai mică valoare a lui p astfel încît

$$P(Y \leqslant y) \geqslant \frac{\alpha}{2}.$$

Un raţionament analog se aplică celeilalte ecuaţii.

De observat că am luat $h_2^{-1}(0) = 0$ şi $h_1^{-1}(1) = 1$; adică, dacă am observat $y = 0$ succese, atunci limita inferioară este luată 0 şi dacă observăm toate succesele, limita superioară este 1.

Pentru mai multă claritate, să examinăm cazul în care $n = 2$. Mulţimea valorilor variabilei Y este $\{0,1,2\}$ iar a lui $\hat{P}$ este $\left\{0, \frac{1}{2}, 1\right\}$. Atunci $h_2^{-1}(0) = 0$ şi $h_1^{-1}(0)$ este rădăcina ecuaţiei:

$$\sum_{nk=0}^{0} C_2^{nk} p^{nk} (1-p)^{2-nk} = (1=p)^2 = \frac{\alpha}{2};$$

astfel $h_1^{-1}(0) = 1 - \sqrt{\frac{\alpha}{2}}$. Similar determinăm $h_2^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$ din ecuaţia

$$2p(1-p) + p^2 = -p^2 + 2p = \frac{\alpha}{2},$$

care dă $h_2^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = 1 - \sqrt{1 - \frac{\alpha}{2}}$ şi determinăm $h_1^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$ din

$$(1-p)^2 + 2p(1-p) = 1 - p^2 = \frac{\alpha}{2},$$

care dă $h_1^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{1 - \frac{\alpha}{2}}$

Din:

$$p^2 = \frac{\alpha}{2},$$

găsim $h_2^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\frac{\alpha}{2}}$ şi $h_1^{-1}(1) = 1$

Un grafic ce prezintă interes este al probabilităţii ca intervalul de încredere, obţinut anterior, să acopere valoarea adevărată, necunoscută a lui p, ca funcţie de p; din modul în care a fost obţinut acest interval,

Scanned with OKEN Scanner

probabilitatea asociată lui este cel puţin $1 - \alpha$ pentru toţi p. Studiem valorile lui p pentru care egalitatea are loc şi cît de mare poate deveni probabilitatea de acoperire faţă de $1 - \alpha$.

Pentru orice valoare adevărată a lui p dată ($n = 2$, pentru simplificare)

$$P(h_2^{-1}(\hat{P}) \leqslant p \leqslant h_1^{-1}(\hat{P})) = \sum_{2k=0}^{2} P(h_2^{-1}(\hat{P}) \leqslant p < h_1^{-1}(\hat{P}) | \hat{P} = k) p_{\hat{P}}(k)$$

$P(h_2^{-1}(\hat{P}) \leqslant p < h_1^{-1}(\hat{P}) | \hat{P} = k)$ este fie 0 fie 1, deoarece intervalul acoperă sau nu acoperă parametrul p. Astfel, probabilitatea de acoperire este dată de suma probabilităţilor ca $\hat{P}$ să ia valori corespunzătoare astfel încît intervalul să acopere pe p.

Tabelul 1 dă valorile posibile ale parametrului p şi valorile corespunzătoare pentru $h_1(p)$ şi $h_2(p)$. Atunci pentru a completa calculele, evaluăm probabilităţile corespunzătoare ca $\hat{P}$ să ia astfel de valori ca intervalul determinat să acopere parametrul p.

De exemplu, dacă

$$0 \leqslant p < 1 - \sqrt{1 - \frac{\alpha}{2}},$$

intervalul de încredere va include parametrul p dacă şi numai dacă $\hat{P} = 0 (Y = 0)$; probabilitatea acestei realizări este $(1 - p)^2$.

Dacă

$$1 - \sqrt{1 - \frac{\alpha}{2}} \leqslant p < \sqrt{\frac{\alpha}{2}},$$

atunci intervalul va include pe p dacă şi numai dacă $\hat{P} = 0$ sau $\hat{P} = \frac{1}{2}$ ($Y = 0$ sau $Y = 1$), probabilitatea acestei realizări este

$$(1 - p)^2 + 2p(1 - p) = 1 - p^2$$

Tabelul 1

p	$h_1(p)$	$h_2(p)$
$0 \leqslant p < 1 - \sqrt{1 - \frac{\alpha}{2}}$	0	0
$1 - \sqrt{1 - \frac{\alpha}{2}} \leqslant p < \sqrt{\frac{\alpha}{2}}$	0	$\frac{1}{2}$
$\sqrt{\frac{\alpha}{2}} \leqslant p \leqslant 1 - \sqrt{\frac{\alpha}{2}}$	0	1
$1 - \sqrt{\frac{\alpha}{2}} < p \leqslant \sqrt{1 - \frac{\alpha}{2}}$	$\frac{1}{2}$	1
$\sqrt{1 - \frac{\alpha}{2}} < p \leqslant 1$	1	1

Scanned with OKEN Scanner

Dacă reprezentăm aceste probabilităţi, obţinem figura 6.

Atîta timp cît $\alpha \leqslant \frac{1}{2}$, $P(h_1(\hat{P}) \leqslant p < h_2(\hat{P})) \geqslant 1 - \alpha$ şi această probabilitate cu $n = 2$ depăşeşte $1 - \frac{\alpha}{2}$.

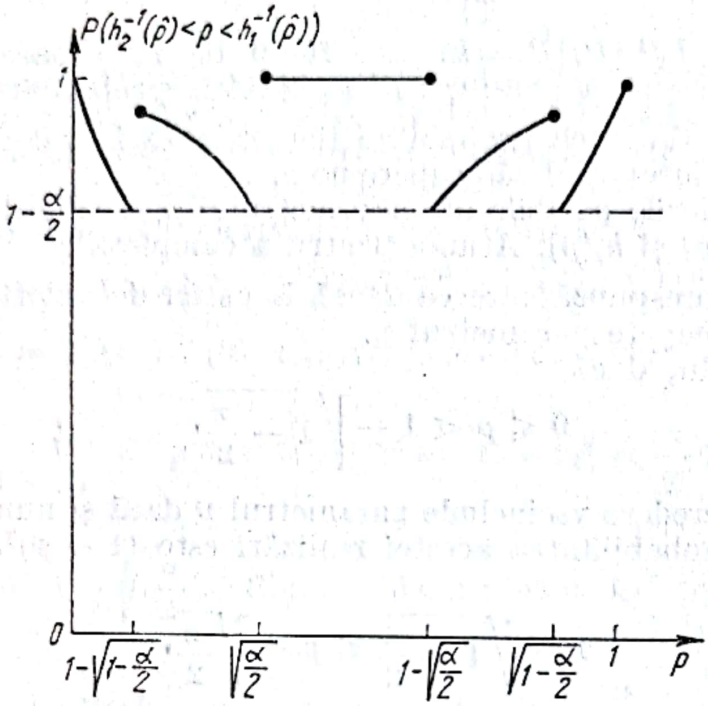


Fig. 6

§3. Intervale de încredere simultane

Uneori trebuie să estimăm doi sau mai mulţi parametri în acelaşi timp. Există două moduri în care poate fi rezolvată această problemă. Putem estima fiecare parametru cu un interval de încredere separat, obţinînd o mulţime de intervale de încredere simultane, sau putem construi o regiune de încredere ce acoperă punctul parametru (punctul ale cărui coordonate sînt egale cu valorile parametrilor) cu o probabilitate dată.

Intervalele de încredere simultane sînt în caz particular ale regiunilor de încredere.

Dacă definim coeficientul de încredere în cazul a mai mulţi parametri ca probabilitatea ca regiunea de încredere să conţină punctul parametru adevărat, atunci se observă că prin metoda intervalelor de încredere simultane, coeficientul de încredere este probabilitatea ca toate intervalele de încredere separate să conţină valoarea corespunzătoare a parametrului.

TEOREMA 1. (Tukey (1953)). *Dacă* $\theta_1, \ldots, \theta_k$ *sînt parametri necunoscuţi şi* $(\underline{\theta}_1, \overline{\theta}_1), \ldots, (\underline{\theta}_k, \overline{\theta}_k)$ *sînt intervalele de încredere respective, avînd coeficienţii de încredere* $1 - \frac{\alpha}{k}$, *atunci probabilitatea ca aceste intervale de încredere să conţină simultan parametrii* $\theta_1, \ldots, \theta_k$ *este cel puţin* $1 - \alpha$.

Scanned with OKEN Scanner

Demonstrație. Să notăm cu E_i evenimentul care constă în faptul că $(\theta_i, \overline{\theta_i})$ conține pe θ_i și cu CE_i evenimentul complementar $(1 \leqslant i \leqslant k)$. În acest caz avem

$$P(CE_i) = \frac{\alpha}{k}, \quad 1 \leqslant i \leqslant k. \tag{27}$$

Probabilitatea ca toate evenimentele $E_1, \ldots, E_k$ să se realizeze simultan este $P\left(\bigcap_1^k E_i\right)$ și din inegalitatea lui Boole

$$P\left(\bigcap_1^k E_i\right) \geqslant 1 - \sum_1^k P(CE_i)$$

și ținînd seama de (27) obținem

$$P\left(\bigcap_1^k E_i\right) \geqslant 1 - \alpha$$

ceea ce demonstrează teorema.

TEOREMA 2. *Fie* $(U_1, \ldots, U_k)$ *un vector aleator k-dimensional avînd repartiția*

$$N(\mu, \sigma^2 \mathbf{A})$$

unde $\mathbf{A} = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant k}$ *este nesingulară, simetrică și cunoscută și* σ^2 *este necunoscută. Fie* V/σ^2 *o variabilă aleatoare independentă de* $(U_1, \ldots, U_k)$ *și avînd repartiția* $\chi^2(n)$. *Fie* $\delta = \sqrt{kvF_{1-\alpha}(k,n)/n}$. *Dacă* $\mathcal{C}$ *este mulțimea tuturor vectorilor reali* $(c_1, \ldots, c_k)$, *unde* $c_1, \ldots, c_k$ *nu sînt toate zero, atunci probabilitatea ca inegalitățile*

$$\Sigma c_i U_i - \delta \sqrt{\sum_{i,j} a_{ij} c_i c_j} \leqslant \Sigma c_i \mu_i \leqslant \Sigma c_i U_i + \delta \sqrt{\sum_{i,j} a_{ij} c_i c_j} \tag{28}$$

să aibă loc simultan pentru toți $(c_1, \ldots, c_k)$ *din* $\mathcal{C}$ *este* $1 - \alpha$.

Demonstrație. Dacă toți $c_1, \ldots, c_k$ sînt egali cu zero (28) are loc cu probabilitatea unu. Din condițiile teoremei urmează că $\frac{1}{\sigma^2} \sum_{i,j} a^{ij} Y_i Y_j$, unde $Y_i = U_i - \mu_i$ și V/σ^2 sînt variabile aleatoare independente repartizate χ^2 cu k, respectiv n grade de libertate. Conform definiției I. 9 variabila aleatoare

$$\frac{\frac{1}{\sigma^2} \sum_{i,j} a^{ij} Y_i Y_j}{V/\sigma^2} \cdot \frac{n}{k} = \frac{n}{kV} \sum_{i,j} a^{ij} Y_i Y_j \sim F(k,n)$$

Avem

$$P\left(\frac{nk}{kV} \sum_{i,j} a^{ij} Y_i Y_j < F_{1-\alpha}(k,n)\right) = 1 - \alpha. \tag{29}$$

Scanned with OKEN Scanner

Mulțimea punctelor din spațiul lui $(\mu_1,\ldots,\mu_k)$ pentru care

$$\sum_{i,j} a^{ij}Y_iY_j < \delta^2 \tag{30}$$

este interiorul elipsoidului de încredere de 100 $(1-\alpha)\%$ centrat în $(u_1,\ldots,u_k)$ pentru punctul parametru adevărat $(\mu_1,\ldots\mu_k)$. Dacă considerăm mulțimea punctelor din spațiul lui $(\mu_1,\ldots,\mu_k)$ conținute între toate perechile de hiperplane $k-1$ dimensionale tangente la acest elipsoid, această mulțime de puncte constituie interiorul elipsoidului (30) și probabilitatea asociată acestei mulțimi este $1-\alpha$. Arătăm că pentru orice alegere particulară a vectorului $(c_1,\ldots,c_k)$ din $\mathcal{C}$, două hiperplane $k-1$ dimensionale din spațiul lui $(\mu_1,\ldots,\mu_k)$, având ecuațiile

$$\Sigma c_i\mu_i = \Sigma c_iU_i \pm \delta\sqrt{\sum_{i,j} a_{ij}c_ic_j} \tag{31}$$

sînt tangente la elipsoidul

$$\sum_{i,j} a^{ij}y_iy_j = \delta^2 \tag{32}$$

Orice punct $(\mu_1,\ldots,\mu_k)$ dintre două hiperplane (31) satisface (28).

Ecuația unui hiperplan (31) în spațiu $(y_1,\ldots,y_k)$ se scrie

$$\Sigma c_iy_i = d. \tag{33}$$

Cele două valori ale lui d pentru care hiperplanul (33) este tangent la elipsoidul (32) sînt

$$d = \pm\delta\sqrt{\sum_{i,j} a_{ij}c_ic_j}$$

Înlocuind această valoare în (33) obținem (31) ca ecuații ale celor două hiperplane tangente.

Observație. Dacă mulțimea $\mathcal{C}$ conține numai un număr finit N de vectori, atunci mulțimea punctelor din spațiul $(\mu_1,\ldots,\mu_k)$ care variază între cele N perechi de hiperplane corespunzătoare acestor N vectori este un poliedru aleator k-dimensional G_k circumscris elipsoidului (32). Deoarece poliedrul G_k conține elipsoidul probabilitatea asociată lui G_k este mai mare ca $1-\alpha$.

Dacă luăm $c_i = 1$, $c_j = -1$ și toți ceilalți c sînt egali cu zero, $i>j = 1,\ldots,k$, obținem o submulțime de $N = k(k-1)/2$ vectori în $\mathcal{C}$. Atunci

$$P(x_i - x_j) - \delta\sqrt{a_{ii}+a_{jj}-2a_{ij}} \leqslant (\mu_i-\mu_j) \leqslant (x_i-x_j) + \delta\sqrt{a_{ii}+a_{jj}-2a_{ij}}) \geqslant 1-\alpha.$$

Să presupunem că $(Z_1,\ldots,Z_k)$ este o selecție de volum k asupra unei variabile aleatoare $\sim N(\mu, d^2\sigma^2)$ unde d^2 este o constantă pozitivă

Scanned with OKEN Scanner

arbitrară, iar V/σ^2 o variabilă aleatoare independentă de $(Z_1,\ldots,Z_k)$, repartizată $\chi^2(n)$. Fie $\mathcal{A}$ amplitudinea lui $(Z_1,\ldots,Z_k)$, adică

$$\mathcal{A} = \max(Z_1,\ldots,Z_k) - \min(Z_1,\ldots,Z_k)$$

DEFINIȚIA 2. Variabila aleatoare $\sqrt{n}\,\mathcal{A}/\sqrt{\nu d}$ se numește amplitudine studentizată și se notează $\mathcal{A}_{k,n}$.

Fie $\mathcal{A}_{k,n,1-\alpha}$ cuantila de ordinul $1-\alpha$ corespunzătoare amplitudinii studentizate, adică

$$P(\mathcal{A}_{k,n} \leqslant \mathcal{A}_{k,n,1-\alpha}) = 1-\alpha \tag{34}$$

TEOREMA 3. (Tukey). *Fie* $(X_1,\ldots,X_k)$ *un vector aleator* k*-dimensional, avînd repartiția* $N(\boldsymbol{\mu}, \sigma^2\mathbf{A})$ *unde* $a_{ii} = a^2$, $a_{ij} = a_{ji} = \rho a^2$, $i \neq j = 1,\ldots,k$, a *și* ρ *fiind cunoscuți.*

Fie V/σ^2 *o variabilă aleatoare independentă de* $(X_1,\ldots,X_k)$ *și avînd repartiția* $\chi^2(n)$. *Dacă* $\mathcal{C}_0$ *este mulțimea vectorilor reali* $(c_1,\ldots,c_k)$ *pentru care* $\sum c_i = 0$ *și* $c_1,\ldots,c_k$ *nu sînt toți zero, atunci probabiliatatea ca inegalitățile*

$$\sum c_i X_i - D \leqslant \sum c_i \mu_i \leqslant \sum c_i X_i + D \tag{35}$$

să aibă loc simultan pentru toți vectorii din $\mathcal{C}_0$ *este* $1-\alpha$, *unde,*

$$D = \mathcal{A}_{k,n,1-\alpha}\sqrt{a^2 V(1-\rho)/n}\left(\frac{1}{2}\sum|c_i|\right) \tag{36}$$

Demonstrație. Dacă vectorul $(c_1,\ldots,c_k)$ are toate componentele nule, atunci inegalitatea (35) are loc cu probabilitatea unu.

Dacă $Y_i = X_i - \mu_i$, $\quad 1 \leqslant i \leqslant k$, atunci $(Y_1,\ldots,Y_k)$ este repartizat $N(\mathbf{0}, \sigma^2\mathbf{A})$. Fie

$$Z_i = Y_i + hw,$$

unde $w = Y_1 + \ldots + Y_k$, iar h este o constantă satisfăcînd ecuația

$$h^2k[1+(k-1)\rho] + 2h[1+(k-1)\rho] + \rho = 0,$$

$-1/(k-1) < \rho < 1$, deoarece a_{ij} este pozitiv definită.

În aceste condiții, variabilele aleatoare $Z_1,\ldots,Z_k$ sînt independente și repartizate $N(0, \sigma^2a^2(1-\rho))$.

Inegalitățile

$$|z_i - z_j| \leqslant H, \qquad i,j = 1,\ldots,k \tag{37}$$

sînt satisfăcute dacă și numai dacă

$$\mathcal{A} \leqslant H. \tag{38}$$

Scanned with OKEN Scanner

Prin ipoteză V/σ^2 este repartizată $\chi^2(n)$ și independentă de $(Z_1,\ldots,Z_k)$ care după cum am văzut este o selecție de volum k asupra unei variabile $\sim(N(0,\ \sigma^2a^2(1-\rho))$. Urmează că variabila aleatoare $\mathcal{A}\sqrt{n/[a^2V(1-\rho)]}$ este amplitudinea studentizată $\mathcal{A}_{k,n}$.

Fie $(c_1,\ldots,c_k)$ un vector astfel încît $c_1,\ldots,c_k$ nu sînt toate nule, însă $\sum c_i = 0$.

Putem scrie

$$\Sigma^* c_i = \Sigma^{**}(-c_j) = \frac{1}{2}\Sigma|c_i| = K,$$

unde $\Sigma^*(\Sigma^{**})$ reprezintă suma după toate valorile lui $i(j)$ pentru care $c_i > 0$ $((-c_j) > 0)$.

Avem

$$\sum_i c_i z_i = \sum_i{}^* c_i z_i - \sum_i{}^{**}(-c_j)z_j = \frac{1}{K}[\Sigma^*\Sigma^{**} c_i(-c_j)z_i -$$

$$-\Sigma^*\Sigma^{**} c_i(-c_j)z_j] = \frac{1}{K}\Sigma^*\Sigma^{**}c_i(-c_j)(z_i - z_j).$$

Dacă $|z_i - z_j| \leqslant H,\ i.j = 1,\ldots,k,$

$$|\sum_i c_i z_i| \leqslant \frac{1}{K}\sum_i{}^*\sum_j{}^{**}c_i(-c_j)\,|z_i - z_j| \leqslant$$

$$\leqslant HK = H\left(\frac{1}{2}\sum_i |c_i|\right)$$

Deoarece

$$(39)\leftrightarrow(37)\leftrightarrow(38)$$

urmează că

$$P\left(|\sum_i c_i z_i| \leqslant H\left(\frac{1}{2}\sum_i |c_i|\right) \textit{ pentru toți } (c_1,\ldots,c_k) \textit{ din } \mathcal{C}_0\right) = P(\mathcal{A} \leqslant H). \tag{40}$$

Dacă alegem

$$H = \mathcal{A}_{k,n,1-\alpha}\sqrt{a^2V(1-\rho)/n},$$

unde $\mathcal{A}_{k,n,1-\alpha}$ este definit ca în (34), avem

$$P(\mathcal{A} \leqslant \mathcal{A}_{k,n,1-\alpha}\sqrt{a^2V(1-\rho)/n}) = 1-\alpha$$

Prin urmare

$$P\left(|\sum_i c_i Z_i| \leqslant D \textit{ pentru toți } (c_1,\ldots,c_k) \textit{ din } \mathcal{C}_0\right) = 1-\alpha$$

unde D este dat de (36).

Scanned with OKEN Scanner

Însă

$$\sum_i c_i z_i = \sum_i c_i(y_i + hw) = \sum c_i(x_i - \mu_i)$$

și deci

$$P(|\sum_i c_i x_i - \sum_i c_i \mu_i| \leqslant D \text{ pentru toți } (c_1,\ldots,c_k) \text{ din } \mathcal{C}_0) = 1 - \alpha,$$

ceea ce demonstrează teorema.

Observație. Probabilitatea ca inegalitățile

$$(x_i - x_j) - D \leqslant (\mu_i - \mu_j) \leqslant (x_i - x_j) + D$$

să aibă loc simultan pentru toate alegerile lui $i, j = 1,\ldots,k$ este mai mare ca $1 - \alpha$. Această afirmație este echivalentă cu presupunerea că

$$((x_i - x_j) \pm D)$$

sînt intervale de încredere pentru $(\mu_i - \mu_j)$ pentru toți $i > j = 1,\ldots,k$ astfel încît probabilitatea ca toate diferențele $(\mu_i - \mu_j)$ să fie simultan conținute în intervalele lor de încredere este mai mare ca $1 - \alpha$.

§4. Regiuni de încredere

TEOREMA 4. *Fie $(x_1,\ldots,x_n)$ o selecție dintr-o populație avînd funcția de repartiție $F(x; \theta_0)$ unde θ_0 este r-dimensională. Fie $g_n(x_1,\ldots,x_n; \theta)$ o variabilă aleatoare definită în orice punct din spațiul parametric Ω_r, și în orice punct din spațiul de selecție R^r, cu excepția unei mulțimi de măsură nulă, și a cărei repartiție nu depinde de θ. Fie $E_r(x_1,\ldots,x_n)$ mulțimea punctelor $y = (y_1,\ldots,y_r)$ din R^r pentru care $g_1 < g_n(x_1,\ldots,x_n,y) < g_2$ unde g_2 sînt alese astfel încît*

$$P(g_1 < g_n(x_1,\ldots,x_n;\theta) < g_2) = 1 - \alpha$$

În aceste condiții E_r este o mulțime aleatoare r-dimensional astfel încît pentru punctul parametric adevărat θ_0, avem

$$P(\theta_0 \in E_r \mid \theta_0) = 1 - \alpha;$$

E_r poartă numele de regiune de încredere pentru θ_0, avînd coeficientul de încredere $1 - \alpha$.

Exemplul 14. Fie $(X_1,X_2,\ldots,X_{n_1})$ $[(X_1,Y_2,\ldots,Y_{n_2})]$ o selecție asupra unei variabile aleatoare $X(Y)$ repartizată $N(\mu_1, \sigma_1^2)$ $[N(\mu_2, \sigma_2^2)]$.

Teorema III. 7 ne spune că variabila aleatoare

$$\frac{\sqrt{n_1}(\bar{X}_{n_1} - \mu_1)}{s_1} \left[\frac{\sqrt{n_2}(\bar{Y}_{n_2} - \mu_2)}{s_2} \right]$$

Scanned with OKEN Scanner

unde

$$s_1^2 = \frac{1}{n_1 - 1} \sum_1^{n_1} (X_i - \bar{X}_{n_1})^2,$$

$$s_2^2 = \frac{1}{n_2 - 1} \sum_1^{n_2} (Y_i - \bar{Y}_{n_2})^2$$

este repartizată $t(n_1 - 1)$ $[t(n_2 - 1)]$. Urmează că probabilitatea inegalității

$$(41) \qquad g_1 \leqslant a_1 \frac{\sqrt{n_1}(\bar{X}_{n_1} - \mu_1)}{s_1} + a_2 \frac{\sqrt{n_2}(\bar{Y}_{n_2} - \mu_2)}{s_2} < g_2$$

este

$$(42) \qquad \iint g_{n_1-1}(u) g_{n_2-1}(v) \mathrm{d}u \, \mathrm{d}v$$

integrala fiind extinsă la toate punctele din planul (u, v) pentru care

$$g_1 < a_1 u + a_2 v < g_2$$

Inegalitatea (41) se poate scrie sub forma

$$(41') \qquad \begin{aligned} \sqrt{n_1} \frac{a_1 \bar{X}_{n_1}}{s_1} + \sqrt{n_2} \frac{a_2 \bar{Y}_{n_2}}{s_2} - g_2 < \sqrt{n_1} \frac{a_1 \mu_1}{s_1} + \sqrt{n_2} \frac{a_2 \mu_2}{s_2} < \\ < \sqrt{n_1} \frac{a_1 \bar{X}_{n_1}}{s_1} + \sqrt{n_2} \frac{a_2 \bar{Y}_{n_2}}{s_2} - g_1 \end{aligned}$$

(41') definesc o regiune din spațiul parametrilor pentru care probabilitatea de a acoperi punctul (μ_1, μ_2) este dată de (42).

În cazul în care $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$ corolarul III.1 ne spune că variabila aleatoare

$$\frac{\sqrt{n_1}(\bar{X}_{n_1} - \mu_1)}{\sigma} \left[\frac{\sqrt{n_2}(\bar{Y}_{n_2} - \mu_2)}{\sigma} \right]$$

este repartizată $N(0,1)$.

Urmează că variabila aleatoare

$$\frac{n_1(\bar{X}_{n_1} - \mu_1)^2}{\sigma^2} \left[\frac{n_2(\bar{Y}_{n_2} - \mu_2)^2}{\sigma^2} \right]$$

este repartizată $\chi^2(n_1 - 1)[\chi^2(n_2 - 1)]$.

Scanned with OKEN Scanner

De aici rezultă că variabilele aleatoare

$$\frac{n_1(\bar{X}_{n_1}-\mu_1)^2+n_2(\bar{Y}_{n_2}-\mu_2)^2}{\sigma^2} \text{ și } \frac{\sum_1^{n_1}(X_i-\bar{X}_{n_1})^2+\sum_1^{n_2}(Y_i-\bar{Y}_{n_2})^2}{\sigma^2}$$

sînt independente și repartizate $\chi^2(2)$, respectiv $\chi^2(n_1+n_2-2)$, ceea ce permite să afirmăm că

$$\frac{n_1(\bar{X}_{n_1}-\mu_1)^2+n_2(\bar{Y}_{n_2}-\mu_2)^2}{\sum_1^{n_1}(X_i-\bar{X}_{n_1})^2+\sum_1^{n_2}(Y_i-\bar{Y}_{n_2})^2}\cdot\frac{n_1+n_2-2}{2}$$

este o variabilă aleatoare avînd repartiția $F(2, n_1+n_2-2)$.

Luînd pe g_1 și g_2 astfel încît

$$\frac{2}{n-2}\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}-1\right)}\int_{g_1}^{g_2}\left(1+\frac{2}{n-2}u\right)^{-\frac{n}{2}}du=1-\alpha,$$

urmează că

$$g_1\frac{2\left[\sum_1^{n_1}(x_i-\bar{x}_{n_1})^2+\sum_1^{n_2}(y_i-\bar{y}_{n_2})^2\right]}{n-2}<n_1(\bar{x}-\mu_1)^2+n_2(\bar{y}-\mu_2)^2<$$

$$<g_2\frac{2\left[\sum_1^{n_1}(x_i-\bar{x}_{n_1})^2+\sum_1^{n_2}(y_i-\bar{y}_{n_2})^2\right]}{n-2}$$

reprezintă o regiune de încredere pentru μ_1 și μ_2, regiune cuprinsă între doi cilindri eliptici.

§5. Construirea intervalelor de încredere pentru selecții mari

Intervalele de încredere studiate pînă acum au fost determinate fără a face vreo ipoteză asupra volumului selecției. În unele cazuri putem determina intervalele de încredere numai pentru selecții mari. În teorema IX. 7 am arătat că în anumite condiții $\partial \ln P/\partial\theta$ este asimptotic repartizată normal cu media zero și dispersia

$$M\left[\left(\frac{\partial \ln P}{\partial\theta}\right)^2\right]=-M\left(\frac{\partial^2 \ln P}{\partial\theta^2}\right)$$

Scanned with OKEN Scanner

Vom folosi acest fapt la determinarea unei mulţimi de încredere pentru θ în selecţii mari. Variabila aleatoare

$$U = \frac{\partial \ln P}{\partial \theta} \Big/ \sqrt{M\left(\frac{\partial \ln P}{\partial \theta}\right)^2} \sim N(0,1), \tag{43}$$

ceea ce ne permite să scriem :

$$\lim_{n\to\infty} P(a < U < b) = \int_a^b \varphi(t)\, dt$$

Dacă statistica U este strict monotonă în raport cu θ astfel încît inegalităţile pentru statistica U se pot transforma în ilegalitate pentru θ putem construi un interval de încredere pentru θ.

Exemplul 15. Fie $X_1, \ldots, X_n$ o selecţie asupra unei variabile aleatoare $X \sim Po(\lambda)$. Avem

$$\frac{\partial \ln P}{\partial \lambda} = \frac{n}{\lambda}(\bar{X} - \lambda)$$

$$-\frac{\partial^2 \ln P}{\partial \lambda^2} = \frac{n\bar{X}}{\lambda^2}, \qquad M\left(-\frac{\partial^2 \ln P}{\partial \lambda^2}\right) = \frac{n}{\lambda}$$

de unde

$$U = (\bar{X} - \lambda)\sqrt{n/\lambda}$$

Putem deci să scriem

$$\lim_{n\to\infty} P(-u_{1-\frac{\alpha}{2}} < U < u_{1-\frac{\alpha}{2}}) = \int_{-u_{1-\frac{\alpha}{2}}}^{u_{1-\frac{\alpha}{2}}} \varphi(t)dt = 1 - \alpha$$

sau echivalent

$$\lim_{n\to\infty} P(\lambda_1 < \lambda < \lambda_2) = \int_{-u_{1-\frac{\alpha}{2}}}^{u_{1-\frac{\alpha}{2}}} \varphi(t)dt = 1 - \alpha$$

unde λ_1 şi λ_2 sînt rădăcinile ecuaţiei

$$\lambda^2 - \left(2\bar{x} + \frac{u^2_{1-\frac{\alpha}{2}}}{n}\right)\lambda + \bar{x}^2 = 0$$

Am determinat astfel, pentru valorile mari ale lui n, intervalul de încredere $[\lambda_1, \lambda_2]$ pentru parametrul λ. Păstrînd numai termenii în n pînă la $n^{-1/2}$, avem

$$\lambda_{1,2} = \bar{x} \mp u_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\bar{x}/n}.$$

Scanned with OKEN Scanner

§6. Cele mai scurte intervale de încredere

Se pune problema să se găsească o mulțime formată din intervale de încredere care să fie unul mai bun decît celălalt, într-un anumit sens, problemă asemănătoare cu aceea în care trebuia să alegem dintre mai multe estimații ale unui parametru, o estimație care să fie superioară celorlalte.

Să considerăm o mulțime de intervale care sînt mai scurte în medie. Dacă intervalul de încredere este (t_0, t_1), atunci lungimea sa este

$$\delta = t_1 - t_0$$

și trebuie să minimizăm

$$\int P\delta \, dv.$$

TEOREMA 5. (Wilks (1938)). Fie $X_1, X_2, \ldots, X_n$ o selecție asupra unei variabile cu densitatea de repartiție $f(x, \theta)$ și $h(x, \theta)$ o statistică *care satisface pentru* $a < \theta_0 < b$, *următoarele condiții* :

a) $$M[h(x, \theta_0)]_{\theta_0} = \int h(x, \theta_0) f(x, \theta_0) dx = 0 ;$$

b) $$M\{[h(x, \theta_0)]^3\}_{\theta_0} = \int h^3(x, \theta_0) f(x, \theta_0) dx < \infty, \quad \textit{pentru } n > n_0$$

Fie

(44) $$\xi = \frac{\sum_1^n h(x_j, \theta_0)}{\sqrt{nD^2[h(x, \theta_0)]_{\theta_0}}}$$

Avem

$$\lim_{n \to \infty} P(\xi < x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(t) dt$$

sau în cuvinte ξ *este repartizată* $N(0,1)$.

Statistica U *definită în* (43) *aparține clasei* ξ, *avînd* $h = \partial \ln f(x, \theta)/\partial\theta$.

TEOREMA 6. (Wilks (1938)). *În selecții mari, cele mai scurte intervale de încredere sînt obținute folosind statistica* U.

Demonstrație. Mai întîi să arătăm că

$$\left| M\left(\frac{\partial U}{\partial \theta}\right) \right| < \left| M\left(\frac{\partial \xi}{\partial \theta}\right) \right|$$

Scanned with OKEN Scanner

pentru fiecare θ fixat, exceptînd cazul

$$h = k\frac{\partial \ln f}{\partial \theta}$$

Dacă $g(x, \theta) = \frac{\partial \ln f}{\partial \theta}$, atunci

$$\frac{\partial U}{\partial \theta} = \frac{1}{\sqrt{nD^2(g)}}\left[\Sigma \frac{\partial g}{\partial \theta} - \frac{1}{2D^2(g)}\Sigma g \frac{\partial D^2(g)}{\partial \theta}\right],$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial \theta} = \frac{1}{\sqrt{nD^2(h)}}\left[\Sigma \frac{\partial h}{\partial \theta} - \frac{1}{2D^2(h)}\Sigma h \frac{\partial D^2(h)}{\partial \theta}\right],$$

de unde

$$M\left(\frac{\partial U}{\partial \theta}\right) = \frac{1}{\sqrt{nD^2(g)}}\left[\Sigma M\left(\frac{\partial g}{\partial \theta}\right) - \frac{1}{2D^2(g)}\Sigma M(g)\frac{\partial D^2(g)}{\partial \theta}\right]$$

Cum

$$M(g) = M\left(\frac{\partial \ln f}{\partial \theta}\right) = 0$$

și

$$M\left(\frac{\partial g}{\partial \theta}\right) = M\left(\frac{\partial^2 \ln f}{\partial \theta^2}\right) = -M\left(\frac{\partial \ln f}{\partial \theta}\right)^2 = -D^2(g)$$

obținem

$$M\left(\frac{\partial U}{\partial \theta}\right) = -\frac{nD^2(g)}{\sqrt{nD^2(g)}} = -\sqrt{nD^2(g)}$$

Analog

$$M\left(\frac{\partial \xi}{\partial \theta}\right) = \sqrt{\frac{n}{D^2(h)}}M\left(\frac{\partial h}{\partial \theta}\right)$$

Deoarece

$$M(h) = \int hf\,dx = 0,$$

$$0 = \frac{\partial M(h)}{\partial \theta} = \int \frac{\partial h}{\partial \theta} f\,dx + \int h\frac{\partial f}{\partial \theta}\,dx$$

$$M\left(\frac{\partial h}{\partial \theta}\right) = \int \frac{\partial h}{\partial \theta} f\,dx = -\int h\frac{\partial f}{\partial \theta}\,dx = -\operatorname{cov}(h, g)$$

urmează că

$$\left|M\left(\frac{\partial U}{\partial \theta}\right)\right| - \left|M\left(\frac{\partial \xi}{\partial \theta}\right)\right| = \sqrt{\frac{n}{D^2(h)}}\left[\sqrt{D^2(h)D^2(g)} - |\operatorname{cov}(h, g)|\right]$$

Inegalitatea lui Schwarz ne spune că

$$\left[\sqrt{D^2(h)D^2(g)} - |\operatorname{cov}(h, g)|\right] > 0,$$

Scanned with OKEN Scanner

exceptînd cazul $h = k.\ g$ cînd paranteza este nulă. Deci

$$\left| M\left(\frac{\partial U}{\partial \theta}\right)\right| > \left|M\left(\frac{\partial \xi}{\partial \theta}\right)\right|$$

Dacă λ_α este definit de

$$\int_{-\lambda_\alpha}^{\lambda_\alpha} \varphi(t) = 1 - \alpha$$

limitele de încredere pentru θ, t_0, t_1 satisfac relaţia

$$\Sigma g(x, \theta)/\sqrt{nD^2(g)} = \pm u_{1-\frac{\alpha}{2}}$$

care se mai poate scrie

$$u(t) = \pm u_{1-\frac{\alpha}{2}}$$

Pentru ξ se obţin limitele v_0 şi v_1, ce satisfac relaţia

$$\Sigma h(x, \theta)/\sqrt{nD^2(h)} = \pm u_{1-\frac{\alpha}{2}}$$

sau

$$\xi(v) = \pm u_{1-\frac{\alpha}{2}}$$

Dezvoltarea Taylor în jurul adevăratei valori θ_0, dă

$$\pm u_{1-\frac{\alpha}{2}} = u(\theta_0) + (t - \theta_0)\left(\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)_{\theta'} = \xi(\theta_0) + (v - \theta_0)\left(\frac{\partial \xi}{\partial \theta}\right)_{\theta''},$$

unde θ' şi θ'' sînt valori din vecinătatea lui θ_0 care converg în probabilitate către θ_0. Punînd $t = v = \theta_0$ în formula de mai sus, obţinem $u(\theta_0) = \xi(\theta_0)$.

Prin urmare

$$(t - \theta_0)\left(\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)_{\theta'} = (v - \theta_0)\left(\frac{\partial \xi}{\partial \theta}\right)_{\theta''}$$

şi cum derivatele converg în probabilitate către valorile lor medii

$$|t - \theta_0| < |v - \theta_0|,$$

astfel că limitele de încredere t_0 şi t_1 sînt mai apropiate decît orice alte limite v_0 şi v_1, date de un membru al clasei ξ.

DEFINIŢIA 3. Spunem că $[t_0, t_1]$ este un interval de încredere uniform cel mai bun, cu coeficientul de încredere $1-\alpha$ pentru θ, dacă pentru orice alt interval $[v_0, v_1]$ a lui θ, avem

$$P(t_0 \leqslant \theta' \leqslant t_1) \leqslant P(v_0 \leqslant \theta' \leqslant v_1), \tag{45}$$

unde θ' este orice altă valoare diferită de adevărata valoare θ.

Scanned with OKEN Scanner

§7. Interval de verosimilitate

Intervalele de verosimilităţi, pe care le vom prezenta în acest paragraf, se obţin din funcţia de verosimilitate prin trasarea unei linii orizontale care intersectează graficul funcţiei de verosimilitate.

Această metodă este derivata din testul raportului de verosimilităţi (Neyman şi Pearson (1933)). Printre cei care au folosit această tehnică amintim pe Box şi Cox (1964), Madansky (1965) şi Sprott şi Kalbfleisch (1969).

Vom determina, după Hudson (1971), intervalul de verosimilităţi cu ajutorul proprietăţilor sale de selecţie.

DEFINIŢIA 4. (Hudson (1971)). Intervalul

$$I(\theta : \beta \mid \mathbf{x}) = \{\theta : P(\mathbf{x} \mid \theta) \geqslant e^{-\beta} P(\mathbf{x} \mid \hat{\theta})\}, \tag{46}$$

unde $\hat{\theta}$ este estimatorul de maximă verosimilitate al parametrului θ şi β o constantă pozitivă, poartă numele de interval de verosimilitate pentru θ.

În cele ce urmează vom considera cazul în care $P(\mathbf{x} \mid \theta)$ este unimodală, astfel încît $I(\theta)$ este un interval.

DEFINIŢIA 5. (Hudson (1971)). Vom spune că funcţia de verosimilitate are o formă standard dacă

i) $\hat{\theta}$ este unic

ii) $P(\mathbf{x} \mid \underline{\theta}) = 0 = P(\mathbf{x} \mid \overline{\theta})$ pentru $\underline{\theta} < \hat{\theta} < \overline{\theta}$

iii) $P(\mathbf{x} \mid \theta)$ este monoton crescătoare pe $\underline{\theta} \leqslant \theta \leqslant \hat{\theta}$

şi monoton descrescătoare pe $\hat{\theta} \leqslant \theta \leqslant \overline{\theta}$.

În cazul în care funcţia de verosimilitate are o formă standard intervalul de verosimilitate pentru θ are coeficientul de încredere 0,954.

Alegerea lui $\beta = 2$ nu depinde nici de repartiţia vectorului $\mathbf{x}$ nici de volumul selecţiei, nici de faptul că selecţia este censorizată sau nu ci numai de coeficientul de încredere asimptotic.

Exemple.

16. $X \sim N(\mu, 1)$

Atunci

$$I = [\bar{X}_n - 2/\sqrt{n},\ \bar{X}_n + 2/\sqrt{n}]$$

şi

$$1 - \alpha = P[I \ni \mu] = 0{,}954 \text{ pentru toţi } n.$$

17. X cu densitatea de repartiţie

$$\theta^{-1} e^{-x/\theta}, \qquad 0 < x < \infty$$

Atunci

$$I = [k_1 \bar{X},\ k_2 \bar{X}]$$

Scanned with OKEN Scanner

unde

$$k_i^{-1} + \ln k_i = 1 + 2/n, \qquad i = 1,2,$$

și

$$k_1 < 1 < k_2$$

Deci

$$1 - \alpha = P[k_2^{-1} \leqslant \bar{X}/\theta \leqslant k_1^{-1}],$$

care pentru $n = 4$, dă

$$1 - \alpha = 0{,}950$$

18. $s \sim Bi(n, \theta)$

Cele $n + 1$ valori posibile ale numărului de succese s, produc $(n+1)$ intervale de verosimilităţi distincte.

De exemplu cînd $n = 20$ şi $s = 3$, $I = [0{,}038\,;\ 0{,}349]$.

Pentru aceeaşi situaţie Clopper şi Pearson (1934) obţin cu coeficientul de încredere 0,95 intervalul $[0{,}042\,;\ 0{,}351]$; şi folosind $\dfrac{\partial^2 \ln P(\mathbf{x}|\hat{\theta})}{\partial \theta^2}$ obţinem

$$\hat{\theta} \pm 2\left\{-\frac{\partial^2 \ln P(\mathbf{x}|\hat{\theta})}{\partial \theta^2}\right\}^{1/2} = \hat{\theta} \pm 2\{\hat{\theta}(1 - \hat{\theta})/n\}^{1/2} = [-0{,}0087\,;\ 0{,}3087]$$

Pentru a compara intervalele de verosimilităţi cu intervalele de încredere, trebuie să evaluăm coeficientul de încredere exact asociat cu intervalul de verosimilităţi. Acesta este

$$1 - \alpha(\theta^*) = P_{\theta^*}[I(\theta|\mathbf{x}) \ni \theta^*], \quad \theta^* \in \Omega \tag{47}$$

O interpretare a coeficientului de încredere $1-\alpha(\theta^*)$ este ca probabilitatea ca $I(\theta)$ să acopere θ^*, înainte ca x să fie observat. Alternativ, $1 - \alpha(\theta^*)$ este probabilitatea ca în selecţii repetate, intervalul aleator $I(\theta|x)$ să conţină valoarea adevărată a parametrului. Amîndouă probabilităţile sînt determinate cînd valoarea adevărată a parametrului este θ^*. Scriem

$$1 - \alpha(\theta) = P_\theta[I \ni \theta] \tag{48}$$

Dacă funcţia de verosimilitate nu are o formă standard, sau dacă estimatorul nu este regulat, intervalul de verosimităţi poate sau nu să dea un interval de încredere.

Exemple

19. X are densitatea

$$p(x\,;\ \theta) = 1/\theta \qquad 0 < x < \theta$$

Scanned with OKEN Scanner

Funcţia de verosimilitate poate fi scrisă

$$P(\mathbf{x}\,|\,\theta) = (x_{(n)}/\theta)^n, \qquad x_{(n)} < \theta$$

Intervalul de verosimilităţi este

$$[x_{(n)},\ x_{(n)}\,e^{2/n}]$$

şi coeficientul de încredere este

$$1 - \alpha(\theta) = P_\theta[(x_{(n)},\ x_{(n)}\,e^{2/n}) \ni \theta]$$

$$\equiv 1 - e^{-2} = 0{,}8647 \text{ pentru toţi } n$$

20. (Stein (1962)) X are densitatea

$$p(x;\theta) = ax^{-1}\exp\left\{-\frac{c^2}{2}\left(1-\frac{\theta}{x}\right)^2\right\}, \qquad 0 < x < b\theta,$$

unde constantele a, b, c nu depind de θ.

Logaritmul funcţiei de verosimilităţi pentru o selecţie de volum $n=1$ este

$$-c^2(x-\theta)^2/2x^2 = \text{const}\ (\hat\theta - \theta)^2,\ \theta > x/b,\ \text{unde } \hat\theta = x.$$

Dacă $x - 2x/c > x/b$, intervalul de verosimilităţi este

$$\hat\theta \pm 2x/c$$

Coeficientul de încredere este

$$1 - \alpha(\theta) = \int_{c/(c+2)}^{c/(c-2)} ax^{-1}\exp\left\{-\frac{c^2}{2}\left(1-\frac{1}{x}\right)^2\right\}dx =$$

$$= \int_{-2}^{2} \frac{a}{c-w}\,e^{-w^2/2}\,dw,$$

şi acesta poate fi făcut oricît de mic dorim, luînd c mare. Se obţine acest rezultat deoarece domeniul densităţii este o funcţie de θ şi prin urmare estimaţia nu este regulată.

Exemplul 21. Ne propunem să estimăm parametrul binomial p, unde $\Omega = [0,1]$.

Dacă n (numărul probelor independente) este fixat, spaţiul de selecţie este $(s = 0,1,\ldots,n)$, unde am notat prin s numărul de succese, şi selecţia poartă numele de selecţie pozitivă.

Dacă s este fixat $(s \geqslant 1)$, spaţiul de selecţie este $(n = s,\ s+1,\ldots)$ şi selecţia poartă numele de selecţie negativă.

Estimaţia este regulată pentru $0 < p < 1$.

Scanned with OKEN Scanner

Funcţia de verosimilitate are formă standard pentru toate perechile (n, s) exceptînd $(n, 0)$ şi (n, n). Extremităţile p_1 şi p_2 ale intervalului de verosimilităţi sînt definite de

$$p_1 = 0,\ p_2 = 1-e^{-2/n}, \qquad \text{dacă } s = 0,$$

49) $$p_1 = 2^{-2/n},\ p_2 = 1, \qquad \text{dacă } s = n,$$

$$p_i^s(1-i)^{n-s} = e^{-2}\, s^s (n-s)^{n-s}/n^n \qquad \text{dacă } 0 < s < n.$$

Dacă $n = 2s$, ultima ecuaţie poate fi rezolvată explicit. Obţinem

(50) $$p_1 = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{1 - e^{-2/s}}),\ p_2 = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{1 - e^{-2/s}}).$$

§8. Determinarea intervalelor de încredere cu ajutorul statisticilor de ordine

8.1. Intervale de încredere pentru cuantile

Fie $X_{r:n}$ şi $X_{s:n}$ $(r < s)$ statisticile de ordine de rang r şi respectiv s dintr-o selecţie asupra unei variabile aleatoare X continuă cu funcţia de repartiţie F. Dacă X_p este cuantila de ordin p corespunzătoare variabilei X (adică $p = F(X_p)$), atunci $(x_{r:n}, x_{s:n})$ acoperă X_p numai dacă

(51) $$F(X_{r:n}) \leqslant p \leqslant F(X_{s:n})$$

Probabilitatea evenimentului (51) este

(52) $$\int_0^p \int_p^1 dF_{r,s} = 1 - \alpha$$

unde prima integrală se referă la $F(X_{r:n})$ iar prin $F_{r,s}$ am notat funcţia de repartiţie a statisticilor de ordine $X_{r:n}$, $X_{s:n}$ (52) se scrie

(53) $$\int_0^p \int_0^1 dF_{rs} - \int_0^{F(x_{s,n})} \int_0^p dF_{r,s}$$

În prima integrală din (3), integrarea în raport cu $F(x_{s:n})$ se face pe întreg domeniul ei de definiţie şi prin urmare integrarea de la 0 la p dă repartiţia marginală a $F(X_{r:n})$ care după (V.9) este

(54) $$\frac{[F(X_{r,n})]^{r-1}\,[1 - F(X_{r,n})]^{n-r}\, dF(X_{r,n})}{B(r,\ n - r + 1)}$$

Deci

(55) $$\int_0^p \int_0^1 dF_{rs} = \int_0^p dF(X_{r,n}) = I_p(r,\ n - r + 1)$$

Scanned with OKEN Scanner

În a doua integrală din (53) făcînd schimbarea de variabile

$$u = \frac{F(X_{r,n})}{F(X_{s,n})}, \quad v = F(X_{s,n})$$

al cărui Jacobian este v găsim

$$\int_0^{F(x_{s,n})} \int_0^p dF_{r,s} = \int_0^p \left\{ \int_0^1 \frac{(uv)^{r-1}(v - uv)^{s-r-1}(1 - v)^{n-s}}{B(r, n - r + 1)} du \right\} v \, dv,$$

Integrînd în raport cu u între 0 și 1 găsim

$$\int_0^{F(x_{s,n})} \int_0^p dF_{r,s} = \int_0^p dF(X_{s,n}) = I_p(s, n - s + 1) \tag{56}$$

Ținînd seama de (55) și (56) în (53) obținem

$$P\{x_{r,n} \leqslant X_p \leqslant x_{s,n}\} = I_p(r, n - r + 1) - I_p(s, n - s + 1) \tag{57}$$

Observații. i) Din (57), ținînd seama că

$$I_p(a, b) = 1 - I_{1-p}(b, a)$$

obținem

$$1 - \alpha = I_{1-p}(n - s + 1, s) - I_{1-p}(n - r + 1, r), \tag{58}$$

ii) Ținînd seama de relația dintre funcția beta incompletă și suma probabilităților binomiale, (58) se mai poate scrie

$$1 - \alpha = \left\{ \sum_{i=0}^{s-1} - \sum_{i=0}^{r-1} \right\} C_n^i p^i q^{n-i} = \sum_{i=r}^{s-1} C_n^i p^i q^{n-i} \tag{59}$$

Prin urmare coeficientul de încredere este suma termenilor din dezvoltarea $(q + p)^n$ de la $r + 1$ pînă la s (inclusiv).

iii) Dacă $X_{r,n}$ și $X_{s,n}$ sînt plasate simetric, adică dacă avem $s = n - r + 1$, atunci din (57), (58) și (59).

$$1 - \alpha = I_p(r, n - r + 1) - I_p(n - r + 1, r) \tag{60}$$

$$= 1 - [I_{1-p}(n - r + 1, r) + I_p(n - r + 1, r)],$$

sau

$$1 - \alpha = \sum_{i=r}^{n-r} C_n^i p^i q^{n-i} \tag{61}$$

astfel încît coeficientul de încredere este suma celor $n - 2r + 1$ termeni centrali binomiali, r termeni în fiecare coadă fiind omiși.

Scanned with OKEN Scanner

iv) În cazul particular al medianei populației $X_{0.5}$ (60), (61) devin

$$1-\alpha = 1 - 2I_{0.5}(n-r+1, r) = 2^{-n}\sum_{i=r}^{n-r} C_n^i \tag{62}$$

Intervalul de încredere pentru mediană a fost propus pentru prima oară de Thompson (1936) și independent de Savur (1937).

8.2. Intervale de încredere pentru intervale dintre cuantile

Dacă $X_{p_1}<X_{p_2}$ sînt două cuantile oarecari și $X_{r_1,n}$ și $X_{r_2,n}$ două statistici de ordine, atunci printr-un raționament asemănător cu acela folosit pentru a obține (52), găsim

$$P(x_{r_1,n} < X_{p_1} < X_{p_2} < x_{r_2,n}) = \int_0^{p_1}\int_{p_2}^1 \mathrm{d}F_{r_1,r_2} \tag{63}$$

relație care se mai poate scrie

(64)

$$P[(x_{p_1},\ x_{p_2}) \subset (x_{r_1 n},\ x_{r_2 n})] =$$

$$= \frac{n!}{(r_2-r_1)!}\sum_{i=0}^{r_1-1} \frac{(-1)^i p_1^{i+r_1}}{i!(n-r_2+r_1-1)!} I_{p_1}(n-r_2+1,\ r_1-i)$$

Definiția 6. Dacă pentru $1-\alpha$ dat există valorile r_1, r_2 și n astfel încît probabilitatea (64) are valoarea $1-\alpha$, atunci vom spune că $(X_{r_1,n}, X_{r_2,n})$ este un interval de încredere exterior pentru (x_{p_1}, x_{p_2}) cu coeficientul de încredere $1-\alpha$.

Definiția 7. Dacă pentru $1-\alpha$ dat există valorile r_1, r_2 și n astfel încît

$$P(X_{p_1} < x_{r_1,n} < x_{r_2,n} < X_{p_2}) = \int_{p_1}^{p_2}\int_{p_1}^{F(x_{r_2 n})} \mathrm{d}F_{r_1,r_2} \tag{65}$$

are valoarea $1-\alpha$, atunci vom spune că $(X_{r_1,n}, X_{r_2,n})$ este un interval de încredere interior pentru (x_{p_1}, x_{p_2}) cu coeficientul de încredere $1-\alpha$.

În cazul intervalelor de încredere exterioare (interioare) cea mai bună alegere pentru r_1 și r_2 va fi aceea pentru care r_2-r_1 este cît mai mică (mare) posibilă.

8.3. Intervale de încredere pentru cuantile în populații finite

Fie π_N o populație finită ale cărei elemente au valorile distincte $a_1 < \ldots < a_N$. Probabilitatea cu statistica de ordinul k, $X_{k,n}$ dintr-o selecție de volum n din populația π_N să fie egală cu a_t este

$$P_{N,n,k}(t) = \frac{C_{t-1}^{k-1} C_{N-t}^{n-k}}{C_N^n} \tag{66}$$

Scanned with OKEN Scanner

unde $t = k, k+1, \ldots, N-n+k$. Pentru orice valoare fixă a lui t, t^* avem :

$$P(X_{k,n} \leqslant a_{t^*}) = \sum_{t=k}^{t^*} P_{N,n,k}(t) \tag{67}$$

DEFINIȚIA 8. Dacă pentru N, n, t^* fixați și $1-\alpha > 0$, există cel mai mare k, k^* astfel încît

$$\sum_{t=k^*}^{t^*} P_{N,n,k^*}(t) \geqslant 1-\alpha \tag{68}$$

vom spune că x_{k^*} este cea mai bună limită inferioară pentru a_{t^*} cu coeficientul de încredere $1-\alpha$.

Observație. a_{t^*} poate fi considerată drept cuantila de ordin (t^*/N) a populației π_N.

DEFINIȚIA 9. Cea mai bună limită superioară pentru a_{t^*} cu coeficientul de încredere $1-\alpha$ este obținută luînd cel mai mic k, k^{**} pentru care

$$\sum_{t=t^*}^{N-n+k^{**}} P_{N,n,k^{**}}(t) \geqslant 1-\alpha \tag{69}$$

Dacă $X_{r_1,n}$ și $X_{r_2,n}$ sînt statisticile de ordine de rang r_1, respectiv r_2 ale selecției de volum n din populația π_N, atunci

$$\lim_{N\to\infty} P(X_{r_1,n} < a_{(Np)} < X_{r_2,n}) = I_p(r_1, n-r_1+1) - I_p(r_2, n-r_2+1), \tag{70}$$

ceea ce arată că pentru valori mari ale lui N, $(X_{r_1,n}, X_{r_2,n})$ este un interval de încredere pentru $a_{(Np)}$ avînd coeficientul de încredere :

$$I_p(r_1,\ n-r_1+1) - I_p(r_2,\ n-r_2+1)$$

§9. Limite de toleranță

9.1. Definiție

Fie $(X_1, \ldots, X_n)$ o selecție asupra unei variabile aleatoare X cu funcția de repartiție F continuă.

DEFINIȚIA 10. (Shewhart (1931)). Dacă $L_1(X_1, \ldots X_n,) < L_2(X_1, \ldots, X_n)$ sînt două statistici simetrice în $X_1, X_2, \ldots, X_n$ astfel încît repartiția variabilei $F(L_2) - F(L_1)$ nu depinde de F și

$$P[(F(L_2) - F(L_1)) \geqslant \beta] = \gamma \tag{71}$$

pentru $0 < \beta < 1$, atunci L_1 și L_2 poartă numele de $100\,\beta\%$ limite de toleranță la pragul de probabilitate γ.

Observație. (71) spune : probabilitatea ca cel puțin o proporție β a repartiției să varieze între L_1 și L_2 este γ.

Scanned with OKEN Scanner

Wilks (1941, 1942) arată că statisticile de ordine pot fi folosite pentru determinarea limitelor de toleranță ori de cîte ori F este continuă.

Dacă $r_1 < r_2$, atunci variabila aleatoare

$$U_{r_2-r_1} = F(X_{r_2:n}) - F(X_{r_1:n}) \tag{72}$$

este repartizată $B(r_2 - r_1,\ n - r_2 + r_1 - 1)$ și deci nu depinde de F. Dacă pentru $\beta,\ \gamma > 0$ dați, există n, r_1 și r_2 astfel încît

$$P(U_{r_2-r_1} \geqslant \beta) = \gamma, \tag{73}$$

atunci $X_{r_1:n}$ și $X_{r_2:n}$ sînt 100 β% limite de toleranță la pragul de probabilitate γ.

(73) în termeni de funcția beta incompletă se scrie

$$P\{U_{r_2-r_1} \geqslant \beta\} = 1 - I_\beta(r_2 - r_1,\ n - r_2 + r_1 - 1) = \gamma \tag{73'}$$

În practică β și γ sînt fixați, iar r_1 și r_2 se aleg simetrici astfel încît $r_2 = n - r_1 + 1$. (73') se reduce la

$$I_\beta(n - 2r_1 + 1,\ 2r_1) = 1 - \gamma \tag{73''}$$

Membrul stîng al relației (73'') este o funcție monoton crescătoare de n și pentru orice β, γ, r_1 fixați putem alege cel mai mare n astfel încît (73'') să fie satisfăcută. Dacă $r_1 = 1$, astfel încît se folosesc statisticile $X_{1,n}$, $X_{n,n}$, (73'') se reduce la

$$I_\beta(n - 1,\ 2) = 1 - \gamma \tag{73'''}$$

care dă probabilitatea γ cu care amplitudinea unei selecții de volum n acoperă cel puțin o proporție β din repartiția variabilei X.

Observații. i) $U_{r_2-r_1}$ este un caz particular pentru $F(L_2) - F(L_1)$ din (71).

ii) Murphy (1948) a tabelat valorile lui β pentru care are loc (73) pentru $n = 1(1),\ 10(10),\ 100(100),\ 500$, $\gamma = 0{,}90\ ;\ 0{,}95\ ;\ 0{,}99$ și $n - r_2 + r_2 - 1 = (1),\ 6(2),\ 10(5),\ 30(10)\ 60(20)\ 100$.

Somerville (1958) extinde rezultatele lui Murphy.

TEOREMA 7. (Robbins (1944). *Dacă F admite o derivată, atunci necesar L_1 și L_2 sînt statistici de ordine.*

9.2. Limite de toleranță pentru repartiția normală

Mai întîi vom prezenta determinarea acestor limite de către Wald și Wolfowitz (1946).

Deoarece media de selecție $\bar{X}_n$ și $s^2 = \Sigma(X_i - \bar{X}_n)/(n-1)$ sînt o pereche de statistici suficiente pentru parametrii μ și σ^2 ai repartiției normale, este natural să bazăm limitele de toleranță pe repartiția acestor statistici.

Scanned with OKEN Scanner

Dacă definim

$$(74)\qquad A(\bar{x}_n,\ s,\ \lambda) = \int_{\bar{x}_n-\lambda s}^{\bar{x}_n+\lambda s} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}(t-\mu)^2\right] dt,\ \lambda>0$$

şi determinăm λ astfel încît

$$(75)\qquad P\{A(\bar{x}_n,\ s,\ \lambda)>\beta\} = \gamma,$$

atunci

$$L_1 = \bar{x}_n - \lambda s \text{ şi } L_2 = \bar{x}_n + \lambda s$$

vor fi 100 β% limite de toleranţă pentru repartiţia normală la pragul de probabilitate γ. Deoarece ne interesează numai proporţia din repartiţie acoperită de intervalul (L_1, L_2), fără a micşora generalitatea, putem presupune că $\mu = 0$ şi $\sigma^2 = 1$.

Fie

$$(76)\qquad P(\beta,\ \lambda\,|\,\bar{x}_n) = P\{A>\beta\,|\,\bar{x}_n\}$$

Deoarece A este o funcţie monoton crescătoare în s, ecuaţia în s

$$(77)\qquad A(\bar{x}_n,\ s,\ \lambda) = \beta$$

are o soluţie : $s(\bar{x}_n,\ \beta,\ \lambda)$

Fie

$$(78)\qquad \lambda s\,(\bar{x}_n,\ \beta,\ \lambda) = r\,(\bar{x}_n,\ \beta)$$

Daţi $\bar{x}_n$ şi β, $r = r(\bar{x}_n, \beta)$ se obţine cu ajutorul funcţiei lui Laplace, deoarece

$$(79)\qquad \int_{\bar{x}_n-r}^{\bar{x}_n+r} \varphi(t)\,dt = \beta$$

Din (79) rezultă că r nu depinde de λ.

Mai mult, deoarece A este monoton crescătoare în s, $A>\beta$ este echivalentă cu

$$s(\bar{x}_n,\ \beta,\ \lambda) = r(\bar{x}_n,\ \beta)/\lambda$$

Astfel putem scrie

$$(80)\qquad P\left(\beta,\ \lambda\,\middle|\,\bar{x}_n\right) = P\left\{s>\frac{r}{\lambda}\,\middle|\,\bar{x}_n\right\}$$

şi deoarece $\bar{X}_n$ şi s^2 sînt independente (Teorema III.5') şi $(n-1)s^2 \sim \sigma^2\chi^2(n-1)$

$$(81)\qquad \begin{aligned} P\left(\beta,\ \lambda\,\middle|\,\bar{x}_n\right) &= P\left\{(n-1)s^2>(n-1)\frac{r^2}{\lambda^2}\right\} = \\ &= P\left\{\chi^2(n-1)>(n-1)\frac{r^2}{\lambda^2}\right\}, \end{aligned}$$

care poate fi determinată din tabele repartiţiei χ^2.

Scanned with OKEN Scanner

Pentru a obține probabilitatea necondiționată $P(A > \beta)$ integrăm (81) în raport cu repartiția statisticii $\bar{X}_n$ care este $N(0, 1/n)$. Deoarece această operație conduce la calcule complicate, folosim următoarea aproximație. Dezvoltăm $P(A > \beta | \bar{x}_n)$ în serie Taylor față de $\bar{x}_n = \mu = 0$ și deoarece este o funcție pară de $\bar{x}_n$, puterile impare în această dezvoltare se anulează. Obținem

$$(82) \qquad P\left(A > \beta \middle| \bar{x}_n\right) = P\left(A > \beta \middle| 0\right) + \frac{x^2}{2!} P''\left(A > \beta \middle| 0\right) + \dots$$

Aplicînd media găsim

$$(83) \qquad P\left(A > \beta \middle| \bar{x}_n\right) = P\left(A > \beta \middle| 0\right) + \frac{1}{2n} P''\left(A > \beta \middle| 0\right) + \dots$$

Din (82) cu $\bar{x}_n = 1 / \sqrt{n}$, obținem

$$(84) \qquad P\left(A > \beta \middle| \frac{1}{\sqrt{n}}\right) = P\left(A > \beta \middle| 0\right) + \frac{1}{2n} P\left(A > \beta \middle| 0\right) + 0(n^{-2})$$

Din (83) și (84) rezultă

$$(85) \qquad P(A > \beta) = P\left(A > \beta \middle| \frac{1}{\sqrt{n}}\right) + 0(n^{-2})$$

și poate fi folosită pentru aproximarea valorii λ din (81).

Bowker (1974) dă tabele pentru $\lambda(k)$ pentru $\gamma = 0{,}75\,;\ 0{,}90\,;\ 0{,}95\,;\ 0{,}99$ și $\beta(P) = 0{,}75\,;\ 0{,}90\,;\ 0{,}99$, și $0{,}999$, pentru selecții de volum $n = 2(1), 102(2), 180(5), 300(10), 400(25)\ 750(50)\ 1000$.

Dacă media este estimată din n observații și estimația dispersiei are ν grade de libertate, Taguti (1958) dă tabele pentru $\lambda(k)$ pentru $\gamma(1 - \alpha)$ și $\beta(P) = 0{,}90\,;\ 0{,}95$ și $0{,}99$ și $n = 0{,}5(0{,}5)\ 2(1)\ 10(2)\ 20(5)\ 30(10)\ 60(20)\ 100,\ 200,\ 500,\ 1000,\ \infty\,;\ \nu = 1(1)\ 20(2)\ 30(5)\ 100(100)\ 1000,\ \infty$.

Observație. Wald și Wolfowitz (1946) nu arată că pragul de probabilitate atins de aproximația (85) converge, cînd volumul selecției crește, către pragul de probabilitate nominal și că diferența este $0(n^{-2})$.

În presupunerea că $\bar{X} \sim N(\mu, \sigma^2/N)$ și $s^2 \sim \sigma^2 \chi^2(n)/n$ cu notațiile

$$(86) \qquad \begin{aligned} P_{N,n}(\beta, \lambda) &= M[P(\beta, \lambda | \bar{x}_N)], \\ \lambda_{N,n} &= r\left(\frac{x_0}{\sqrt{N}}, \beta\right) / c_{n,\gamma} \text{ pentru anumiți } x_0 \end{aligned}$$

unde

$$(87) \qquad P(s \geqslant c_{n,\gamma}) = \gamma,$$

are loc

28 – c. 2416

Scanned with OKEN Scanner

TEOREMA 8. (Ellison (1964)). *Dacă* $n/N^2 \to 0$, *atunci*

$$P_{N,n}(\beta, \lambda_{N,n}) - \gamma = 0\,(\sqrt{n}/N) \text{ pentru } x_0^2 \neq 1 \tag{88}$$

și

$$P_{N,n}(\beta, \lambda_{N,n}) - \gamma = 0(n/N^2) \text{ pentru } x_0^2 = 1 \tag{89}$$

COROLARUL 1. (Ellison (1964)). *Dacă* n *este fixat și* $x_0 = 1$, *atunci*

$$P_{N,n}(\beta, \lambda_{N,n}) - \gamma = 0(1/N^2) \tag{90}$$

rezultat similar cu acela dat de Wald și Wolfowitz (1946).

COROLARUL 2. *Dacă în Teorema 8 luăm* $n = N - 1$ *și* $x_0 = 1$ *atunci factorul de toleranță* (λ) *este acela dat de Wald și Wolfowitz și pragul de probabilitate atins converge către pragul de probabilitate* γ *nominal și diferența este* $0(1/N)$.

Observație. Pentru n fixat

$$\lim_{N\to\infty} \lambda_{N,n} = r(0, \beta)/c_{n,\gamma} \tag{91}$$

pentru toți x_0 și

$$\mu \pm sr(0, \beta)/c_{n,\gamma} \tag{92}$$

sînt limitele de toleranță exacte în cazul în care μ este cunoscută (Proschan (1953)).

Dacă considerăm $Y = \sqrt{N}\bar{X} \sim N(0, 1)$ pentru toți N, atunci $P(\beta, \lambda_{N,n} \mid \bar{x})$ scrisă în termeni de y este notată prin $P(\beta, \lambda_{N,n} \mid y)$ și pragul de probabilitate atins este

$$P_{N,n}(\beta, \lambda_{N,n}) = M[P_{N,n}(\beta, \lambda_{N,n} \mid y)] \tag{93}$$

Are loc

TEOREMA 9 (Ellison (1964)). *Dacă* $n/N^2 \to \infty$, *atunci*

$$P_{N,n}(\beta, \lambda_{N,n}) \to P(|Y| < |x_0|) \tag{94}$$

COROLARUL 3. *Dacă* $\lambda_{N,n} = r\left(\frac{x_0}{\sqrt{n}}, \beta\right)/c_{n,\gamma}$ *și dacă* $n/N^2 \to \infty$ *atunci pragul de probabilitate atins converge către pragul de probabilitate* γ *nominal dacă și numai dacă* $|x_0| = r(0, \gamma)$

Observație. Dacă $|x_0| = r(0, \gamma)$ și N este fixat,

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_{N,n} = r\left(\frac{1}{\sqrt{N}} r(0, \gamma), \beta\right) \tag{95}$$

și

$$\bar{x} \pm \sigma r\left(\frac{1}{\sqrt{N}} r(0, \gamma), \beta\right) \tag{96}$$

sînt limitele de toleranță exacte, în cazul în care σ este cunoscută (Proschan 1953)).

Scanned with OKEN Scanner

Pare surprinzător că pentru $N \to \infty$ pragul de probabilitate atins de aproximaţia Wald-Wolfowitz are convergenţa cea mai rapidă, cînd n este fix, către pragul de probabilitate nominal ; şi de asemenea că viteza de convergenţă a pragului de probabilitate atins către pragul de probabilitate nominal va scădea dacă n creşte în acelaşi timp cu N. Această comportare este contrară aceleia întîlnită în cele mai multe dintre aplicaţiile statistice, unde selecţiile de volum mare conduc la rezultate mai bune. O explicaţie a acestui fapt poate fi dată după cum urmează.

Pentru orice β, factorii de toleranţă exacţi pentru diferite valori ale lui γ sînt cuantilele repartiţiei variabilei $r(\bar{X}, \beta)/s$. Factorii de toleranţă aproximativi daţi de Wald şi Wolfowitz sînt cuantile repartiţiei variabile $r\left(\frac{1}{\sqrt{N}}, \beta\right)/s$. Astfel Wald şi Wolfowitz înlocuiesc variabila aleatoare $r(\bar{X}, \beta)$ prin valoarea $r\left(\frac{1}{\sqrt{N}}, \beta\right)/s$. Dispersia variabilei $\bar{X}$ este $0(1/N^2)$ şi dispersia variabilei s este $0(1/N)$. În consecinţă înlocuirea făcută de Wald şi Wolfowitz nu are importanţă dacă N^2 este mare în comparaţie cu n, deoarece atunci cea mai mare variabilitate a variabilei $r(\bar{X}, \beta)/s$ este dată de s. Pe de altă parte, dacă N^2 nu este mare în comparaţie cu n, atunci $r(\bar{X}, \beta)$ contribuie cu mult la variabilitatea variabilei $r(\bar{X}, \beta)/s$ şi se introduce o eroare importantă prin înclocuirea variabilei aleatoare $r(\bar{X}, \beta)$ prin valoarea $r\left(\frac{1}{\sqrt{N}}, \beta\right)$.

Howe (1969) obţine noi expresii pentru λ care au două avantaje asupra celor prezentate de Wald-Wolfowitz şi Ellison. Mai întîi dau aproximaţii mai bune, iar în al doilea rînd sînt mai uşor de calculat în sensul că sînt necesare numai tabele cu repartiţia normală şi repartiţia χ^2.

Howe obţine :

$$\lambda^2 = \frac{n\left(1+\frac{1}{N}\right) R_\beta^2}{\chi_\gamma^2(n)} \left\{1 + \frac{n - 2 - \chi_\gamma^2(n)}{2(N+1)^2}\right\} \tag{97}$$

$$P(A \geqslant \beta) = \gamma + 0\left[\max \frac{\sqrt{n}}{N^2}, \frac{n^{3/2}}{N^3}\right] \text{pentru } 1 \leqslant n \leqslant \left(1 + \frac{1}{R_\gamma^2}\right) N^2,$$

$$\lambda^2 = \left[1 + \frac{R_\gamma^2}{N} + \frac{(3 - R_\beta^2)\, R_\gamma^4}{6N^2}\right] \times \tag{98}$$

$$\times \left\{1 + \frac{\left[1 + \frac{R_\gamma^2}{N} + \frac{(3 - R_\beta^2)\, R_\gamma^4}{6N^2}\right]\left[1 + \frac{1}{R_\gamma^2}\right] N}{2n}\right\}$$

$$P(A \geqslant \beta) = \gamma + 0\left[\max \frac{1}{N^2}, \left(1 + \frac{1}{R_\gamma^2}\right)^3 \cdot \frac{N^4}{n^2}\right]$$

$$\text{pentru } n \geqslant \left(1 + \frac{1}{R_\gamma^2}\right) N^2,$$

Scanned with OKEN Scanner

unde : $P[\chi^2(n) \geqslant \chi^2_\gamma(n)] = \gamma$

(99) $$\Phi(0, R_a) = a \text{ și } \Phi(u, R) = \int_{u-R}^{u+R} \varphi(t)\, dt$$

9.3. Interval de predicție

Alt tip de interval care este aplicabil în anumite situații este intervalul de predicție.

Fie $L_1(X_1, \ldots, X_n)$ și $L_2(X_1, \cdots, X_n)$ două statistici, astfel încît intervalul (L_1, L_2) conține o funcție de următoarele k observații din aceeași populație cu probabilitatea γ (specificată).

DEFINIȚIA 11. (L_1, L_2) este 100 γ% interval de predicție pentru g dacă

(100) $$P[L_1(X_1, \ldots, X_n) < g(X_{n+1}, \ldots, X_{n+k}) < L_2(X_1, \ldots, X_n)] = \gamma$$

În 1973 Hall și Prairie construiesc intervale de predicție pentru repartițiile normală și exponențială.

§10. Intervale de încredere și estimatorii jackknife

Din teorema VII. 14 găsim că

(101) $$\left(G(\hat{\theta}_n^0) - u_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{s_g}{\alpha\sqrt{n}},\ G(\hat{\theta}_n^0) + u_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{s_g}{\alpha\sqrt{n}}\right)$$

sau

(101′) $$\left(G(\hat{\theta}_n^0) - u_{1-\frac{\alpha}{2}} \left| \frac{R(n)}{\alpha(n-1)(1-R(n))} \right| \frac{s^2_{\hat{\theta}}}{\sqrt{n}},\right.$$

$$\left. G(\hat{\theta}_n^0) + u_{1-\frac{\alpha}{2}} \left| \frac{R(n)}{\alpha(n-1)(1-R(n))} \right| \frac{s^2_{\hat{\theta}}}{\sqrt{n}}\right)$$

este un interval de încredere pentru parametrul θ, avînd coeficientul de încredere $1 - \alpha$.

Dacă L este lungimea intervalului definit de (101′), atunci

(102) $$M(L) = \frac{2u_{1-\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{n}} \left| \frac{R(n)}{\alpha(n-1)(1-R(n))} \right| M(s^2_{\hat{\theta}})$$

Scanned with OKEN Scanner

Deoarece

$$\frac{R(n)}{(n-1)(1-R(n))} \equiv 1$$

cînd $R(n) = (n-1)/n$, are loc următoarea teoremă

TEOREMA 10. *Fie* $\hat{\theta}_n^0$ *definit ca în teorema VII. 14 şi fie* L *lungimea intervalului (101'). Fie* L_1 *lungimea intervalului*

$$(103) \qquad \left(G(\hat{\theta}_n^0) - u_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{s^2_{\hat{\theta}}}{\sqrt{n}},\quad G(\hat{\theta}_n^0) + u_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{s^2_{\hat{\theta}}}{\sqrt{n}} \right)$$

Atunci

$$(104) \qquad M(L) \leqslant M(L_1)$$

dacă şi numai dacă

$$(105) \qquad \left| \frac{R(n)}{\alpha(n-1)(1-R(n))} \right| \leqslant 1$$

TEOREMA 11. *Fie* p *definit ca în teorema VII. 4 şi*

$$R(n) = \left(\frac{n-1}{n} \right)^p$$

Atunci $G(\theta^\circ_n)$ *are ordinul de deplasare mai scăzut decît* θ°_n *şi*

i) *dacă* $p>1$, $M(L)<M(L_1)$

ii) *dacă* $0<p<1$, $M(L)>M(L_1)$

Demonstraţie. Prima parte a teoremei rezultă din teorema VII. 4 Pentru a termina demonstraţia teoremei trebuie să arătăm că

$$\left| \frac{R(n)}{\alpha(n-1)(1-R(n))} \right| \text{ este } \begin{cases} <1 \text{ dacă } p>1 \\ =1 \text{ dacă } p=1 \\ >1 \text{ dacă } 0<p<1 \end{cases}$$

Din teorema VII. 15, $\alpha = \frac{1}{p}$ şi deoarece $R(n)<1$,

$$(106) \qquad \left| \frac{R(n)}{\alpha(n-1)(1-R(n))} \right| = \frac{p(n-1)^{p-1}}{[n^p - (n-1)^p]} = A(p,n)$$

Avem

$A(1,n) \equiv 1$, iar $A(p,n) = 1$ conduce la

$$\frac{p+n-1}{n} = \left(\frac{n}{n-1} \right)^{p-1}$$

Scanned with OKEN Scanner

astfel încît

$$\ln(p+n-1) = p \ln \frac{n}{n-1} + \ln(n-1) \tag{107}$$

Singura valoare a lui $p>0$ pentru care (107) este satisfăcută este $p=1$. Deci $A(p,n) \neq 1$, dacă $p \neq 1$. Însă $A\left(\frac{1}{2}, n\right) > 1$ şi $A(2,n) < 1$ şi cum $A(p,n)$ este o funcţie continuă de p, urmează că

$$A(p,n) \text{ este } \begin{cases} <1 \text{ dacă } p>1 \\ >1 \text{ dacă } 0<p<1, \end{cases} \tag{108}$$

ceea ce demonstrează teorema.

BIBLIOGRAFIE

1. ABDEL-ATY, S. H., *Ordered variables in discontinuous distributions.* Statist. Neerlandica, *8*. 61—68 (1954).
2. ABDEL-ATY, S. H., *Approximate formulae for the percentage points and the probability integral of the non-central χ^2-distribution.* Biometrika, **41**, 538—540 (1954).
3. AHMAD, M. *Estimation of parameters when a few observations are missing II. The truncated lognormal distribution.* 35 th Session of the International statistical Institute. Belgrade. Preprint *52* (1965).
4. AIREY, J. R., Table of Hh Functions. Table XV. pp. 60—72 in British Association Mathematical Tables vol. 1 British Association. London (Ed. 2-a 1946, Ed. 3-a 1951).
5. AITKEN, A. C., SILVERSTONE, H., *On the estimation of statistical parameters.* Proc. Roy. Soc. Edin. A., **61**, 186—194 (1942).
6. ALAN STUART, *Reduced Mean-Square-Error Estimation of σ^P in Normal* Samples Amer. Statist., **23**, *4* (1969).
7. ALI, M. M., CHAN, L. K., *On Gupta's estimates of the parameters of the normal distribution* Biometrika, **51**, 498—501 (1964).
8. AMOS, D. E., *Reprezentations of the central and non-central t distributions.* Biometrika, **51**, 451—458 (1964).
9. ANDERSON, ERLING BERNARD. *Asymptotic Properties of Condition Maximum-likelihood Estimators.* J. R. Statist. Soc., B., 283—302 (1970).
10. ANDERSON, T. W., An Introduction to multivariate statistical analysis John Wiley, New York, 1958.
11. ANSCOMBE, F. J., *The transformation of Poisson, binomial and negative binomial data.* Biometrika, **35**, 246—254 (1948).
12. ANSCOMBE, F. J., *The statistical analysis of insect counts based on the negative binomial distribution.* Biometrics, **5**, 165—173 (1949).
13. ANSCOMBE, F. J., *Sampling theory of the negative binomial and logarithmic series distributions.* Biometrika, **37**, 358—382 (1950).
14. ARBOUS A. G, KERRICH, J. E., *Accident statistics and the concept of accident proneness.* Biometrics, 7, 340—432 (1951).
15. AROIAN, L. A., *A study of R. A. Fisher's z-distribution and the related F distribution,* Ann. Math. Statist., **12**, 429—448 (1941).
16. AROIAN, L. A., *The relationship of Fisher's z-distribution to student's t distribution* (abstract) Ann. Math. Statist., **13**, 451—452 (1942).
17. AROIAN., L. A., *A certain type of integral.* Amer. Math. Month., **50**, 382—383 (1953).
18. ARVESEN, J. N., *Jackknifing U-Statistics.* Ann. Math-Statist., **40**, 2076—2100 (1969).
19. ARVESEN, J., SCHMITZ, T., *Robust procedures for variance component problems using the jackknife.* Biometrics, **26**, 677—686 (1970).
20. AZORIN, P. F., *Sobre la distribution t no central I, II.* Trabajos de Estatistica, **4**. 173—198 şi 307—337.
21. BARNARD, G. A., *Comments on Stein's ,,A remark on the likelihood principle''.* J. R. Statist. Soc. A., 125, 569—573 (1962).
22. BARNETT, V. D., *Order statistics estimators of the location of the Cauchy distribution.* J. Amer, Statist. Ass., **61**, 1205—1218 (1966).
    Corecţie **63**, 383—385.
23. BARTKO, J. J., *Approximating the negative binomial.* Biometrics, 8, 340—342 (1966).
24. BARTON, D. E., *Unbiased estimation of a set of probabilities.* Biometrika, **48**, 227—229 (1961)
25. BASU, D., *The family of ancillary statistics.* Sankhyā, **21**, 249 (1959).
26. BASU, D., *Recovery of ancillary information.* Sankhya. A., **26**, 3—17, (1964).

Scanned with OKEN Scanner

27. Beall, G., *The fit and significance of contagious distributions when applied to observations on larve insects.* Ecology, **21**, 460—*474* (1940).
28. Beall, G., *The transformation of data from entomological field experiments so that the analysis of variance becomes applicable.* Biometrika, **32**, 243—262 (1942).
29. Bennett, B. M., Birch, B., *Sampling inspection tables for comparison of two groups using the negative binomial model.* Trabajos de Estatistica, **15**, 1—12 (1964).
30. Berk, R., *Limiting behavior of posterior distributions when the model is incorrect.* Ann. Math. Statist., **37**, 51—58 (1966).
31. Berman, S. M., *A law of large numbers for the maximum in a stationary gaussian sequence.* Ann. Math. Statist., **33**, 93—97 (1962).
32. Berman, S. M.,, *Limiting distribution of the studentized largest observation.* Skand. Aktuarietidskr, 154—161 (1963).
33. Berry, A., *The accuracy of the Gaussian approximation to the sum of independent variates.* Trans. Am. Math. Soc., **49**, 1941).
34. Bhat, b.r., *On the distribution of certain quadratic forms in normal variates.* J.R. Statist. Soc. Ser. B., **24**, 148—151 (1962).
35. Bhattacharya, A., *On some analogues of the amount of information and their uses in statistical estimation.* Sankhyā., **8**, *1*, 201—315 (1946). 7,8.
36. Bickel, P. J., *On some robust estimates of location.* Ann. Math. Statist., **36**, 847—858 (1965).
37. Bickel, P. J., *Some contributions to the theory of order statistics.* Proc. 5th Berkeley Sym. **I**. 575—591, 1967.
38. Bickel, P. J., Hodges, J.L., Jr., *The asymptotic-theory of Galton's test and a related simple estimate of location.* Ann. Math. Statist., **38**, 73—89 (1967).
39. Birck, M.W., *An algorithm for the logarithmic series distribution.* Biometrics, **19**, 651—652, (1963).
40. Birnbaum, A., *On the foundations of statistical evidence.* J. Amer. Statist. Ass., **75**, 269—326 (1926).
41. Birnbaum, A., Laska, E., *Optimal robutness : a general method, with applications to linear estimators of location.* J. Amer. Statist. Ass., **62**, 1230—1240 (1967).
42. Birnbaum, A., Miké, V., *Asymptotically robust estimators of location.* J. Amer. Statist. Assoc., **65**, 1265—1282 (1970).
43. Birnbaum, Z.W., McCarty, R.C., *A distribution free upper confidence bound for Pr* $(Y < X)$ *based on independent samples of X and P.* Ann. Math. Statist., **29**, *2*, 558—563 (1958).
44. Bizloy, M.T.L., *A note on the variance-ratio distribution.* Journal of the Institute of Actuaries Student's Society, **10**, 62—64 (1950).
45. Blackwell, D., *Conditional expection and unbiased sequential estimation* Ann. Math. Stat,, **18**, 105—110, 1947.
46. Bliss, C.I., Owen, A.R.C., *Negative binominal distribution with a common k.* Biometrika. **45**, 37—58 (1958).
47. Bloch, D.A., Gastwirth, J.L., *On a simple estimate of the reciprocal of the density function.* Ann. Math. Statist., **39**, 1083—1085 (1968).
48. Blom, G., On *linear estimates with nearly minimum variance.* Ark. Mat. Band., **3**, *31*, 365 (1965).
49. Blom, G., *Statistical Estimates and Transformed Beta-Variables.* Almqvist and Wiksell, Uppsala Sweden. Wiley. New York, 1958.
50. Blom, G., *Nearly best linear estimates of location and scale parameters.* In Sarhan, A.E., Greenberg, B.G., (Editori). Contributions to Order Statistics Wiley, New York, 1962. p. 34—46.
51. Box, G.E.P., Anderson, S.L., *Permutation theory in the derivation of robust criteria and the study of departures from assumption.* J. Roy. Statist. Soc., B, **17**, 1—34 (1955).
52. Box, G.E.P., Cox, D.R., *An analysis of transformations.* J.R. Statist. Soc., B, **26**, 211—252 (1964).
53. Box, G.E.P., Tiao, G.C., *A Bayesian approach to the importance of assumptions applied to the comparison of variances.* Biometrika, **51**, 153—167 (1964 a).
54. Box., G.E.P., Tiao, G.C., *A note on criterion robustness and inference robustness.* Biometrika, **51**, 169—173 (1964 b).
55. Box, G.E.P., Tiao, G.C., *A further look at robustness via Bayes' theorem.* Biometrika, **49**, 419—432 (1962).
56. Bowker, A.H., Tolerance limits for normal distributions. Selected Techniques of Statistical Analysis. McGraw-Hill. New York, 1947.
57. Brass,W., *Simplified methods of fitting the truncated negative* binomial distribution. Biometrika, **45**, 59—68 (1958).
58. Breakwell, J.V., *On estimating both mean and standard deviation of a normal population from the lowest r out of N observations* (Abstract). Ann. Math. Statist., **24**, 383 (1953).

Scanned with OKEN Scanner

59. Brillinger, D., *The asymptotic behavior of Tukey's general method of setting approximate confidence limits (the jackknife) when applied to maximum likelihood estimates.* Rev. Int. Statist. Inst., **32**, 202–206 (1964).
60. Brillinger, D., *The application of the jackknife to the analysis of consumer surveys.* Commentary. The Journal of the Market Res. Soc., **8**, 74–80 (1966).
61. Burr, I.W., *Calculation of exact sampling distribution of ranges from a discrete population.* Ann. Math. Statist., **26**, 530–532 (1955). Corectie 38–280.
62. Cacoullos, T., *A relation between t and F distributions.* J. Amer. Statist. Assoc. 60. 528–531. (Corectie 1249) (1965).
63. Cadwell, J.H., *The distribution of quantiles of small samples.* Biometrika, **39**, 207–211 (1952).
64. Cadwell, J.H., *The distribution of quasi-ranges in samples from a normal population.* Ann. Math. Statist., **24**, 603–613 (1953).
65. Carlton, A.G., *Estimating the parameters of a rectangular distribution.* Ann. Math. Statist., **17**, 355–358 (1946).
66. Carter, A.H., *Approximation to percentage points of the z-distribution.* Biometrika, **34**, 352–358 (1947).
67. Chahine, J., *Une généralisation de la loi binomiale negative.* Revue de statistique Appliquée, **13**, 33–43 (1965).
68. Chandan Kumar Mustafi., *A Recurrence Relation for Distribution Functions of Order Statistics from Bivariate Distributions.* J. Amer. Statist. Assoc., **64**, 326, 600–602 (1969).
69. Chapman, D.C., Robbins, H., *Minimum variance estimation without regularity assumptions.* Ann. Math. Stat., **22**, 581–586 (1951).
70. Chatfield, C. Ehrenberg, A.S.C., Goodhardt, G.J., *Progress on a simplified model of stationary purchasing behaviour.* Journal of the Royal Statistical Society, A, **129**, 317–360 (cu discuţii 360–367). (1966).
71. Cheng Ping *Minimax estimates of parameters of distribution belonging to the exponential family.* Acta Mathematica Sinica, **5**, 277–299. (1964).
72. Chernoff, H., Gastwirth, J.L. Johns, M.V., *Asymptotic distribution of linear combinations of functions of order statistics with applications to estimation,* Ann. Math. Statist., **38**, 52–72 (1967).
73. Chernoff H., Savage, I.R., *Asymptotic normality and efficiency of certain nonparametric test statistics.* Ann. Math. Statist., **29**, 972–994 (1958).
74. Chung, K.L., *The strong law of large numbers.* Proc. Second Berkely Sympos. Math. Statist. and Prob. 1950 p. 341–352.
75. Ciucu, G., *Elemente de teoria probabilităţilor şi statistică matematică.* Edit. didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1963.
76. Ciucu, G., Craiu, V. *Teoria estimaţiei şi verificarea ipotezelor statistice.* Edit. didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1968.
77. Ciucu, G., Craiu, V., *Inferenţă statistică.* Edit. didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1974.
78. Clemans, K.G., *Confidence limits in the case of the geometric distribution.* Biometrika, **46**, 260–264 (1959).
79. Clopper, C.J., Pearson, E.S., *The use of confidence or fiducial limits illustrated in the case of the binomial.* Biometrika, **26**, 404–413 (1934).
80. Cochran, W.G., *The distribution of quadratic forms in a normal system with applications to the analysis of covariance.* Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, **30**, 178–191 (1934).
81. Cohen, A.C., *Estimation of the Poisson parameter from truncated samples and from censored samples.* J. Amer. Statist. Assoc., **49**, 158–168 (1954).
82. Cohen, A.C., *Estimating the parameter in a conditional Poisson distribution.* Biometrics., **16**, 203–211 (1960).
83. Cohen, A.C., *Estimation in truncated Poisson distribution when zeros and some ones are missing.* J. Amer. Statist. Asoc, **55**, 342–348 (1960).
84. Cohen, A.C., *Estimating the parameters of a modified Poisson distribution.* J. Amer. Statist. Assoc., **55**, 139–144 (1960).
85. Cohen, A.C., *Estimation in the Poisson distribution when samples values of c + 1 are sometimes erroneously reported as c.* Ann Inst. Statist. Math. Tokyo, **9**, 189–193 (1960).
86. Cohen, A.C., *An extension of a truncated Poisson distribution.* Biometrics, **16**, 446–450 (1960).
87. Cohen, A.C., *Estimating the Poisson parameter from samples that are truncated on the right.* Technometrics, **3**, 433–438 (1961).
88. Cohen, A.C., Jr., *Estimating the mean and variance of normal populations from singly and doubly truncated samples.* Ann. Math. Statist., **21**, 557–569 (1950).
89. Cohen, A.C. Jr., *Truncated and censored samples from normal populations.* Trans. Amer. Soc. Qual. Cont., **9**, 27–36 (1955).

Scanned with OKEN Scanner

90. Cohen, A.C., Jr., *Simplified estimators for the normal distribution when samples are singly censored or truncated.* Technometrics, **1**, 217—237 (1959).
91. Cohen, A.C.Jr., *Tables for maximum likelihood estimates: singly truncated and censored samples.* Technometrics **3**, 535—541 (1961).
92. Cole, R.H., *Relations between moments of order statistics.* Ann. Math. Statist., **22**, 308—310 (1951).
93. Cornish, E.A., Fisher, R.A., *Moments and cumulants in the specification of distributions.* Review of the International Statistical Institut, **5**, 307—322 (1937).
94. Cover, Thomas M., *Hypothesis testing with finite statistics.* Ann. Math. Statist, **40**., 828—835 (1969).
95. Cox, D.R., *The mean and coefficient of variation of range in samll samples from non normal populations.* Biometrika, **41**, 469—481 (1954) Correctie **42**. 277.
96. Cox, D.R., *A note on the asymptotic distributions of range.* Biometrika, **35**, 310—315. (1948).
97. Cox, D.R., *The Choice between Alternative Ancillary Statistic,* J.R. Statist. Soc. B, **33**, 251—256 (1971).
98. Craig, A.T., *Note on the independence of certain quadratic forms.* Ann. Math. Statist., **14**. 195—197 (1943).
99. Cramér, H. *Mathematical Methods of Statistics.* Princeton University Press, 1946.
100. Crow, E. L., Siddiqui, M. M., *Robust estimation of location.* J. Amer. Statist. Ass., **62**, 353—389 (1967).
101. Daniels, H. E., *Mixtures of geometric distributions.* Journal of the Royal Statistical Society B, **23**, 409—413 (1961).
102. David, F. N., Johnson, N. L., *The truncated Poisson.* Biometrics, **8**, 275—285 (1952).
103. David, F. N. Johnson, N. L., *Statistical treatment of censored data. I. Fundamental formulae.* Biometrika, **41**, 228—240, (1954).
104. David, F. N., Kendall, M. G., *Tables of symmetric functions.* Biometrika, **36**, 431 (1949).
105. David, H. A., *Order Statistics,* John Wiley, New York, 1970.
106. Deemer, W. L., Jr., Votaw, D. F., Jr., *Estimation of parameters of truncated or censored exponential distributions.* Ann. Math. Statist., **26**, 498 (1955).
107. Dixon, W. J., *Estimates of the mean and standard deviation of a normal population,* Ann. Math. Statist., **28**, 806—809 (1957).
108. Dixon, W. J., *Simplified estimation from censored normal samples.* Ann. Math. Statist., **31**, 385—391 (1960).
109. Dowton, F., *A note on ordered least-squares estimation.* Biometrika, **40**, 457—458 (1953).
110. Downton, F., *Linear estimates with polynomial coefficients.* Biometrika, **53**, 129—141 (1966).
111. Dugué, D., *Application des propriétés de limite au sens du calcul des probabilitiés a l'étude des diverses questions d'estimation.* Ecol. Poly., **3**, *4*, 305—372 (1937).
112. Dumas de Rauly, D., *L'estimation statistique.* Gauthier-Villars. Paris. 1966.
113. Edgeworth, F. Y., *The law of error.* Trans. Camb. Phil. Soc., **20**' 36—65 (1905).
114. Eeden, Constance van., *Some approximations to the percentage points of the noncentral t-distribution.* Revue de l'Institut Internationale de Statistique, **29**, 4—31, (1961).
115. Elfving, G., *An expansion principle for distribution functions, with application to Student's statistic.* Annales Academiae Scientiarum Fennicae. A, **204**, 1—8 (1955).
116. Ellison, Bob. E., *On Two-Sided Tolerance Intervals for a Normal Distribution.* Ann. Math. Statist., **35**, 762—773 (1964).
117. Epstein, B., Sobel, M., *Life testing.* J. Amer. Statist. Ass., **48**, 486—502 (1963).
118. Epstein, B., Sobel, M., *Some theorems relevant to life testing from an exponential distribution.* Ann. Math. Statist., **25**, 373—381.
119. Erdelyi, A., *Higher Transcendental Functions.* vol. 1 Mc. Graw-Hill Book, New York. 1953.
120. Essen, G., *Fourier Analysis of distribution functions. A mathematical study of the Laplace-Gaussian law.* Acta Math. (1944).
121. Feller, W., *Über den zentralen Grenzwertsatz der Wahrsheinlich-keitsrechnung.* Mathematische Zeitschrifft, **40**, 521—559 (1935).
122. Feller, W., *An Introduction to Probability Theory and its Applications.* 2. Wiley New York. 1966.
123. Ferguson, T.S., *A characterization of the geometric distribution.* American Mathematical Monthly. **72**, 256—260 (1965).
124. Fisher, R. A., *On an Absolute Criterion for Fitting Frequency Curves,* Messenger of Math., **41**, 155 (1912).
125. Fisher, R. A., *Frequency-distribution of the values of the correlation coefficient in sample from an indefinitely large population* I. Biometrika, **10**, 507—521 (1915).
126. Fisher, R. A., *On the mathematical foundations of teoretical statistics.* Phil. Trans. A, **222** 309 (1921 a).

Scanned with OKEN Scanner

127. Fisher R. A., *On the probable error of a coefficient of correlation deduced from a small sample* Metron, **1**, 1 (1921).
128. Fisher, R. A., *On the mathematical foundations of theoretical statistics.* Phil. Trans. Roy. Soc. London, A, **222**, 309—368 (1922).
129. Fisher, R. A., *On a distribution yielding the error functions of several well-known statistics.* Proc. Internat. Math. Congress Toronto, 805—813, 1924.
130. Fisher, R. A., *Application of Student's distribution.* Metron. **5**, 90—104 (1925).
131. Fisher, R. A., *Theory of statistical estimation.* Proc. Camb. Phil. Soc., **22**, 700—725 (1925).
132. Fisher, R. A., *The general sampling distribution of the multiple correlation coefficient.* Proc. of the Royal Society of London A, **121**, 654—673 (1928).
133. Fisher, R. A., *The negative binomial distribution.* Ann. Eugenics London, **11**, 182—187 (1941).
134. Fisher, R. A., *Note on the efficient fitting of the negative binomial.* Biometrics, **9**, 197—200 (1953).
135. Fisher, R. A., *Statistical Methods and Scientific Inference.* London: Oliver & Boyd, 1956.
136. Fisher, R. A., *Some exemples of Bayes method of experimental determinations of probabilities a priori.* J. R. Statist. Soc., B, **24**, 118—124 (1962).
137. Fisher, R. A., Tippett, L. H. C., *Limiting forms of the frequency distribution of the largest or smallest member of a sample.* Proc. Camb. Phil. Soc., **24**, 180—190 (1928).
138. Fisher, R. A., Cornish, E. A., *The percentile points of distributions having known cumulants.* Technometrics, **2**, 209—225 (1960).
139. Fraser, D. A. S., *Completeness of the Order statistics.* Can. J. Math., **6**, 42—45 (1953).
140. Fraser, D. A. S., *Nonparametric Methods in Statistics.* John Wiley & Sons, Inc., New York, 1957.
141. Galton, F., *The most suitable proportion between the values of first and second prizes.* Biometrika, **1**, 385—390 (1902).
142. Gastwirth, J. L., *On robust procedures.* J. Amer. Statist. Ass., **61**, 929—948 (1966).
143. Gastwirth, J. L., Rubin, H., *On robust linear estimators.* Ann. Math. Statist., **40**, 24—39 (1969).
144. Gauss, C. F., *II Comet vom Jahr 1805.* Monatliche Correspondenz zur Beförderung der Erd-und Himmels Kunde, **14**, 181—186 (1806).
145. Gauss, C. F., *Theoria Motus Corporum Coelestium in Sectionibus Conicis Solem Ambientium.* Frid. Perthes et I. H. Besser. Hamburgi (1809). (Retipărită în Werke, Band VII, Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften, Göttingen, 1—280. 1906).
146. Gauss, C. F. *Bestimmung der Genauigkeit der Beobachtungen.* Zeitschrift Astronomi, **1**, 185—197 (1816).
147. Gauss, C. F., *Theoria combinationis observationum erroribus minimis obnoxiae.* Commentationes Societatis Regiae Scientiarum Gottingensis Recentiores, **5** (1823). Retipărită în Werke, Band IV, Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften, Göttingen, 3—53, 95—104 (1880).
148. Glasser, G. J., *An Unbiased Estimator for Powers of the Aritmetic Mean,* J. R. Statist. Soc., **23**, 1 (1961).
149. Glasser, G. J., *Estimator for the Product of Aritmetic Means.* J. R. Statist. Soc., B. **24** (1962).
150. Glasser, G. J., *Minimum variance unbiased estimators for Poisson probabilities.* Technometrics, **4**, 409—418 (1962).
151. Gnedenko, B., *Sur la distribution limite du terme maximum d'une série aléatoire.* Ann. Math, **44**, 423—453 (1943).
152. Godwin, H. J., *Some low moments of order statistics.* Ann. Math. Statist. **20**, 279—285 (1949).
153. Good, I. J., *On the independence of quadratic expressions.* J. R. Statist. Soc. B, **25**, 377—382 (1963). Corecţie. B. **28**. 584.
154. Govindarajulu Z., *The reciprocal of the decapited negative binomial variable.* J. Amer. Statist. Assoc., **57**, 906—913 (1962).
155. Govindarajulu, Z., *On moments of order statistics and quasiranges from normal populations.* Ann. Math. Statist., **34**, 633—651 (1963).
156. Govindarajulu, Z., *Certain general properties of unbiased estimates of location and scale parameters based on ordered observations.* SIAM J. Appl. Math., **16**, 533—551 (1968).
157. Gower. J. C., *A note on some asymptotic properties of the logarithmic series distributions.* Biometrika, **48**, 212—215 (1961).
158. Grab, E. L., Savage, J. R., *Tables of the expected value of 1/X for positive Bernoulli and Poisson variables.* J. Amer. Statist. Assoc., **50**, 468—473 (1954).
159. Grad, A., Solomon, H., *Distribution of quadratic forms and some applications.* Ann. Math. Statist., **26**, 464—477 (1955).

Scanned with OKEN Scanner

160. Gray, H. L., Schucany, W. R., *The Generalized jackknife Statistic.* Dekker. New York, 1972.
161. Graybill, F. A., *An Introduction to Linear Models.* Vol. 1. New York. Mc. Graw-Hill, Inc. 1961.
162. Graybill, F. A., Milliken, George, *Quadratic forms and idempotent matrices with random elements.* Ann. Math. Statist., **40**, 1430—1438 (1969).
163. Greenwood, M., Yule, G. U. *An enquiry into the nature of frequency distributions of multiple happenings, with particular reference to the occurence of multiple attacks of disease or repeated accidents.* J. Roy. Stat. Soc. A, **83**, 255—279 (1920).
164. Grenander, U., Pollak, H. O., Slepian, D., *The distribution of quadratic forms in normal variates: A small sample theory with applications to spectral analysis.* SIAM. Journal, **7**, 374—401 (1959).
165. Grubbs, F. E., *Approximate circular and noncircular offset probabilities of hitting.* Operations Research, **12**, 51—62 (1964).
166. Grubbs, F. E. Weaver, C. L., *The best unbiased estimate of population standard deviation based on group ranges.* J. Amer. Statist. Ass., **42**, 224—241 (1947).
167. Guenther, W. C., *Another derivation of the non-central chi-square distribution.* J. Amer. Statist. Assoc., **59**, 957—960 (1964).
168. Guentner, W. C., *Shortest Confidence Intervals.* Amer. Statist., **23**, 22—25 (1969).
169. Guenther, W. C., Terragno, P. J., *A review of the literature on a class of coverage problems.* Ann. Math. Statist., **35**, 232—260 (1964).
170. Gumbel, E. J., *The distribution of the range,* Ann. Math. Statist. **18**, 384—413 (1947).
171. Gumbel, E. J., *Probability tables for the range.* Biometrika, **36**, 142—148 (1949).
172. Gumbel, E. J., *The maxima of the mean largest value and of the range.* Ann. Math. Statist., **25**, 76—84 (1954).
173. Gumbel, E. J., *Statistics of Extremes.* Columbia. University Press. New York, 1958.
174. Gupta, A. K., *Estimation of the mean and standard deviation of a normal population from a censored sample.* Biometrika, **39**, 260—273 (1952).
175. Grupta, S. S., Shah, B. K., *Exact moments and percentage points of the order statistics and the distribution of the range from the logistic distribution.* Ann. Math. Statist., **36**, 907—920 (1965)
176. Gurland, J., *Inversion formulae for the distribution of ratios.* Ann. Math. Statist., **19**, 228—237 (1948).
177. Gurland, J., *Distribution of quadratic forms and ratios of quadratic forms.* Ann. Math. Statist., **24**, 416—427 (1953).
178. Gurland, J., *Distribution of definite and of indefinite quadratic forms.* Ann. Math. Statist., **26**, 122—127 (1955).
179. Gurland, J., *Quadratic forms in normally distributed random variables.* Sankhyā, **17**, 37—50 (1956).
180. Guterman, H. E., *An upper bound for the sample standard deviation.* Technometrics, **4**, 134—145 (1962).
181. Hájek, J., Sidak, Z., *Theory of Rank Tests.* Academic Press. New York. 1967.
182. Hall, I. J., Prairie, R. R., *One-Sided Prediction Intervals to Contain at Least m out of k Future Observations.* Technometrics, **15**, 897—914 (1973).
183. Halperin, M., *Maximum likelihood estimation in truncated samples.* Ann. Math. Statist., **23**, 226—238 (1952).
184. Halperin, M., *Some asymptotic results for a converge problem.* Ann. Math. Statist., **31**, 1063—1076 (1960).
185. Hampel, F. R. *A general qualitative definition of robustness.* Ann. Math. Statist., **42**, 1887—1896 (1971).
186. Harter, H. L. Moore, A. H., *Iterative maximum-likelihood estimation of the parameters of normal populations from singly and doubly censored samples.* Biometrica, **53**, 205 (1966).
187. Hartley, H. O., *The range in randon samples.* Biometrika, **32**, 334—348 (1942).
188. Hartley, H. O., David, H. A., *Universal bounds for mean range and extreme observation.* Ann. Math. Statist., **25**, 85—88 (1964).
189. Hendricks, W. A., *An approximation to Student's distribution,* Ann. Math. Statist., **7**, 210—221 (1936).
190. Higuchi, I., *On the solutions of certain simultaneous equations in the theory of sistematic statistics.* Ann. Inst. Statist. Math. Tokyo, **5**, 77—90 (1956).
191. Hincin, A., *Sur la loi des grands nombres.* Comp. Rend. Acad. Sci., **188**, 477—479 (1929).
192. Hodges, J. L. Jr., *Efficiency in normal samples and tolerance of extreme values for some estimates of location.* Proc. 5 th. Berkeley Symp. I. 163—186. 1967.
193. Hadges, L. J. Jr., Lehmann, E. L., *Estimates of location based on rank tests.* Ann. Math. Statist, **34**, 598—611 (1963).

Scanned with OKEN Scanner

194. HOEFFDING, W., *A class of statistics with asymptotically normal distribution.* Ann. Math. Statist., **19**, 293—325 (1948).
195. HOGBEN, D., PINKHAM, R. S., WILK, M. B., *The moments of the noncentral t distribution.* Biometrika, **48**, 465—468 (1961).
196. HOGG, R. V., *Some observations on robust estimation.* J. Amer. Statist. Ass., **62**, 1179—1186 (1967).
197. HOTTELLING, H., *New light on the correlation coefficient and its transforms.* J. R. Statist. Soc., B, **15**, 193—232 (1953).
198. HOWE, W. G., *Two-Sided Tolerance Limits for Normal Populations—Some Improvements.* J. Amer. Statist. Ass., **64**, 610—621 (1969).
199. HUBER, P. J., *Robust estimation of a location parameter.* Ann. Math. Statist., **35**, 73—101 (1964).
200. HUBER, P. J., *Robust statistics. A review.* Ann. Math. Statist., **43**, 1041—1068 (1972).
201. HØLAND, A., *Robutness of the Wilcoxon estimate of location against a certain dependence.* Ann. Math. Statist., **39**, 1196—1201 (1968).
202. HUDSON, D. J., *Interval Estimation from Likelihood Function.* J.R. Statist. Soc., **33**, 256—263 (1971).
203. HULTQUIST, R., *Diagramming theorems relative to quadratic forms.* Amer. Statistician, **20**, 31 (1966).
204. IONESCU, H., *Elemente de statistică matematică.* Edit. ştiinţifică, Bucureşti, 1957.
205. IOSIFESCU, M., MIHOC, GH., THEODORESCU, R., *Teoria probabilităţilor şi statistică matematică.* Edit. tehnică, Bucureşti, 1966.
206. IRWIN, J. O. *On the estimation of the mean of a Poisson distribution from a sample with the zero class missing.* Biometrics, **15**, 342—326 (1959).
207. ISHII, G., HAYAKAWA, R., *On the compound binomial distribution.* Ann. Instit. Statist. Math. Tokyo, **12**, 69—80 (1960).
208. JAMES, G. S., *Note on a theorem of Cochran.* Proc. Camb. Phil. Soc. **48**, 443—446, 1952.
209. JOHNSON, N. L., *Estimators of the probability of the zero class in Poisson and certain related populations.* Ann. Math. Statist., **22**, 94—101 (1951).
210. JOHNSON, N. L., *On an extension of the connexion between Poisson and χ^2-distributions.* Biometrika, **46**, 352—363 (1959).
211. JOHNSON, N. L., KOTZ, S., *Distributions in statistics. Discrete distributions.* Houghton Mifflin Company Boston. New York, 1969.
212. JOHNSON, N. L., KOTZ, S., *Distributions in statistics. Continous univariate distributions* 2. Houghton Mifflin Company-Boston. New York, 1970.
213. JOHNSON, N. L., KOTZ, S., *Distributions in statistics. Continuous Multivariate Distributions.* Wiley New York, 1972.
214. JONES, A. E., *A useful method for the routine estimation of dispersion from large samples.* Biometrika, **33**, 274—282 (1946).
215. JOWETT, G. H., *The relationship between the binomial and F. distribution.* The Statistician, **13**, 55—57 (1963).
216. JUNG, JAN., *On linear estimates defined by a continuous weight function.* Arkiv Fur Matematik Bd., *3*, 199—209 (1955).
217. KALBFLEISCH, J. D., SPROTT, D. A., *Application of likelihood methods to models involving large numbers of parameters.* J.R. Statist. Soc., B, **32**, 175—209 (1970).
218. KARST, O. J., POLOWY, H., *Sampling properties of the median of a Laplace distribution.* American Mathematical Monthly., **70**, 628—636 (1963).
219. KATTI, S. K., GURLAND, J., *Efficiency of certain methods of estimation for the negative binomial and Neyman type A distributions.* Biometrika, **49**, 215—226 (1962).
220. KAWADA, Y. *Independence of quadratic forms in normally correlated variables.* Ann. Math. Statist., **21**, 614—615 (1950).
221. KENDALL, M. G., STUART, A., *The Advanced Theory of Statistics.* vol. 1 Griffin, London, 1958.
222. KENDALL, M. G., STUART, A., *The Advanced Theory of Statistics.* vol. 2 Griffin, London, 1961.
223. KERRIDGE, D., *A probabilistic derivation of the non-central χ^2-distribution.* Australian J. Statist., **7**. 37—39 1965. (Corecţia **7**. 114).
224. KHATRI, C. G., *On certain properties of power series distributions* Biometrika, **46**, 486—488 (1959).
225. KHATRI, C. G., *On certain distribution problems based on pozitive definite quadratic functions in normal vectors.* Ann. Math. Statist., **37**, 468—479 (1966).
226. KIEFER, J., WOLFOWITZ, J., *Consistency of the maximum likelihood estimator in the presence of infinitely many incidental parameteres.* Ann. Math. Statist., **27**, 887—906 (1955).
227. KOOPMAN, B. O., *On distributions admitting a sufficient statistic.* Trans. Am. Math. Soc., **39**, 399 (1936).

Scanned with OKEN Scanner

363. Shumway, R., Gurland, J., *A fitting procedure for some generalized Poisson distributions.* Skandinavisk Aktuarietidskrift, **43**, 87—108 (1960).
364. Skellam, J. G., *Studies in statistical ecology. I. Spatial pattern.* Biometrika, **39**, 346—362 (1952).
365. Siddiqui, M. M., *Distribution of quantiles in samples from a bivariate population.* J. Res. Nat. Bur. Stand., **64B**, 145—150 (1960).
366. Siddiqui, M. M., *Approximations to the distributions of quadratic forms.* Ann. Math. Statist., **36**, 677—682 (1965).
367. Siddiqui, M. M., Raghunandanan, R., *Asymptotically robust estimators of location.* J. Amer. Statist. Ass., **62**, 950—953 (1967).
368. Sillitto, G. P., *Some relations between expectations of order statistics in samples of diferent size.* Biometrika, **51**, 259—269 (1964).
369. Siotani, *Order statistics for discrete case with a numerical application to the binomial distribution.* Ann. Inst. Statist. Math. Tokyo, **8**, 95—104 (1957).
370. Siotani, M., *Tolerance regions for a multivariate normal population.* Ann. Instit. Math. Statist. Tokyo, **15**, 135—153 (1964).
371. Silvey, S. D., *Statistical Inference.* Penguin Books, Middlesex, 1970.
372. Smirnov, N. V., *Convergence of distributions of order statistics to the normal distribution.* Izv. Acad. Nauk Uz. S.S.R. Fiz. Nauk **10** (3), 24—32 (1966).
373. Smirnov, N. V., *Some remarks on limit laws for order statistics.* Theory Prob. and Its Applications, **12**, 337—339 (1967).
374. Soest, J. van., *Afschatting van verdelingen van kwadratische vormen met toepassingen op aanpassingstoetsen voor normaliteit en exponentialiteit.* Statistica Neerlandica, **22**, 235—240 1968).
375. Solomon, H., *On the distribution of quadratic forms in normal variantes.* Proc. 4 th Berkeley Symp. Math. Statist. & Probab. 1, 645—653, (1960).
376. Somerville, P. N., *Tables for obtaining non-parametric tolerance limits.* Am. Math. Stat., **29**, 599—601 (1958).
377. Sprott, D. A., *The method of maximum likelihood applied to the Poisson binomial distribution.* Biometics, **14**, 97—106 (1956).
378. Sprott, D. A., Kalbfleisch, J. D., *Exemples of likelihood and comparisons with point estimates and large sample approximations.* J. Amer. Statist. Ass., **64**, 468—484 (1969).
379. Srikantan, K. S., *Recurrence relations between the PDF's of order statistics, and some applications.* Ann. Math. Statist., **33**, 169—177 (1962).
80. Srivastava, M. S., *Characterization theorems for some distributions.* Ann. Math. Statist., **36**, 361 (abstract) (1965).
381. Stein, C., *A remark on the likelihood principle.* J. R. Statist. Soc. A, **125**, 565—568 (1962).
382. Student, *On the probable error of the mean.* Biometrika, **6**, 1 —25 (1908).
383. Subrahmanian, K., *A note on the distribution of quadratic forms for mixture of normal distributions* (Abstract). Ann. Math. Stast., **39**, 706 (1968).
384. Subrahmanian, K., *Some contributions to the theory of non-normality* I (*univariate case*) Sankhyā A, **28**, 389—406 (1966).
385. Subrahmanian, K., *Some contrbutions to the theory of non normality II.* Sankhyā. A, **30**, 411—432 (1968).
386. Sugiura, N., *On the ortogonal inverse expansion with an application to the moments of order statistics.* Osaka Math. J., **14**, 253—263 (1962).
387. Sugiura, N., *The bivariate orthogonal inverse expansion and the moments of order statistics.* Osaka J. Math., **1**, 45—59 (1964).
388. Summers, R. D., *An inequality for the sample coefficient of variation and an application to variables sampling.* Technometrics, **7** (1), 67—68 (1965).
389. Taguti, G., *Tables of tolerance coefficients for normal populations.* Rep. Statist. Appl. Res., **5**, 73 (1958).
390. Takeuchi, K., *A uniformly asymptotically efficient estimator of a location parameter.* J. Amer. Statist. Assoc., **66**, 292—301 (1971).
391. Tang, P. C., *The power function of the analysis of variance tests with tables and illustrations of their use statistical.* Research Memoirs, **2**, 126—149 (1938).
392. Tate, R. F., Goen, R. L., *Minimum variance unbiased estimation for the truncated Poisson distribution.* Ann. Math. Statist., **29**, 755—765 (1958).
393. Tate, R. F., Klett, G. W., *Optimum Confidence Intervals for the Variance of a Normal Distribution.* J. Amer. Statist. Ass., **54**, 674—682 (1959).
394. Teichroew, D., *Tables of expected values of order statistics and products of order statistics for samples of size twenty and less from the normal distribution.* Ann. Math. Statist, **27**, 410—426 (1956).
395. Thompson, W. R., *On confidence ranges for the median and other expectation distributions for populations of unknown distribution form.* Ann. Math. Statist., **7**, 122—128 (1936).

Scanned with OKEN Scanner